QUANDO SÌ E QUANDO NO

Succede non di rado di leggere nei manuali scolastici che il centro di massa (CM) di un sistema "è il punto in cui possiamo immaginare che l'intera massa del sistema sia localizzata": il che suggerisce al lettore l'idea che, nella risoluzione dei problemi di Fisica, tale assunzione sia sempre lecita. Ma è davvero così? È sempre possibile 'fingere' che la massa sia concentrata nel CM? Sarebbe assai comodo, ma la risposta purtroppo è no: in certi casi tale finzione è lecita, in altri è assolutamente proibita. Quando si può? quando non si può? È quello che ora cercheremo di chiarire, considerando dapprima alcuni casi 'favorevoli'.

1*a*) *Determinazione del moto del CM*. È la proprietà fondamentale del CM: per come la sua posizione viene definita, il CM 'si comporta' (si muove) come se in esso fosse concentrata l'intera massa del sistema, e se ad esso fossero applicate tutte le forze agenti sul sistema. Così, ad esempio, le prime due leggi di Newton potrebbero essere espresse in questi termini: se, per un qualsiasi corpo o insieme di corpi, la somma delle forze applicate è zero, il CM del sistema si muove di moto rettilineo uniforme (come caso particolare, resta immobile); la somma delle forze applicate ad un qualsiasi corpo o insieme di corpi è uguale alla massa complessiva del sistema moltiplicata per l'accelerazione del suo CM.
Se, come nella stragrande maggioranza dei casi pratici, vale la legge di azione e reazione[1] la somma delle forze interne (forze dovute all'interazione tra le varie parti del sistema) è uguale a zero: perciò *le forze interne non possono avere alcuna influenza diretta sul moto del CM* (possono però provocare effetti che implicano variazioni nelle forze esterne, e in questo senso possono influenzare il moto del CM). L'esempio che viene sempre proposto è quello della granata che scoppia in volo: le forze che per effetto dello scoppio agiscono sul sistema (il proiettile) sono interne al sistema: se, con un po' di arbitrio, ammettiamo che lo scoppio non modifichi le forze esterne (in realtà qualcosa cambia nella resistenza del mezzo), dopo lo scoppio il CM del sistema continua a muoversi come se lo scoppio non si fosse verificato. Un altro buon esempio è quello del tuffatore: durante il volo dal trampolino, i cambiamenti di configurazione del corpo del tuffatore sono dovuti a forze interne e, se trascuriamo le variazioni nella resistenza dell'aria, non condizionano in alcun modo il moto del CM: a parità cioè di velocità iniziale (valore e direzione), il CM si muove lungo la stessa traiettoria (parabolica) e con la stessa legge oraria quali che siano le evoluzioni del tuffatore.
Ma attenzione, c'è un punto delicato: è vero che l'accelerazione del CM di un sistema non cambia se, *a parità di forze applicate*, immaginiamo di concentrare la massa del sistema nel CM; ma è anche vero che, in molti casi, trasportando tutta la massa nel CM modifichiamo per ciò stesso il risultante delle forze. Per esempio, nel caso di corpi vincolati modifichiamo le 'reazioni' dei vincoli (la cosa verrà chiarita al punto 2*f*).

1*b*) *Calcolo della quantità di moto*. La quantità di moto $\vec{p}$ di un sistema di massa M è quella che avrebbe il CM se in esso fosse concentrata la massa dell'intero sistema: $\vec{p} = Mv_{\text{CM}}$. Esempio: per un cilindro omogeneo che ruota attorno al proprio asse la quantità di moto è zero, visto che il CM, trovandosi sull'asse di rotazione, ha velocità zero.

