

POLITECNICO DI MILANO
INGEGNERIA INFORMATICA ONLINE
FISICA GENERALE
ESERCITAZIONI DEL PROF. G. TONZIG

1. NOZIONI INTRODUTTIVE pag.1
2. CINEMATICA pag.7
3. PRINCIPI DI NEWTON pag.12
4. CENTRO DI MASSA – DINAMICA ROTAZIONALE pag.19
5. LAVORO, ENERGIA pag.24
6. GRAVITAZIONE pag.30
7. MECCANICA RELATIVA pag.38
8. MECCANICA DEI FLUIDI pag.44
9. TEMPERATURA, CALORE, GAS pag.50
10. CAMBIAMENTI DI STATO pag.57
11. PRIMO E SECONDO PRINCIPIO TERMODINAMICA pag.62
12. ENTROPIA pag.67
13. TEORIA CINETICA MOLECOLARE pag.74
14. ELETTROMAGNETISMO pag.81
15. LETTURA AMENA n.1 “Le parole della fisica” pag.87
16. LETTURA AMENA n.2 “Le leggi della fisica” pag.91
17. LETTURA AMENA n.3 “Energia potenziale” pag.93
18. LETTURA AMENA n.4 “Reazioni vincolari” pag.95

AVVISI

- 1 – Gli esercizi di questa raccolta provengono quasi tutti dai ben più ampi questionari dei miei testi di fisica generale (meccanica, termodinamica, elettromagnetismo).
- 2 – Alcuni degli esercizi qui proposti potranno forse apparire “troppo facili” per un corso universitario. Vorrei anch’io poterlo credere, ma ventisei anni di Politecnico mi hanno insegnato che sulle idee importanti della fisica (le idee sulle quali sarà più difficile, per il docente, fare sconti in sede d’esame) è buona norma didattica non dare mai nulla per scontato.
- 3 – Potrà anche sorprendere, in questi esercizi, l’uso limitato della matematica. È una scelta didattica precisa, volta a contrastare la tipica tendenza dello studente a buttarsi sui calcoli senza prima aver fatto luce sulle idee.
- 4 – Questo materiale andrà sicuramente soggetto a ritocchi. La versione più aggiornata potrà sempre essere scaricata (insieme a molto altro materiale didattico) dal sito www.giovannitonzig.it. Per essere sempre informati delle modifiche in tempo reale, iscriversi alla mailing list all’indirizzo giovanni.tonzig@fastwebnet.it.
- 5 – Le citazioni da altri testi, qui incluse a scopo di riflessione supplementare alla fine di ogni questionario, si riferiscono a opere ormai da molto tempo (decenni) fuori commercio.

ESERCITAZIONE N.1
NOZIONI INTRODUTTIVE
(soluzioni a fine capitolo)

DERIVATE E INTEGRALI

(1) La posizione di un punto mobile lungo una retta orientata x è definita in funzione del tempo dalla relazione $x = 5 + 2t^3$, in cui t è espresso in secondi (s) e x in metri (m). Sapendo che la velocità è la derivata temporale di x e che l'accelerazione è la derivata temporale della velocità, si determini

(1) (A) La velocità del punto mobile mezzo secondo dopo l'istante $t = 0$

(1) (B) L'accelerazione del punto mobile un quarto di secondo prima dell'istante zero.

RIPASSO DI ANALISI

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (\text{qualsiasi } n)$$

$$\text{Es. } \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \quad \frac{d}{dx} x^{-1} = -x^{-2} \quad \frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} \quad \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$\frac{dKx}{dx} = K \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

(2) L'accelerazione di un punto è, in unità internazionali, $a = 5t^3 - 2t - 12$. Si determini la variazione subita dalla velocità nei primi tre secondi dopo l'istante zero.

RIPASSO DI ANALISI

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{per } n \neq -1 \quad \text{Es. } \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \quad \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad [\text{la regola generale darebbe } x^0/0 = 1/0].$$

$$\text{Inoltre (algebra): } x^{a+b} = x^a x^b \quad x^{a-b} = x^a / x^b \quad x^{-a} = 1/x^a \quad x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}.$$

UNITÀ DI MISURA

(3) L'unità di forza del vecchio sistema CGS era la *dina* (simbolo dyn), definita come la forza che applicata a un ipotetico punto di massa 1 g produrrebbe l'accelerazione di 1 cm/s². Sapendo che una forza corrisponde a una massa per un'accelerazione, si trovi la relazione tra la dina e la corrispondente unità internazionale, il newton.

(4) Sapendo che la grandezza 'lavoro' corrisponde al prodotto di una forza per una lunghezza, e sapendo che l'unità di misura CGS per il lavoro era l'erg (simbolo erg), definito come il lavoro compiuto dalla forza costante di 1 dyn quando lo spostamento del punto d'applicazione nella direzione della forza vale 1 cm, si trovi in che relazione stanno l'unità CGS e la corrispondente unità internazionale (il joule, simbolo J).

(5) Sapendo che la grandezza 'pressione' corrisponde a una forza diviso un'area, si trovi la relazione tra unità internazionale e unità CGS di pressione.

(6) Il materiale X ha densità 1 kg/m³, il materiale Y ha densità 1 g/cm³. Sapendo che la densità corrisponde a una massa diviso un volume, si spieghi quale dei due materiali ha densità maggiore.

CONTROLLO DIMENSIONALE

(7) Lo studente X , incerto se calcolare il periodo di oscillazione del pendolo semplice con la formula $T = 2\pi\sqrt{g/L}$ (L lunghezza del pendolo, g accelerazione di gravità = 9,81 m/s²) oppure con la formula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, risolve il suo dubbio in base a semplici criteri dimensionali. Come ha fatto?

