Analogamente, il lavoro tra i punti 2 e 4 corrisponde all'area della figura tra l'arco $2 \to 4$ e l'asse verticale; il lavoro positivo tra 1 e 2 corrisponde all'area della figura tra l'arco $1 \to 2$ e l'asse verticale; il lavoro positivo tra 4 e 5 corrisponde all'area della figura tra l'arco $4 \to 5$ e l'asse verticale. Si vede allora che l'esecuzione del ciclo comporta complessivamente, da parte delle forze del campo elettrico autoindotto, un lavoro resistente misurato, quanto al valore assoluto, dall'area del ciclo.

Tale lavoro rende conto delle perdite per isteresi magnetica che si verificano inevitabilmente nel ferro di una macchina elettrica (cfr. punto 9 pag.165)

11.6 La legge di Ampère - Maxwell

1. Sappiamo (pag. 142) che la legge di Ampère sulla circuitazione magnetica non può essere applicata ai campi magnetici prodotti da correnti elettriche che percorrono circuiti aperti, oppure prodotti da singole cariche elettriche. E abbiamo anticipato che tali limitazioni scompaiono se si tiene conto anche della **corrente di spostamento** concatenata al percorso chiuso che si considera, vale a dire della grandezza $\varepsilon_0\, \mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t$, prodotto della costante dielettrica del vuoto per la derivata temporale del flusso elettrico concatenato al percorso in questione. Con tale integrazione, la legge di Ampère diventa la **legge di Ampère - Maxwell**:

[A] $\mathrm{C}(\vec{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0\, \mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t\,).$

2. Consideriamo ad esempio il caso di un circuito (fig. 12) comprendente un condensatore: nel disegno, la linea L è linea di contorno di una superficie come S_2, attraversata da una corrente di conduzione, ma anche di una superficie come S_1, che è invece attraversata da una corrente di spostamento, nel senso che il flusso elettrico attraverso S_1 è in variazione (dato che è in variazione la carica del condensatore e quindi il campo elettrico tra le armature). È immediato constatare che nell'istante in cui la corrente di conduzione attraverso S_2 ha una data intensità, la corrente di spostamento attraverso S_1 ha esattamente la stessa intensità: il che significa che l'intensità della corrente concatenata a L (l'intensità della corrente che attraversa le superfici delimitate da L) è, anche in questo caso, univocamente determinata.

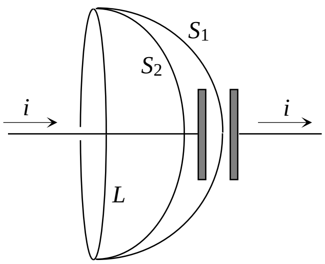

Fig. 12

3. È chiaro infatti che l'intensità i della corrente assorbita da un condensatore esprime anche la rapidità di variazione della carica q_C dell'armatura su cui la corrente arriva: $i = \mathrm{d}q_C/\mathrm{d}t$. Moltiplicando e dividendo per ε_0 otteniamo

$i = \varepsilon_0\, \mathrm{d}(q_C/\varepsilon_0)/\mathrm{d}t = \varepsilon_0\, \mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t$

dove si è tenuto conto del fatto che, per la prima legge di Gauss, q_C/ε_0 è il flusso elettrico uscente dalla superficie chiusa $S_1 + S_2$ (costituita dalla S_1 e dalla S_2 prese insieme), e quindi anche, essendo S_2 fuori dal campo elettrico, il flusso attraverso S_1. La relazione scritta dimostra che le due correnti (la corrente di conduzione attraverso S_2 e la corrente di spostamento attraverso S_1) hanno la stessa intensità: se a un dato istante la prima ha intensità 0,37 ampere, anche la seconda ha, in quell'istante, intensità 0,37 ampere, e quindi il valore della corrente concatenata a un percorso come L è univocamente definita: 0,37 A. Se al posto del condensatore venisse posto un filo conduttore con una corrente di intensità 0,37 A, nessuna differenza potrebbe essere rilevata nello spazio circostante: *il campo magnetico sarebbe esattamente lo stesso*.