1*c*) *Calcolo del momento delle forze gravitazionali*. Consideriamo una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L, di sezione costante, imperniata senza attrito in modo da poter oscillare in un piano verticale attorno a un estremo. Durante l'oscillazione, l'accelerazione angolare dell'asta (in assenza d'aria) è $\alpha = \tau/J$, dove τ è il momento delle forze gravitazionali rispetto al punto A di sospensione, e J è il momento d'inerzia rispetto ad A. Come calcolare τ? Semplicemente immaginando che tutta la massa sia nel CM (a distanza $L/2$ da A), e che quindi in tale punto, e solo in tale punto, sia applicato il peso Mg della sbarra: $\tau = Mg(L/2)$.

1*d*) *Calcolo del lavoro delle forze gravitazionali*: il lavoro è uguale al modulo della forza gravitazionale complessiva $\vec{P}$ (peso del sistema) moltiplicato per lo spostamento del centro di massa nella direzione di $\vec{P}$. Nel caso, ad esempio, della sbarra considerata al punto precedente, il lavoro compiuto dalle forze gravitazionali quando la sbarra ruota passando dalla posizione orizzontale alla posizione verticale è $Mg(L/2)$, perché $L/2$ è lo spostamento verticale del CM[2].

Ma consideriamo adesso alcuni casi 'sfavorevoli'. Qui non c'è centro di massa che tenga: se non vogliamo sbagliare tutto, la massa del sistema dobbiamo lasciarla dov'è.

---

[1] Sui limiti di validità della legge di azione e reazione si vedano ad esempio i capitoli 28 e 96 in *100 errori di Fisica*.

[2] La regola va utilizzata con qualche cautela: si applica solo al lavoro compiuto dalle forze di un campo gravitazionale *uniforme* su un sistema in movimento nel campo.

2a) *Calcolo del momento d'inerzia*. Un punto materiale di massa m, distante r da un asse, ha, rispetto a tale asse, momento d'inerzia $J = Mr^2$. Se, per calcolare l'accelerazione angolare della sbarra imperniata a un estremo (punto 1c), assumessimo che la massa della sbarra è nel CM, otterremmo per il momento d'inerzia $J = M(L/2)^2 = ML^2/4$, mentre il valore corretto è $ML^2/3$. Altro esempio: il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo (di massa M e raggio R) rispetto al proprio asse geometrico è $MR^2/2$; se avessimo localizzato la massa nel CM, avremmo ottenuto $J = 0$.

2b) *Calcolo del momento angolare (momento della quantità di moto)*. Un punto materiale di massa m in rotazione con velocità v attorno a un asse z distante r ha, rispetto all'asse di rotazione, momento angolare $L_z = mvr = m(\omega r)r = mr^2\omega = J_z\omega$. Analogamente, per un corpo omogeneo che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse z di simmetria, rispetto al quale ha momento d'inerzia J_z, il momento angolare rispetto all'asse di rotazione è $L_z = J_z\omega$. Se avessimo localizzato la massa nel CM (che si trova ovviamente sull'asse di simmetria) avremmo ottenuto zero.

2c) *Calcolo dell'energia cinetica*. Un corpo che ha momento d'inerzia J rispetto a un determinato asse, e ruota attorno a tale asse con velocità angolare ω, ha energia cinetica $EC = ½ J\omega^2$. Per esempio, un cilindro omogeneo (di massa M e raggio R) in rotazione attorno al proprio asse geometrico ha $EC = ½(MR^2/2)\omega^2$. Se, per calcolare l'energia cinetica del cilindro, avessimo idealmente concentrato tutta la massa nel CM, avremmo ottenuto zero. Si noti: un cilindro omogeneo in rotazione attorno al proprio asse non possiede quantità di moto dato che il CM ha velocità zero (punto 1b), ma possiede energia cinetica pur avendo il CM velocità zero.