(8) In una vecchia edizione di un prestigioso manuale universitario di Fisica, un problema di statica richiedeva che si determinasse il valore di una data forza F . La soluzione proposta dal testo era $F = P [\sqrt{h(2-h)}] / (r-h)$, dove P indicava un peso mentre h e r rappresentavano lunghezze. Era davvero accettabile tale soluzione?

(9) Le tre grandezze x, y, z sono legate dalla relazione $y = 3x - z/y^2$. Sapendo che x ha le dimensioni di una lunghezza, determinare le dimensioni di y e z .

(10) Le grandezze x, y, z, k sono legate dalla relazione $(x - 5z^3)/9yk = 48 \text{ m}^3/\text{s}$. Sapendo che $z = 18 \text{ m}$ e che $y = 6 \text{ m/s}$, determinare le dimensioni di x e di k .

(11) Sapendo che la «capacità equivalente» di due condensatori in serie, rispettivamente di capacità C_1 e C_2 , è $C_e = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, cioè il prodotto delle capacità diviso la somma, potremmo dedurre che se i condensatori sono tre la capacità equivalente è $C_e = C_1 C_2 C_3 / (C_1 + C_2 + C_3)$. Un semplice controllo dimensionale ci avvertirebbe però subito dell'errore: spiegare.

(12) Secondo la legge gravitazionale di Newton, due corpi di massa m_1 ed m_2 a distanza r si attraggono con una forza $F = Gm_1 m_2 / r^2$ (dove G è la «costante di gravità»). Determinare le dimensioni della grandezza *tempo* in un ipotetico sistema di unità di misura in cui la massa e la lunghezza fossero grandezze meccaniche fondamentali (come nel sistema internazionale), e in cui la costante G della legge di Newton fosse un puro numero (come *non* è nel SI).

CALCOLO VETTORIALE

Direzione e verso: nei testi di lingua inglese (la lingua della comunicazione scientifica) esiste SOLO la direzione, esattamente come nel nostro linguaggio corrente

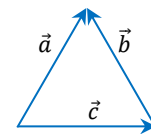
In queste esercitazioni l'idea di direzione include già l'idea di verso. Dire «stessa direzione ma versi opposti» è un artificio inutile, è sufficiente dire «direzioni opposte».

(13) Il modulo di $\vec{p}$ è 5. Qual è il modulo di $-\vec{p}$?

(14) Il concetto di *vettore negativo* non esiste (vero/falso).

(15) La grandezza fisica *lunghezza* ha carattere vettoriale (vero/falso), perché tutto ciò di cui si misura la lunghezza (il lato di un rettangolo, la diagonale di un quadrato, il diametro di una circonferenza ecc.) ha una ben precisa direzione nello spazio.

(16) Tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ di modulo uguale sono disposti in modo da formare un triangolo equilatero (figura). Si chiarisca quanto vale l'angolo formato da $\vec{a}$ con $\vec{b}$, da $\vec{b}$ con $\vec{c}$, da $\vec{c}$ con $\vec{a}$.



(17) Sapendo che i vettori $\vec{p}, \vec{q}$ e $\vec{p} + \vec{q}$ hanno modulo uguale, determinare l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

(18) Sapendo che $\vec{p} + \vec{q}$ è perpendicolare a $\vec{p}$, e che $|\vec{q}| = 2|\vec{p} + \vec{q}|$, determinare:

(a) il valore dell'angolo tra $\vec{q}$ e $\vec{p} + \vec{q}$,

(b) il valore dell'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

(19) Se risulta $\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$, e al tempo stesso $p^2 + q^2 = k^2$, l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$ è sicuramente 90° (vero/falso).

(20) Una barca a motore procede in direzione Est con velocità $v' = 18 \text{ km/h}$ in assenza di correnti. Quale sarebbe la sua velocità $\vec{v}$ (valore e direzione) se l'acqua viaggiasse in direzione W 65° S con velocità $V = 3 \text{ km/h}$?

(21) Una barca a motore che in acqua ferma si muoverebbe con velocità $v' = 20 \text{ km/h}$ in direzione W 28° N, procede in realtà con velocità $v = 25 \text{ km/h}$ in direzione W 48° N per effetto della corrente. Determinare la velocità (valore e direzione) della corrente.

(22) Un aeroplano, la cui velocità in aria ferma è $v' = 250 \text{ km/h}$, deve andare da P a Q , in direzione S 25° E. Il vento ha una velocità $V = 40 \text{ km/h}$ in direzione S 45° W. Trovare la direzione in cui deve puntare l'aeroplano, e il modulo della velocità $\vec{v}$ dell'aeroplano rispetto al suolo.

(23) Si chiarisca se è possibile che per un vettore $\vec{p}$ variabile nel tempo risulti a un dato istante $\frac{d|\vec{p}|}{dt} \neq \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|$.

(24) La relazione $\vec{p} \cdot \vec{p}$ non ha senso (*vero/falso*).

(25) La relazione $(\vec{k} \cdot \vec{c})\vec{q}$ non ha senso (*vero/falso*).

(26) La relazione $\vec{p} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{q})$ non ha senso (*vero/falso*).

(27) Per la proprietà distributiva, la relazione $\vec{p} \cdot (\vec{q} \times \vec{k})$ equivale alla relazione $(\vec{p} \cdot \vec{q}) \times (\vec{p} \cdot \vec{k})$ (*vero/falso*).