4. Tutto questo ha essenzialmente il seguente significato: *come un campo magnetico in variazione produce un campo elettrico* (il campo elettrico indotto), *analogamente una corrente di spostamento – e cioè un campo elettrico in variazione – produce un campo magnetico*. Mentre però il campo elettrico indotto si differenzia da quello coulombiano per il fatto di non essere conservativo, *non c'è alcuna differenza* tra il campo magnetico prodotto da una corrente e il campo magnetico prodotto da un campo elettrico variabile.

5. Si tenga presente che, dato il piccolissimo valore di ε_0 ($\approx 10^{-11}$ F/m), il campo magnetico prodotto da correnti di spostamento risulterà apprezzabilmente diverso da zero *solo nel caso di variazioni estremamente rapide* del campo elettrico (come ad esempio le variazioni che si verificano nei dispositivi di generazione delle onde radio).

6. Consideriamo ora, nel campo magnetico prodotto da una carica in moto con velocità $\vec{v}$, una linea di campo L: calcolando la circuitazione di $\vec{B}$ lungo L in funzione della corrente di spostamento concatenata a L, dobbiamo poterne ricavare, per il valore di $\vec{B}$ nei punti di L, lo stesso valore che può essere ottenuto a partire dalla prima formula di Laplace. Altrimenti saremmo costretti a concludere che una carica in moto produce *due* distinti campi magnetici: uno perché è una carica in moto, il secondo perché il campo elettrico da essa prodotto ha, per effetto del movimento della carica, una configurazione che varia nel tempo.

In fig.13, la linea di campo considerata è una circonferenza L di raggio H, posta naturalmente in un piano ortogonale a $\vec{v}$, col centro sulla retta lungo la quale, all'istante considerato, la carica sta viaggiando. Sappiamo che nei punti di L il vettore $\vec{B}$ è tangente a L, con la direzione che risulta dalla regola della mano destra (rispetto alla carica q che si sta avvicinando, L è orientata in senso orario se q è positiva, antiorario se q è negativa). Per la prima legge di Laplace, il modulo di $\vec{B}$ è

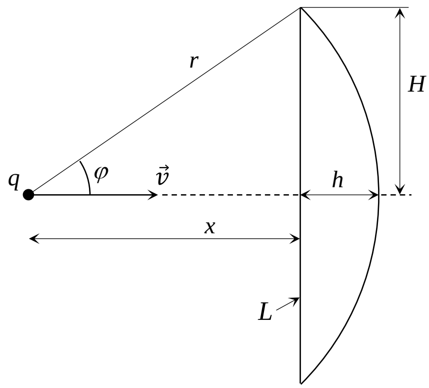

Fig. 13

$B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qv\,\text{sen}\varphi}{r^2}$. Secondo invece la legge di Maxwell la circuitazione di $\vec{B}$ lungo L è $\mathrm{C}(\vec{B}) = \mu_0\,\varepsilon_0\,\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t$, e quindi nei punti di L il modulo di $\vec{B}$ è $B = \mathrm{C}(\vec{B})\,/\,2\pi H$. Dobbiamo verificare che le due espressioni di B coincidono.

Per esprimere in funzione di t il flusso elettrico concatenato a L, consideriamo, tra le infinite superfici delimitate da L, una calotta sferica (vedi figura) di raggio r e centro q. Nei punti di tale superficie il vettore $\vec{E}$ è ortogonale alla superficie, e ha ovunque modulo $E = q/(4\pi\,\varepsilon_0\,r^2)$. Pertanto, il flusso elettrico attraverso la calotta è semplicemente il modulo di $\vec{E}$ per l'area A della calotta. Per il calcolo di A i manuali danno la formula $A = 2\pi r h$ (dove h è l'altezza della calotta). Essendo $h = r - r\cos\varphi = r\,(1-\cos\varphi)$, risulta

$A = 2\pi r^2\,(1-\cos\varphi)$. In definitiva, il flusso elettrico attraverso la calotta è

$$\Phi(\vec{E}) = EA = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,2\pi r^2(1-\cos\varphi) = \frac{q\,(1-\cos\varphi)}{2\varepsilon_0}.$$