2d) *Calcolo della forza gravitazionale*. Si legge a volte nei libri di testo che la forza gravitazionale tra due corpi può essere determinata collocando idealmente le masse dei corpi interagenti nei rispettivi centri di massa. In realtà, ciò è vero solo per corpi sferici nei quali la massa è distribuita attorno al centro con simmetria sferica (in modo cioè che la densità risulta uguale in tutti i punti equidistanti dal centro): *e solo con riferimento agli effetti esterni*. Se, ad esempio, localizziamo la massa della Terra nel suo centro, possiamo ottenere per l'attrazione gravitazionale che essa esercita su oggetti esterni (il nostro corpo, un aereo, un satellite, la Luna) il valore corretto. Viceversa, per il peso di oggetti posti all'interno della Terra troveremmo, erroneamente, un valore via via più grande al diminuire della distanza r dal centro della Terra, e tendente addirittura a infinito quando r tende a zero: per una sfera omogenea, il calcolo corretto mostra invece che, se un corpo si spostasse dalla superficie verso il centro, il suo peso andrebbe diminuendo linearmente fino a zero. Tra l'altro, concentrando tutta la massa nel CM si corre il rischio di dare alla forza gravitazionale una direzione diversa da quella giusta: a volte addirittura la direzione opposta![3]

2e) *Calcolo del periodo di oscillazione di un pendolo fisico* (cioè di un pendolo costituito da una massa oscillante non puntiforme). Con un errore tanto più piccolo quando più piccola è l'ampiezza angolare di oscillazione, il periodo di oscillazione di un pendolo fisico di massa M è $T = 2\pi\sqrt{J/Mgd}$, dove J è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e d è la distanza del CM dal punto di sospensione. Ad esempio, per la sbarra imperniata a un estremo è $J = ML^2/3$, $d = L/2$. Perciò $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$. Se, per poter usare la più familiare formula del pendolo semplice, avessimo concentrato la massa nel CM, avremmo scritto $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$, ottenendo per T un valore inferiore a quello vero nel rapporto 1,15:1. Ad esempio, per L = 1 m avremmo ottenuto T = 1,41 s anziché 1,64 s (42,6 oscillazioni al minuto anziché 36,6).

2f) *Calcolo delle reazioni vincolari*. Si consideri ancora la sbarra oscillante: se P è il peso della sbarra, per ogni posizione della sbarra la reazione R del vincolo (il perno) è determinata dalla relazione $R + P = Ma_{CM}$. Se conoscessimo R, potremmo dedurre a_{CM}. Ma R è a priori incognita: per determinarla, è necessario trovare prima a_{CM}. E il punto è che qui non possiamo fingere che tutta la massa sia nel CM: altrimenti trasformiamo un pendolo fisico in un pendolo semplice, e (vedi punto precedente) descriviamo il moto oscillatorio del CM in modo sbagliato, trovando in definitiva per la reazione vincolare un valore e una direzione errati. Supponiamo ad esempio che l'ampiezza angolare di oscillazione sia $\pi/2$, e di voler determinare la reazione del vincolo nel momento in cui la sbarra è verticale. Dobbiamo prima di tutto trovare l'accelerazione del CM nell'istante che ci interessa. È chiaramente un'accelerazione di tipo centripeto (calcolabile quindi come $v^2/r = \omega^2 r$), dato che il componente tangenziale dell'accelerazione è nullo (infatti in tale istante la velocità è massima, e quindi è zero la pendenza nel diagramma v,t). La velocità angolare ω si può ottenere scrivendo che l'energia cinetica della sbarra è uguale (teorema dell'energia cinetica) al lavoro compiuto dalla forza peso a

---

3 Si veda il capitolo 34 in *100 errori di Fisica*.

partire dalla posizione orizzontale: $J\omega^2/2 = Mg(L/2)$. Essendo $J = ML^2/3$, otteniamo $\omega^2 = 3g/L$, e quindi $a_{CM} = \omega^2(L/2) = (3/2)g$. Tenuto conto che deve essere $P + R = Ma_{CM}$, e che all'istante considerato l'accelerazione del CM è diretta verticalmente verso l'alto, ricaviamo subito che anche R è diretta verticalmente (ovviamente verso l'alto), e che deve essere $R - P = M(3/2)g = (3/2)P$, da cui $R = 2{,}5\,P$.
Se avessimo concentrato la massa nel CM, il teorema dell'energia cinetica ci avrebbe dato $(1/2)M(v_{CM})^2 = Mg(L/2)$, cioè $(v_{CM})^2 = gL$, e quindi $a_{CM} = (v_{CM})^2/(L/2) = 2g$ anziché $1{,}5g$. Per la reazione del vincolo avremmo perciò trovato $R - P = M2g = 2P$, e cioè $R = 3P$ anziché $2{,}5\ P$.
Decisamente, fingere che la massa dei corpi sia concentrata in un solo punto può comportare qualche rischio!