(28) Moltiplicando scalarmente due grandezze fisiche vettoriali si ottiene un puro numero (*vero/falso*).

(29) Il prodotto tra due grandezze fisiche si può effettuare (*vero/falso*) solo se hanno entrambe carattere vettoriale, perché altrimenti non si può utilizzare né la regola del prodotto scalare né la regola del prodotto vettoriale.

(30) La notazione $\vec{p} \times \vec{q} \cdot \vec{k}$ è ambigua: non si capisce se si deve effettuare prima il prodotto scalare oppure il prodotto vettoriale (*vero/falso*).

(31) La notazione $\vec{p} \times \vec{q} \times \vec{k}$ è ambigua: non si capisce quale dei due prodotti debba essere eseguito per primo (*vero/falso*).

(32) Citazione: «Se l'energia di legame è superiore alla forza peso e all'energia cinetica della particella, questa non si muove» (*testo di chimica per il liceo scientifico*). Qualcosa, in questa frase, non funziona... (*chiarire*).

SOLUZIONI

$$(1) (A) \quad v = dx/dt = 6t^2 \quad \rightarrow \quad v(t=0,5s) = 6 \times 0,5^2 \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$$

$$(1) (B) \quad a = dv/dt = 12t \quad \rightarrow \quad a(t=-0,25s) = [12 \times (-0,25)] \text{ m/s}^2 = -3 \text{ m/s}^2.$$

$$(2) \quad v = \int a(t) dt + C \quad \rightarrow \quad v_f - v_i = \int_{t=0}^{t=3} (5t^3 - 2t - 12) dt = \left[\frac{5}{4}t^4 - t^2 - 12t \right]_0^3$$

$$= (101,25 - 9 - 36) \text{ m/s} = 56,25 \text{ m/s}.$$

$$(3) \quad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ g} \times 100 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyn}.$$

(4) L'unità internazionale per il lavoro (il *joule*, simbolo J) è il lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il punto d'applicazione si sposta di 1 m nella direzione della forza. Risulta

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 10^5 \text{ dyn} \times 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg}.$$

(5) L'unità internazionale per il lavoro (il *joule*, simbolo J) è il lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il punto d'applicazione si sposta di 1 m nella direzione della forza. Risulta

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 10^5 \text{ dyn} \times 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg}.$$

(6) Dato che $1 \text{ kg/m}^3 = (10^3 \text{ g}) / (10^2 \text{ cm})^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, Y è 1000 volte più denso.

Nota: 1 g/cm^3 è la densità dell'acqua, 1 kg/m^3 è l'ordine di grandezza della densità dell'aria (alle normali temperature e pressioni è $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$).

(7) Solo la seconda delle due formule può dare il valore di una grandezza che ha le dimensioni di un tempo. Essendo infatti g un'accelerazione (dimensioni LT^{-2}), la grandezza L/g ha le dimensioni di un tempo al quadrato.

(8) No, per ragioni dimensionali: tra parentesi figura la differenza tra un numero e una lunghezza, operazione non effettuabile. La soluzione esatta contiene in effetti tra parentesi la grandezza $2r-h$, differenza tra due lunghezze. In tal modo sotto radice quadrata c'è il quadrato di una lunghezza, perciò la frazione che moltiplica il peso P porta sia a numeratore che a denominatore una lunghezza, ed equivale quindi a un puro numero (come deve essere per avere a secondo membro una forza).

(9) y è una lunghezza, z è una lunghezza al cubo (cioè un volume).

$$(10) \quad [x] = L^3 \text{ (come } z^3), [k] = T^2 L^{-1} \text{ (così } k \text{ è un tempo)}.$$

(11) La grandezza $C_1 C_2 C_3 / (C_1 + C_2 + C_3)$ non è una capacità, ma una capacità al quadrato. La capacità equivalente di tre condensatori in serie è in effetti $C_e = C_1 C_2 C_3 / (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1)$.

(12) Essendo una forza il prodotto di una massa per un'accelerazione ($\vec{F} = m\vec{a}$), risulta $[F] = M L T^{-2}$. Se G fosse un puro numero, per la legge di Newton sarebbe $[F] = M^2 L^{-2}$ e quindi, per confronto, $M L T^{-2} = M^2 L^{-2}$. Moltiplicando a sinistra e destra dell'uguale per T^2 otteniamo $M L = M^2 L^{-2} T^2$ e quindi $T^2 = L^3 M^{-1}$. Il tempo avrebbe dunque le dimensioni della radice quadrata del rapporto tra un volume e una massa: $[T] = L^{3/2} M^{-1/2}$.

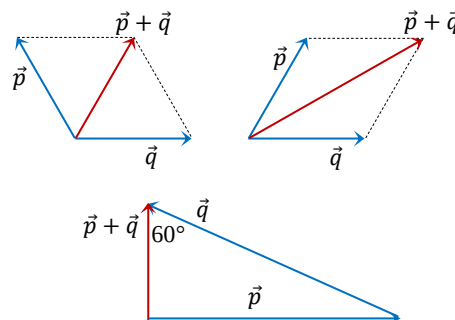
(13) È ancora 5. Il vettore $-\vec{p}$ differisce dal vettore $\vec{p}$ unicamente per il fatto di avere direzione opposta.

(14) Vero: il segno meno davanti al simbolo di un vettore $\vec{k}$ indica semplicemente che si considera il vettore opposto a $\vec{k}$ (modulo uguale, direzione contraria).