Risulta perciò $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}\varphi}\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q\,\text{sen}\varphi}{2\varepsilon_0}\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

Teniamo ora presente che, detta x la distanza di q dal centro della circonferenza L, è $\varphi = \text{arctg}\,(H/x)$, e teniamo presente che la velocità di q è $v = -\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (l'incremento $\mathrm{d}x$ della distanza x in $\mathrm{d}t$ è infatti negativo). Allora

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\text{arctg}(H/x))}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+(H^2/x^2)}\,(-H/x^2)(-v) = \frac{vH}{x^2+H^2} = \frac{vH}{r^2}.$$

In definitiva $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q\,\text{sen}\varphi}{2\varepsilon_0}\,\dfrac{vH}{r^2}$.

Ciò significa che la circuitazione magnetica lungo L è, per la legge di Maxwell,

$C(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0\, \mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t) = \mu_0 \dfrac{qvH\,\mathrm{sen}\varphi}{2r^2}$, e quindi nei punti di L risulta $B = C(\vec{B})/2\pi H = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qv\,\mathrm{sen}\varphi}{r^2}$, esattamente come si era ottenuto a partire dalla formula di Laplace.

7. Possiamo esprimere la legge di Ampère – Maxwell anche in forma differenziale (locale). Per il teorema del rotore è $\mathrm{C}(\vec{B}) = \Phi(\mathrm{rot}\vec{B})$. L'intensità di corrente concatenata a L è $i = \Phi(\vec{J})$, è data cioè (cfr. punto 10 a pag.106) dal flusso del vettore densità di corrente attraverso una qualsiasi superficie delimitata da L. Essendo $\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t = \Phi(\partial\vec{E}/\partial t)$, possiamo scrivere la [A] di pag.195 nella forma $\Phi(\mathrm{rot}\vec{B}) = \mu_0\left[\Phi(\vec{J}) + \varepsilon_0\,\Phi(\partial\vec{E}/\partial t)\right] = \Phi\left[\mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t\right)\right]$.

Dato che tale uguaglianza tra flussi deve essere verificata per una *qualsiasi* superficie, deve essere identicamente

[B] $\quad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\,(\vec{J} + \varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t)$

che è l'equazione che cercavamo.

11.7 Le equazioni di Maxwell

1. Sono le quattro equazioni che esprimono le proprietà fondamentali del campo elettrico e del campo magnetico:

(*a*) legge di Gauss per il campo elettrico $\quad \Phi(\vec{E}) = q/\varepsilon_0$

(*b*) legge di Gauss per il campo magnetico $\quad \Phi(\vec{B}) = 0$

(*c*) legge di Faraday $\quad \mathrm{C}(\vec{E}) = -\,\mathrm{d}\Phi(\vec{B})/\mathrm{d}t$

(*d*) legge di Ampère - Maxwell $\quad \mathrm{C}(\vec{B}) = \mu_0\,[i + \varepsilon_0\,\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t]$.

2. Queste equazioni sono state proposte da Maxwell come sintesi dell'intero elettromagnetismo: in effetti, se ad esse viene aggiunta la relazione

(*e*) $\quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

che definisce i vettori campo elettrico $\vec{E}$ e campo magnetico $\vec{B}$, abbiamo tutte le relazioni fondamentali dell'elettromagnetismo classico (non relativistico e non quantistico): *ogni altra legge o proprietà può, in linea di principio, essere desunta da queste.*

3. Se facciamo l'ipotesi di trovarci in regime stazionario, in modo che siano uguali a zero le derivate temporali, le equazioni di Maxwell diventano:

(*a*') $\Phi(\vec{E}) = q/\varepsilon_0 \qquad$ (*b*') $\Phi(\vec{B}) = 0$

(*c*') $\mathrm{C}(\vec{E}) = 0 \qquad$ (*d*') $\mathrm{C}(\vec{B}) = \mu_0 i$.

La (*a*') e la (*c*') sono le leggi fondamentali del campo elettrico stazionario: in esse non compare il campo $\vec{B}$. La (*b*') e la (*d*') sono le leggi fondamentali del