COME ACCELERA IL CENTRO DI MASSA

Secondo articolo della serie Essenzialmente Fisica
pubblicato nel n.164 di Didattica delle Scienze*, febbraio 1993*

Trattando degli effetti di moto delle forze applicate a un corpo rigido, nello scorso numero della rivista abbiamo avuto occasione di ricordare la proprietà fondamentale del centro di massa (CM) di un generico sistema fisico S: *il CM si muove come se in esso fosse localizzata l'intera massa di S, e su di esso fossero applicate tutte le forze agenti su S*. È un discorso straordinariamente semplice, e spesso straordinariamente utile nella risoluzione dei problemi: eppure succede a volte che, al riguardo, i libri di testo trasmettano all'ignaro e incolpevole studente idee del tutto sbagliate.
Un esempio? In un testo largamente adottato nei licei scientifici viene proposto e risolto – in applicazione ai tre principi di Newton – questo istruttivo problemino: calcolare l'accelerazione del sistema (figura 1) e la forza agente sul carrello in funzione della massa complessiva m_1 del carrello e della massa m_2 del blocco sospeso: si trascurino l'attrito e la massa del filo.

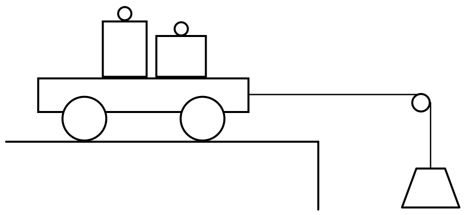

Figura 1

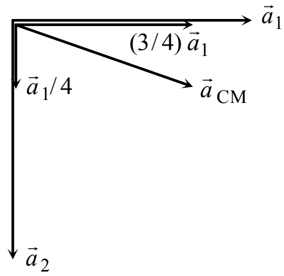

Figura 2

La discussione del problema inizia con queste parole: "Precisiamo che in casi come questi... per accelerazione del sistema si intende l'accelerazione del baricentro, al quale è applicabile il secondo principio, in cui $\vec{F}$ è la risultante delle forze agenti ed m è la massa totale del sistema". Dopo di che, il valore dell'accelerazione in questione viene calcolato come

[1] $a = m_2 g / (m_1 + m_2)$.

Dunque, si fa coincidere la risultante delle forze applicate al sistema carrello + filo + blocco col peso $m_2 g$ del blocco, dimenticando la forza esercitata sul filo dalla carrucola (se invece come 'sistema' si preferisce intendere l'insieme del carrello e del blocco, bisogna tenere conto della forza del filo sul carrello verso destra e della forza del filo sul blocco verso l'alto). Con tale dimenticanza, ciò che il testo ottiene (relazione [1]) *non è l'accelerazione del baricentro*, ma l'accelerazione del carrello verso destra e l'accelerazione del blocco verso il basso (cioè proprio quella che, anche se il libro è di diverso avviso, sembrerebbe legittimo denominare «accelerazione del sistema»). L'accelerazione $\vec{a}_{CM}$ del baricentro (qui indistinguibile dal CM[1]) è invece tutt'altra cosa, essendo data dalla media – 'pesata' sulle masse – delle accelerazioni $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ del carrello e del blocco sospeso. Risulta cioè

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Il CM accelera quindi *sia verso destra che verso il basso*: verso destra con accelerazione $am_1 / (m_1 + m_2)$ (dove a è data dalla [1]), verso il basso con accelerazione $am_2 / (m_1 + m_2)$. Come si vede, l'accelerazione del CM è quella di un punto di massa $m_1 + m_2$ soggetto a una forza orizzontale $m_1 a$ (è la forza del filo sul carrello, e per l'assenza di attrito è l'unica forza orizzontale sul sistema carrello + blocco) e a una forza verticale $m_2 a$ (risultante delle forze verticali su tale sistema). Se, per esempio, supponiamo che sia $m_1 = 3m_2$, l'accelerazione del carrello e del blocco è $a = g/4$, quella del CM è $(3/4)a = (3/16)g$ verso destra, $(1/4)a = (1/16)g$ verso il basso, e complessivamente (come si trova subito con Pitagora) circa $g/5$ (figura 2) .

La forza $\vec{F}_1$ del filo sul carrello ha dunque valore $m_1 a = [m_1 m_2 /(m_1 + m_2)]g$, inferiore (forse con un certa sorpresa da parte dello studente) al peso $m_2 g$ del blocco sospeso (nel nostro esempio, F_1 è 3/4 di $m_2 g$). E la forza $\vec{F}_2$ del filo sul

---

[1] La posizione del CM dipende dalla distribuzione delle masse, la posizione del baricentro dipende invece dalla distribuzione dei pesi. Ad esempio, il CM di una sfera omogenea di centro O è in O, mentre il baricentro è lievemente più basso per il fatto che la semisfera inferiore è, rispetto a quella superiore, un po' più vicina alla Terra, e quindi pesa un po' di più. Quando assumiamo che l'accelerazione di gravità sia uguale in tutti i punti di un dato sistema fisico, otteniamo per il baricentro del sistema la stessa posizione del CM.