(15) Falso: non è affatto detto che tutto ciò di cui si misura la lunghezza abbia una precisa direzione (si pensi ad esempio alla lunghezza di una circonferenza, o di un percorso automobilistico). In ogni caso, le lunghezze si sommano *senza dover tenere conto della direzione* (si pensi al calcolo del perimetro di un poligono): **per ciò stesso si tratta di grandezze scalari.**

(16) L'angolo tra due vettori è l'angolo di cui uno dei due dovrebbe ruotare per portarsi *per la via più breve* ad assumere la direzione dell'altro. Dunque tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ci sono 60° , tra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ 120° , tra $\vec{c}$ e $\vec{a}$ 60° .

(17) 120° , si veda la figura (attenzione, *non* 60° : se l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$ fosse 60° , il modulo di $\vec{p} + \vec{q}$ sarebbe $|\vec{p}|\sqrt{3}$, come si trova facilmente anche con metodi di geometria elementare).



(18) (a) 60° (vedi figura).

(b) 150° (ognuno dei due vettori deve ruotare di 150° per assumere la direzione dell'altro).

(19) Vero: la relazione $\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$ stabilisce che i tre vettori formano un triangolo, la relazione $p^2 + q^2 = k^2$ significa (Pitagora) che $\vec{k}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

(20) La situazione è rappresentata in fig. 21: la velocità $\vec{v}$ della barca è la somma vettoriale della velocità $\vec{V}$ dell'acqua e della velocità $\vec{v}'$ della barca rispetto all'acqua (vale a dire, della velocità $\vec{v}'$ che la barca avrebbe qualora l'acqua fosse immobile): $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$. Per il teorema di Carnot è

$$v = \sqrt{v'^2 + V^2 - 2v'V \cos 65^\circ} = \sqrt{18^2 + 3^2 - 2 \times 18 \times 3 \times 0,423} \text{ km/h, da cui } v = 17,0 \text{ km/h.}$$

Per il teorema dei seni è $(\sin \varphi)/V = (\sin 65^\circ)/v$, perciò $\sin \varphi = (\sin 65^\circ) V/v = 0,906 \times 3/17,0 = 0,160$, che significa $\varphi = 9,20^\circ$.

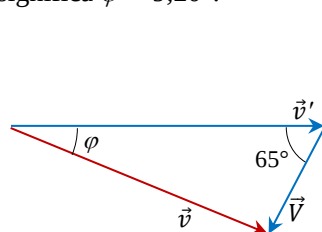


Fig. 21

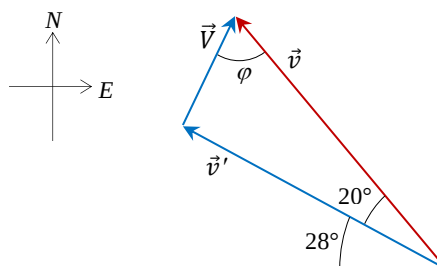


Fig. 22

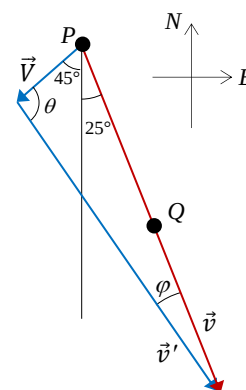
(21) La situazione è rappresentata in fig. 22. Per il teorema di Carnot risulta

$V = \sqrt{v'^2 + v^2 - 2v'v \cos 20^\circ} = \sqrt{20^2 + 25^2 - 2 \times 20 \times 25 \times 0,940} \text{ km/h} = 9,24 \text{ km/h}$. Per il teorema dei seni è $\sin \varphi / v' = \sin 20^\circ / V$, dunque $\sin \varphi = (\sin 20^\circ) v' / V = 0,342 \times 20 / 9,24 = 0,7403$, che significa $\varphi = 47,8^\circ$. La direzione di $\vec{V}$ (che si ottiene da quella di $\vec{v}$ mediante rotazione oraria di $47,9^\circ$) è quindi $W (28^\circ + 20^\circ + 47,8^\circ) N = W 95,8^\circ N = N 5,8^\circ E$.

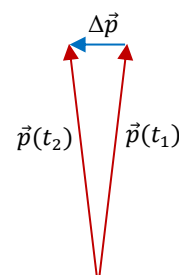
(22) La somma del vettore $\vec{V}$ (velocità del vento, nota in valore e direzione) e del vettore $\vec{v}'$ (velocità dell'aereo rispetto all'aria, nota in valore) deve dare un vettore $\vec{v}$ (velocità dell'aereo rispetto al suolo) diretto da P verso Q (figura).

Per il teorema dei seni, $\frac{\sin \varphi}{V} = \frac{\sin(45^\circ + 25^\circ)}{v'}$, vale a dire $\sin \varphi = (\sin 70^\circ) V / v' = 0,940 \times 40 / 250 = 0,150$, da cui $\varphi = 8,65^\circ$. Ciò significa che la direzione in cui deve puntare l'aereo (che si ottiene da quella di $\vec{v}$ ruotando in senso antiorario di $8,65^\circ$) è $S (25 + 8,65)^\circ E = S 33,7^\circ E$.

Essendo $v = \sqrt{v'^2 + V^2 - 2v'V \cos \theta}$ (dove $\theta = 180^\circ - 70^\circ - 8,65^\circ = 101^\circ$) si ottiene $v = \sqrt{250^2 + 40^2 - 2 \times 250 \times 40 \times (-0,191)} \text{ km/h} = 261 \text{ km/h}$.