Ricordiamo sinteticamente alcune altre proprietà del centro di massa.
3*a*). L'energia cinetica di un corpo C in un riferimento inerziale K si può calcolare come somma di due termini: il primo è l'energia cinetica $M(v_{CM})^2$ che si ottiene concentrando tutta la massa di C nel CM (ovvero, supponendo che il sistema trasli con la velocità del CM), il secondo è l'energia cinetica di C nel riferimento del CM: cioè in un riferimento che si sposta in K (e in tutti i riferimenti inerziali) senza ruotare, e ha origine nel CM. Esempio: per un cilindro omogeneo che rotola l'energia cinetica è $M(v_{CM})^2 + J\omega^2/2$ ($J = MR^2$ è il - momento d'inerzia rispetto all'asse del disco, ω è la velocità con cui il disco ruota attorno a tale asse). Se c'è abbastanza attrito, il cilindro ruota senza strisciare, e la sua velocità angolare è $\omega = v_{CM}/R$. Sostituendo, otteniamo che l'energia cinetica complessiva è $(3/4)M\,(v_{CM})^2$.

3*b*) Il momento d'inerzia di un corpo C rispetto a un generico asse x è uguale al momento d'inerzia di C rispetto a un asse x' parallelo a x passante per il CM di C, più il prodotto della massa M di K per il quadrato della distanza d tra i due assi: $J = J_{CM} + Md^2$ (teorema di Steiner, o degli assi paralleli).

3*c*) Il momento angolare di un corpo C rispetto a un asse x parallelo a un asse di simmetria x' distante d è uguale al momento angolare rispetto a x', più il momento angolare che il CM avrebbe rispetto a x se nel CM fosse localizzata la massa di K.

3*d*) Nel riferimento del CM, due corpi che si urtano in modo perfettamente anelastico (corpi uniti dopo l'urto, massima perdita di energia cinetica compatibile con la conservazione della quantità di moto) risultano immobili (anche rispetto alla rotazione????) dopo l'urto.

3*e*) Se le forze esterne sono trascurabili rispetto alle forze interne, due corpi che si urtano in una dimensione (che cioè procedono sempre, prima e dopo l'urto, lungo una medesima retta) in modo perfettamente elastico (conservazione dell'energia cinetica) conservano, nel riferimento del CM, la propria energia cinetica (per ognuno dei due, la velocità dopo l'urto ha uguale valore e opposta direzione rispetto a prima).

3*f*) La relazione fondamentale della dinamica rotazionale: $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ ($\vec{\tau}$ è il risultante dei momenti delle forze applicate a un sistema, $\vec{L}$ è il momento angolare del sistema), vale (nei riferimenti inerziali) sia quando $\vec{\tau}$ ed $\vec{L}$ sono valutati rispetto a uno stesso punto fisso, sia rispetto al CM, *quale che sia il suo movimento*.

3*g*) La relazione $\tau = J\alpha$ (analoga rotazionale della relazione $F = ma$) collega l'accelerazione angolare α di un corpo C attorno a un asse rispetto al quale C ha momento d'inerzia J, sotto l'azione di forze il cui momento risultante rispetto all'asse di rotazione è τ. Tale relazione vale per rotazioni rigide attorno ad assi fissi, ma anche per rotazioni rigide attorno ad assi mobili aventi direzione fissa e passanti dal CM.

Giovanni Tonzig
www.giovannitonzig.it