blocco? Sappiamo a priori che ha lo stesso valore, perché la massa del filo è zero e quindi – in mancanza di attrito tra filo e carrucola – le forze agenti sul filo alle due estremità (tendenti a farlo accelerare l'una in un senso, l'altra nel senso opposto) devono essere uguali in modulo. Ma facciamo i calcoli: sul blocco agisce il peso $m_2 g$ verso il basso e la forza F_2 del filo verso l'alto: la forza complessiva è $m_2 a$ verso il basso, il che significa che la forza del filo vale

$$F_2 = m_2 g - m_2 a = m_2(g-a) = m_2[g - m_2 g/(m_1+m_2)] = [m_1 m_2/(m_1+m_2)]g$$

come la forza F_1. Per la terza legge di Newton questo è anche il valore della forza con cui il filo è tirato verso il basso: nel nostro esempio, il blocco tira il filo con una forza pari ai 3/4 del proprio peso (e a maggior ragione lo studente si stupirà del risultato).
Dopodiché, è immediato riconoscere che la carrucola esercita sul filo una forza di componente orizzontale F_1 verso destra e di componente verticale $F_2 = F_1$ verso l'alto: in tal modo è zero (come deve essere per il fatto che il filo ha per ipotesi massa zero) la somma vettoriale delle forze applicate al filo.

A questo punto penso possa essere utile un piccolo quesito di controllo. Supponiamo che ci interessi dimezzare la forza che tira il carrello: possiamo ottenere tale risultato dimezzando il peso del blocco sospeso? No, perché in tal modo noi dimezziamo il valore della forza $m_2 g$ da cui dipende l'accelerazione del sistema, diminuendo però al tempo stesso la massa del sistema: l'accelerazione che ne risulta è quindi *più grande* della metà di quella originaria (si veda la [1]). Il dimezzamento dell'accelerazione può essere invece ottenuto facendo scorrere senza attrito il blocco su un piano inclinato, con angolazione 30° rispetto al piano orizzontale: così la massa del sistema resta invariata, mentre la forza che produce l'accelerazione diventa $m_2 g\,\mathrm{sen}30° = m_2 g/2$.

E per concludere, una scommessa. Provate a fare ai vostri alunni le seguenti due domande: è univocamente determinato, nelle condizioni mostrate dalla figura, il senso di marcia del carrello? che cosa fanno le ruote del carrello, mentre il carrello si sposta? Nella quasi totalità dei casi le risposte saranno: il carrello viaggia necessariamente verso destra, le ruote girano in senso orario, la loro velocità angolare tanto più grande quanto più rapidamente si muove il carrello.
Ovviamente le due affermazioni sono sbagliate. Il fatto che la forza risultante sul carrello sia diretta verso destra implica che sia diretta verso destra *non la velocità, ma l'accelerazione* del carrello: la velocità potrebbe essere diretta verso destra (con valori in aumento), ma anche verso sinistra (con valori in diminuzione), e potrebbe altresì risultare uguale a zero.
Quanto alle ruote... i casi sono due: o girano con velocità angolare sempre uguale, oppure, qualunque cosa stia facendo il carrello, non girano proprio: traslano. Come mai? Perché *per ipotesi non c'è attrito*, e quindi la reazione del piano d'appoggio ha momento zero rispetto all'asse delle ruote.
Se ci fosse attrito – e ce ne fosse abbastanza – le ruote girerebbero senza strisciare, e quindi con velocità angolare ω proporzionale alla velocità v del carrello ($\omega = v/R$, dove R è il raggio delle ruote), in un senso o nell'altro a seconda del senso di marcia del carrello. Ma allora l'accelerazione del sistema andrebbe calcolata sottraendo dal peso del blocco sospeso la forza d'attrito (diretta in ogni caso verso sinistra, dato che per effetto di essa la velocità di rotazione delle ruote deve aumentare quando il carrello viaggia verso destra, e deve diminuire quando il carrello viaggia verso sinistra). Otterremmo in tal modo per l'accelerazione del sistema un valore *inferiore* a quello calcolato in precedenza, e per la forza alle due estremità del filo un valore *superiore* (basti pensare al fatto che se è più piccola l'accelerazione del blocco sospeso, ciò significa che la forza che, per effetto del filo, agisce su di esso verso l'alto è diventata più grande).

E... se c'è attrito tra filo e carrucola? La faccenda si complica ulteriormente: oltre a tutto, questa volta la direzione della forza di attrito è diversa a seconda che il filo scorra in un senso o nell'altro. E questa volta otterremmo per le forze applicate ai due estremi del filo due valori diversi, con una differenza pari proprio alla forza di attrito. Naturalmente, per un calcolo preciso occorrerebbe tenere conto di un sacco di altre cose: la massa del filo, il peso del tratto verticale del filo, l'attrito tra ciò che nel carrello ruota e ciò che non ruota, e poi ancora la resistenza dell'aria, la spinta di Archimede sul blocco sospeso...
Fortunatamente, per chi deve imparare la Fisica non è importante fare calcoli così accurati e difficili. Piuttosto, è importante non perdere mai di vista il limite di validità, rendersi conto che lavoriamo su situazioni fortemente idealizzate: comprendere insomma che se la Fisica, come fatto concettuale, può anche essere semplice, la realtà delle cose è invece quasi sempre terribilmente complessa.

Giovanni Tonzig
www.giovannitonzig.it