(23) Sì: la derivata del modulo di $\vec{p}$ misura solo la rapidità con cui il vettore $\vec{p}$ si sta allungando o accorciando, la derivata del vettore $\vec{p}$ tiene invece conto anche delle variazioni che $\vec{p}$ subisce a seguito di un cambio di direzione. Ad esempio, per un vettore di modulo costante ma direzione variabile la derivata del modulo è zero, ma non è zero la derivata temporale del vettore perché non è zero l'incremento $d\vec{p}$ subito da $\vec{p}$ durante l'intervallo di tempo dt . In figura, l'incremento $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$ subito da $\vec{p}$ tra t_1 e t_2 è diverso da zero anche se il modulo di $\vec{p}$ non ha subito variazioni.



→ **Il modulo della variazione e la variazione del modulo non sono la stessa cosa. E lo stesso, chiaramente, per il modulo della derivata e per la derivata del modulo.**

Si pensi per esempio a un moto uniforme su traiettoria curvilinea. La derivata temporale del modulo del vettore velocità è zero, il modulo della derivata temporale del vettore velocità è il modulo del vettore accelerazione (in questo caso, accelerazione centripeta v^2/r):

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0, \quad \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = |\vec{a}| = v^2/r.$$

[24] Falso: rappresenta un numero (il quadrato del modulo di $\vec{p}$).

[25] Falso: rappresenta il prodotto del numero $\vec{k} \cdot \vec{c}$ per il vettore $\vec{q}$.

[26] Vero: è il prodotto scalare tra un vettore ($\vec{p}$) e un numero ($\vec{f} \cdot \vec{q}$). Tale operazione non esiste.

[27] Falso: la relazione $(\vec{p} \cdot \vec{q}) \times (\vec{p} \cdot \vec{k})$ non ha senso, perché indica il prodotto vettoriale tra due numeri.

[28] Falso: si ottiene una grandezza scalare. Ad esempio, il prodotto scalare tra una forza costante e lo spostamento del relativo punto d'applicazione rappresenta il lavoro compiuto dalla forza.

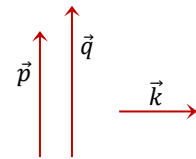
[29] Falso: ad esempio, nella relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ compare il prodotto della grandezza scalare *massa* per la grandezza vettoriale *accelerazione*, nella relazione $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (forza magnetica su una carica elettrica q) compare il prodotto della grandezza scalare *carica elettrica* per la grandezza vettoriale *velocità*.

Altri esempi: nella relazione $q = it$ (carica elettrica uguale a intensità di corrente per tempo) compare il prodotto tra le due grandezze scalari intensità di corrente e tempo. Oppure, massa totale uguale a densità media per volume: $M = \rho V$. O ancora, volume cilindro uguale a area di base per altezza: $V = Ah$.

(30) Falso, non avrebbe senso effettuare prima il prodotto scalare, il vettore $\vec{p}$ verrebbe moltiplicato vettorialmente per un numero.

(31) Vero, il risultato sarebbe in generale diverso.

Nel caso per esempio della figura, facendo prima il primo prodotto si ottiene zero, facendo prima il secondo prodotto si ottiene un vettore diretto in senso opposto a $\vec{k}$.



(32) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.4, “Se l’energia è superiore alla forza”]

È probabile che lo studente nemmeno se ne renda conto, e non subisca quindi particolari traumi: meglio così, perché l’impresa alla quale viene qui chiamato – quella di confrontare un’energia con una forza (o forse, non è molto chiaro, con la somma di una forza con un’energia) – è disperata. Sarebbe come confrontare una velocità con una temperatura, oppure come sommare una lunghezza con un’accelerazione: nessuno al mondo, che io sappia, ha mai osato tanto (tranne forse l’Autore di un testo di geografia generale, il quale, a proposito delle onde del mare, sostiene che «l’altezza dell’onda è pari alla metà della velocità del vento»; oppure gli Autori di un testo di chimica, a detta dei quali «la carica elettrica dell’elettrone risulta, rispetto alla massa, 10^9 volte più grande»). Così, nelle prime pagine di qualsiasi testo di fisica allo studente viene chiaramente fatto capire che, se rinuncerà in futuro al tentativo di confrontare o sommare grandezze eterogenee, sarà meglio per tutti.

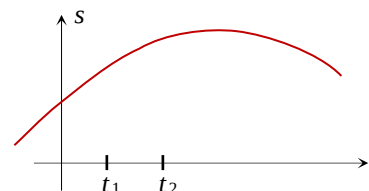
Il che non toglie che relazioni matematiche dimensionalmente scorrette si possano trovare anche tra le righe di testi scientifici di livello universitario: ad esempio, in un manuale di elettromagnetismo per ingegneria e fisica si può leggere che «la forza elettrica [...] compirà un lavoro dato da $dL = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ »...

(continua)

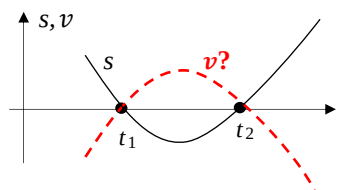
ESERCITAZIONE N.2

CINEMATICA SCALARE E VETTORIALE
CINEMATICA RELATIVA

(1) Con riferimento al moto di un punto lungo una traiettoria generica, e supposto che le due variabili s (posizione) e t (tempo) si corrispondano come mostrato nel diagramma orario qui a lato, si stabilisca se il punto mobile è più veloce all'istante t_1 oppure all'istante t_2 .

