28 – SE LA PARTICELLA PERDE IL CONTATTO

Citazione

«La particella m di fig. 8-14 si muove su una guida circolare verticale di raggio R senza attrito. Quando m è nella posizione più bassa, la sua velocità è v_0. (a) Qual è il minimo valore v_m di v_0 per cui la particella riesce a compiere un giro completo senza perdere contatto con la guida? (b) Supponiamo che $v_0 = 0{,}775\ v_\mathrm{m}$. La particella percorre la guida fino a una posizione P nella quale perde contatto con la guida per seguire la traiettoria tratteggiata. Determinare la posizione angolare θ del punto P.»

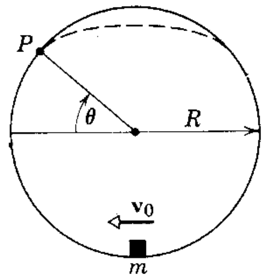


Fig. 8-14.

(Testo universitario americano)

Commento

È il famoso, istruttivo problemino noto agli studenti come «problema del giro della morte». Le risposte che il testo suggerisce sono $v_\mathrm{m} = \sqrt{5gR}$ per la prima domanda, $\mathrm{sen}\,\theta = 1/3$ per la seconda. Perfetto[1].

---

[1] La prima risposta si ottiene imponendo che nel punto più alto della circonferenza la reazione del vincolo sia zero (imponendo quindi che la forza centripeta mv^2/R coincida col peso mg), ed esprimendo poi in tale relazione, tramite il teorema dell'energia cinetica, la velocità v in funzione della velocità incognita v_m di partenza: $mv^2/2 = m(v_\mathrm{m})^2/2 - mg2R$ (si è trascurata l'energia cinetica rotazionale del blocchetto, che non a caso l'Autore ha definito «particella»). La seconda risposta si ottiene cercando il valore di θ per il quale, nel caso la velocità di partenza sia $0{,}775\ v_\mathrm{m}$, la reazione del vincolo si annulla. La relazione da scrivere è $mv^2/R = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ (forza centripeta uguale a componente trasversale del peso). Essendo, per il teorema dell'energia cinetica, $mv^2/2 = m(0{,}755\ v_\mathrm{m})^2/2 - mg(R + R\,\mathrm{sen}\,\theta)$, si ricava in definitiva $\mathrm{sen}\,\theta = 1/3$.

Ciò che non è perfetto, tutt'altro, è l'illustrazione che mostra la traiettoria che, nel secondo caso, la particella dovrebbe seguire dopo il distacco: una curva francamente orribile. E non solo per il fatto che, essendo il seno di θ pari al rapporto tra l'altezza di P sul diametro orizzontale e il raggio, e dovendo essere $\operatorname{sen}\theta = 1/3$, la posizione effettiva di distacco è notevolmente più bassa di quella indicata dalla figura: ma soprattutto per un'altra, ben più sostanziale ragione.

Tutti (o quasi) gli studenti di liceo sanno che, quando un corpo è lanciato *nel vuoto* (in modo che, una volta esaurita la fase di lancio, agisca solo il peso), la sua traiettoria è una parabola ad asse verticale. Per cui non c'è dubbio che, dopo il distacco dalla guida e fino al nuovo contatto, la particella procede lungo una parabola[2]: e non c'è parabola al mondo che possa vagamente rassomigliare alla curva a tratteggio della figura. La quale, tra l'altro, presenta un raggio di curvatura massimo (anziché minimo) in corrispondenza del vertice. È chiaro che una parabola tangente in P (ultimo punto di contatto) e nel suo dirimpettaio P' alla circonferenza si distacca dalla circonferenza *non verso l'interno, ma verso l'esterno,* cosicché il vertice si trova *non al di sotto, ma al di sopra* della sommità della circonferenza.

Vogliamo fare quattro conti? È un gioco da ragazzi. Si sa (e comunque si trova subito[3]) che, quando la velocità di lancio è V e l'angolo di lancio è α, la 'gittata' (distanza d tra punto di lancio e punto di ricaduta alla stessa altezza) è
$d = (V^2 \operatorname{sen} 2\alpha)/g$.
Nel nostro caso, tenuto conto che in P la reazione del vincolo è zero, cosicché la forza centripeta (mv^2/R) coincide col componente radiale del peso ($mg \operatorname{sen}\theta = mg\cos\alpha$), il quadrato della velocità di lancio è $gR\cos\alpha$. Perciò la gittata è
$d = R\cos\alpha \operatorname{sen} 2\alpha$.
Essendo $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, possiamo anche scrivere

2 A causa delle piccole dimensioni e della piccola velocità della particella, l'azione dell'aria si può qui ritenere trascurabile.

3 Il tempo t^* necessario perché il corpo ritorni al livello di partenza si ottiene imponendo che la componente verticale della velocità ($v = V\operatorname{sen}\alpha - gt$) raggiunga il valore $-V\operatorname{sen}\alpha$, opposto a quello iniziale. Il risultato è $t^* = (2V\operatorname{sen}\alpha)/g$. La gittata d si ottiene ponendo tale valore del tempo nella relazione $x = (V\cos\alpha)t$.

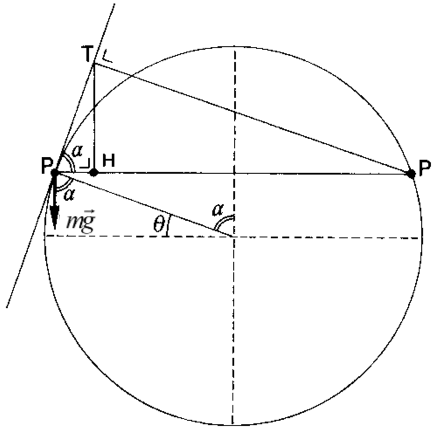
$d = 2R\,\mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha$.

Siccome infine nel nostro caso $\cos\alpha = \mathrm{sen}\theta = 1/3$, qual è la conclusione? che la gittata d, ben lungi dal coincidere con la lunghezza ($2R\,\mathrm{sen}\alpha$) della corda PP', è nove volte più piccola!

Prima osservazione. Il distacco si verifica quando, superato il livello del centro della circonferenza, la particella non ha velocità sufficiente a raggiungere la sommità della circonferenza. A seconda del valore della velocità v_0 della particella nel punto più basso, l'angolo θ che definisce la posizione P di distacco può assumere qualsiasi valore compreso tra 0 e $\pi/2$ (estremi esclusi), e corrispondentemente α può variare tra $\pi/2$ e 0 (estremi esclusi). Dal fatto che la gittata è

$d = 2R\,\mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha$

segue subito che il punto H in cui la parabola descritta dalla particella interseca la corda PP' si può ottenere (figura) conducendo da P' la perpendicolare alla retta tangente in P alla circonferenza, e calando poi la verticale dall'intersezione T così ottenuta[4].



Seconda osservazione. L'Autore deve avere un fatto personale col problemino del giro della morte. Nell'edizione successiva a quella qui citata, il problema non viene proposto. Ma ricompa-

[4] $2R\,\mathrm{sen}\alpha = PP'$, $PP'\cos\alpha = PT$, $PT\cos\alpha = PH$.

re in un’edizione più recente, e questa volta, nel disegno, la traiettoria seguita dalla particella dopo il distacco è cambiata, senza peraltro che la situazione migliori di molto: anziché in P', la particella viene fatta ricadere esattamente all’estremità di destra del diametro orizzontale. Attendiamo con curiosità ulteriori sviluppi.