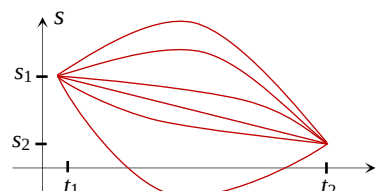


(2) Si stabilisca se è possibile che, nel diagramma a lato, dove la linea continua (in nero) mostra come varia la posizione s in funzione di t , la linea a tratteggio (in rosso) rappresenti la velocità.

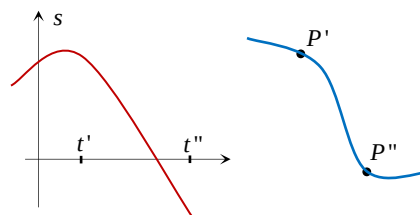


(3) Esiste in fisica un'accelerazione negativa? Spiegare.

(4) Si considerino le sei linee orarie della figura a lato (sei possibili modalità di movimento su traiettoria incognita): per quale (o quali) di esse la lunghezza del percorso effettuato dal punto mobile è superiore alla lunghezza dell'arco di traiettoria compreso tra posizione iniziale e posizione finale?



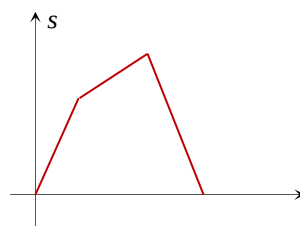
(5) Il diagramma orario della figura a lato si riferisce alla modalità di percorrenza della traiettoria aperta rappresentata in figura (linea rossa): P' è la posizione all'istante t' , P'' è la posizione all'istante t'' . Che cosa si può dire circa la posizione di riferimento R sulla traiettoria? Com'è orientata la traiettoria?



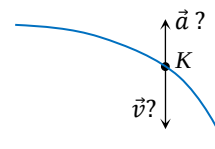
(6) Nei testi di fisica della scuola preuniversitaria vengono spesso proposti problemi relativi a grafici spazio-tempo del tipo mostrato qui a lato.

(a) Grafici di questo genere contengono in realtà qualcosa di assurdo: che cosa?

(b) E se in ordinate ci fosse non la distanza s ma la velocità, sarebbe accettabile il grafico?



(7) La figura a lato mostra la traiettoria percorsa da un punto K . È possibile che i due vettori abbiano il significato suggerito in figura?

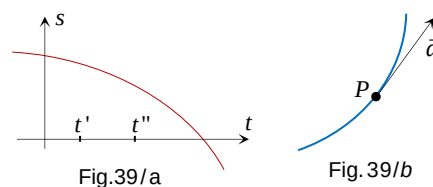


(8) È impossibile che, nel moto di un punto, il vettore velocità e il vettore accelerazione si mantengano costantemente perpendicolari l'uno all'altro (*vero/falso*).

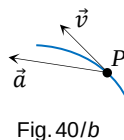
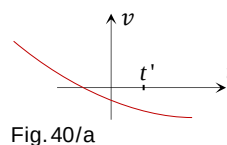
(9) La traiettoria di un punto che si muove di moto uniforme può avere una forma qualsiasi (*vero/falso*).

(10) Dire che l'accelerazione scalare è positiva equivale a dire che il vettore accelerazione tangenziale è diretto come il vettore velocità (*vero/falso*).

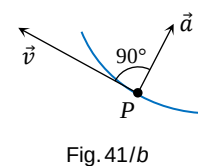
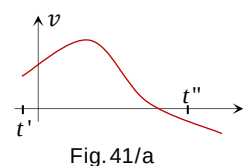
(11) Si chiarisca se è possibile che nell'intervallo di tempo tra t' e t'' (diagramma orario di fig. 39/a) si verifichi per il punto P la situazione rappresentata in fig. 39/b.



- (12) Si chiarisca se è possibile che all'istante t' (fig. 40/a) si verifichi per il punto P la situazione rappresentata in fig. 40/b.



- (13) Si chiarisca se è possibile che nell'intervallo di tempo tra t' e t'' (fig. 41/a) si verifichi per il punto P la situazione rappresentata in fig. 41/b.



- (14) Dato che l'accelerazione $\vec{g}$ di gravità ha modulo $9,8 \text{ m/s}^2$, l'accelerazione scalare di un punto materiale soggetto solo al proprio peso può valere solo $\pm 9,8 \text{ m/s}^2$ (vero/falso).

- (15) Un punto si muove con equazione oraria $s = 3 - 3t^2$ (unità CGS).

- (a) Si chiarisca se due secondi prima dell'istante zero l'angolo tra i vettori velocità e accelerazione è acuto, oppure retto, oppure ottuso.
(b) Si determini il modulo del vettore accelerazione in tale istante, assumendo che il raggio di curvatura sia $r = 18 \text{ cm}$.

- (16) A un dato istante, la velocità $\vec{v}$ del punto K e la sua accelerazione $\vec{a}$ formano un angolo di 100° : che cosa sta accadendo della velocità di K?

- (17) È impossibile che, nel moto di un punto, i vettori velocità e accelerazione si mantengano costantemente perpendicolari l'uno all'altro (vero/falso).

- (18) Condizione necessaria e sufficiente perché il valore dell'accelerazione vettoriale sia zero, è che sia zero il valore dell'accelerazione scalare (vero/falso).

- (19) Il fatto che l'accelerazione di gravità abbia, sulla superficie terrestre, valore $9,81 \text{ m/s}^2$, ha questa conseguenza: se un corpo venisse lanciato in assenza d'aria, il valore della sua velocità varierebbe di $9,81 \text{ m/s}$ ad ogni secondo, indipendentemente dalla direzione di lancio (vero/falso).

- (20) Un sasso è stato lanciato in aria. Durante un intervallo di tempo di 1 s , lo spostamento orizzontale è stato di 15 m verso Est, lo spostamento verticale di 2 m verso l'alto. Supponendo influente la presenza d'aria, determinare lo spostamento subito dal sasso durante il secondo immediatamente precedente e durante il secondo immediatamente successivo.

- (21) In quale direzione occorrerebbe mirare per colpire un bersaglio sospeso a un filo, sapendo che, all'istante stesso in cui parte il colpo, il filo viene tagliato?

- (22) Un punto P oscilla di moto armonico tra A e B , con centro in O . Sia H il punto medio del segmento AO : senza utilizzare le equazioni del moto armonico, si trovi quale frazione del periodo T è necessaria a P per spostarsi da un estremo all'altro, da un estremo al centro O , da A ad H , da H ad O .

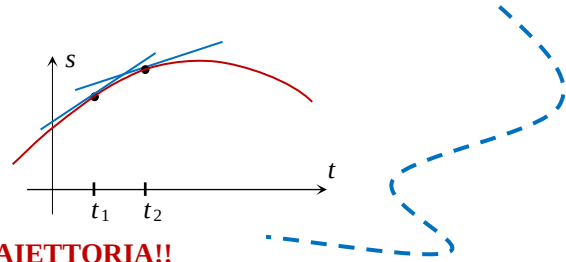
- (23) Un punto P percorre di moto uniforme, con velocità $v = 9 \text{ cm/s}$, una traiettoria sinusoidale. H è il punto che si ottiene proiettando P sull'asse della sinusoide, K è il punto che si ottiene proiettando P su una retta perpendicolare all'asse della sinusoide. Si chiarisca: (a) se H si muove di moto uniforme, (b) se K si muove di moto armonico.

- (24) Citazione: «Un corpo ha solo due possibilità di movimento. Può o traslare o ruotare. L'atto di moto di pura traslazione è costituito da uno spostamento che avviene in linea retta. L'atto di moto di pura rotazione è uno spostamento che avviene lungo una circonferenza» (testo di fisica per i licei).

Dov'è l'errore?

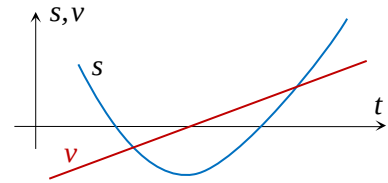
SOLUZIONI

(1) All'istante t_1 . La derivata temporale (= pendenza della tangente alla curva oraria) è maggiore. Nota bene: *nulla si sa circa la forma della traiettoria*. Potrebbe per esempio essere la linea a tratteggio del disegno.

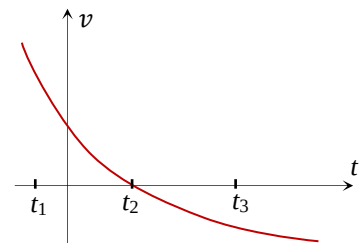


NON SI CONFONDA LINEA ORARIA CON TRAIETTORIA!!

(2) No, non è possibile: non c'è nessuna corrispondenza. Per esempio, nei due istanti in cui il grafico delle velocità dà un valore nullo, la pendenza del grafico delle distanze s è diversa da zero; subito dopo il primo di tali istanti la velocità assume valori positivi, mentre la pendenza del grafico delle distanze è negativa; nell'istante in cui il grafico delle distanze ha pendenza zero il grafico delle velocità indica un valore diverso da zero... e così via. Il grafico delle velocità potrebbe invece essere rappresentato da una retta a pendenza positiva (figura a lato), che interseca l'asse dei tempi nell'istante in cui la distanza x assume il massimo valore negativo.



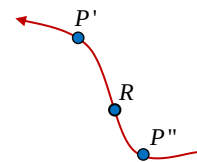
(3) Se si parla di accelerazione negativa ci si riferisce ovviamente all'accelerazione scalare (un vettore non è *mai* negativo). E allora accelerazione negativa significa semplicemente pendenza negativa nel diagramma che dà la velocità scalare (pendenza del diagramma orario) in funzione del tempo: quindi velocità positiva in diminuzione, come nell'istante t_1 in figura, ma anche (istante t_2) velocità zero, subito prima positiva e subito dopo negativa (il punto mobile sta invertendo senso di marcia), oppure ancora (istante t_3) velocità negativa con valore assoluto in aumento.



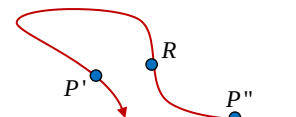
Da Tonzig - *Semplicemente fisica*, cap.1 ("Le parole della fisica"). Il termine 'decelerazione', usato nel linguaggio corrente come sinonimo di rallentamento, in fisica è una parolaccia che, per quanto espressiva, *non dovrebbe essere usata*: in fisica, gli effetti prodotti da una forza sul moto di un punto si chiamano in ogni caso 'accelerazione': **un punto che nel linguaggio corrente 'decelera', in fisica, piaccia o no, accelera**. Ma soprattutto, 'decelerazione' non deve essere usato in fisica come sinonimo di accelerazione negativa, sarebbe un errore vero e proprio: si considerino in figura gli istanti t_2 e t_3 (nessun rallentamento).

(4) Per le prime due dall'alto e per la prima dal basso. Le prime due mostrano che il punto mobile procede prima in avanti (s positiva in aumento) e poi all'indietro, compiendo quindi un tragitto più lungo del necessario. Analogamente, la prima dal basso mostra che il punto mobile procede prima all'indietro e poi in avanti. Le altre tre linee mostrano invece che, nell'intervallo di tempo considerato, il punto mobile procede sempre e solo all'indietro.

(5) Il fatto che (vedi diagramma orario) s' sia positiva ed s'' negativa significa che P' si trova sul ramo positivo della traiettoria, e P'' sul ramo negativo: quindi R è tra P' e P'' (più vicino a P'' , perché la distanza s'' è, in valore assoluto, inferiore a s'). La traiettoria è orientata da P' (che si trova sul ramo negativo) verso P'' (ramo positivo). Ovvero: da t' a t'' la velocità è sempre negativa, procedendo da P' e P'' il punto mobile procede in senso contrario a quello della traiettoria.



→ La situazione potrebbe anche essere quella della figura qui a destra. Si noti che in questo caso il valore assoluto della distanza s (quella che figura nel diagramma orario e nell'equazione oraria) è minore per P'' che per P' , anche se in questo caso la distanza in linea d'aria è minore per P' .



(6) (a) Il grafico distanza-tempo non può presentare punti angolosi (= a doppia tangente): il cambiamento istantaneo, e non graduale, della pendenza, corrisponde a un cambiamento istantaneo, e non graduale, del valore della velocità, e dunque corrisponde a un'accelerazione infinitamente grande.

(b) Il grafico potrebbe andar bene: un cambiamento istantaneo della pendenza corrisponderebbe a un cambiamento istantaneo dell'accelerazione, conseguenza ($\vec{F} = m\vec{a}$) di un cambiamento improvviso (sempre possibile) della forza applicata.

(7) No. Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria. Il vettore accelerazione è sempre rivolto verso l'interno della curva (essendo l'accelerazione normale sempre "centripeta", cioè sempre diretta verso il centro di curvatura).

(8) Falso. In qualsiasi moto uniforme l'accelerazione tangenziale è zero: se la traiettoria è curvilinea, l'accelerazione è sempre perpendicolare alla velocità.

(9) Falso: la traiettoria non deve presentare angolosità. In un punto angoloso è zero il raggio di curvatura, e quindi deve essere zero anche la velocità, altrimenti il valore v^2/r dell'accelerazione centripeta diventa infinito.

(10) Falso: se l'accelerazione tangenziale è diretta come $\vec{v}$, la velocità (valore assoluto) è in aumento, mentre invece l'accelerazione scalare risulta positiva anche quando il punto mobile procede con velocità negativa e sta rallentando (pendenza positiva nel grafico v, t).

(11) Impossibile. La seconda figura mostra che il vettore accelerazione è diretto tangenzialmente: manca quindi il componente centripeto, pur essendo curvilinea la traiettoria. Questo richiede che sia zero la velocità, il che non si verifica mai nell'intervallo di tempo tra t' e t'' .

(12) È possibile, perché nella seconda figura l'angolo tra velocità e accelerazione è acuto, il che significa che il punto mobile sta «prendendo velocità»: proprio quello che si verifica all'istante t' (valore assoluto della velocità in aumento).

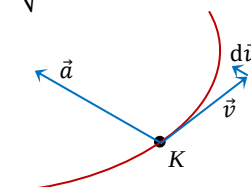
(13) Sì, ma solo nell'istante in cui la velocità raggiunge il massimo valore, e quindi è zero la pendenza del grafico v, t . La seconda figura indica infatti che, essendo $\vec{a}$ e $\vec{v}$ perpendicolari, non c'è accelerazione tangenziale (ed è quindi zero anche l'accelerazione scalare).

(14) Vero solo per traiettorie verticali. Per un sasso lanciato nel vuoto in direzione obliqua, il vettore accelerazione ha modulo $9,8 \text{ m/s}^2$, ma il suo componente tangenziale ha modulo inferiore (cosicché risulta inferiore a $9,8 \text{ m/s}^2$ il valore assoluto dell'accelerazione scalare).

(15) (a) Il moto è uniformemente vario, la relazione tra v e t è $v = -6t$. Per $t = -2 \text{ s}$ risulta $v = 12 \text{ cm/s}$. Essendo positiva la velocità e negativa l'accelerazione (scalare), il valore di v sta diminuendo: dunque il componente tangenziale dell'accelerazione è diretto in senso opposto a $\vec{v}$, il che significa che l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{a}$ è maggiore di 90° .

(b) Il componente tangenziale di $\vec{a}$ ha modulo costante 6 cm/s^2 . Il componente centripeto ha modulo $v^2/r = (12^2 \text{ cm}^2/\text{s}^2) / (18 \text{ cm}) = 8 \text{ cm/s}^2$. Il modulo dell'accelerazione è $a = \sqrt{a_{tg}^2 + a_n^2} = 10 \text{ cm/s}^2$.

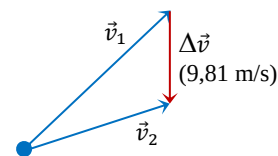
(16) L'accelerazione di K ha sia un componente tangenziale (controverso alla velocità, velocità quindi in diminuzione) che un componente trasversale (vettore $\vec{v}$ in rotazione verso il vettore $\vec{a}$). In figura, il vettore $\vec{v}$ sta subendo l'incremento $d\vec{v} = \vec{a} dt$.



(17) Falso. In un qualsiasi moto uniforme l'accelerazione tangenziale è zero: se la traiettoria è curvilinea, l'accelerazione è sempre perpendicolare alla velocità.

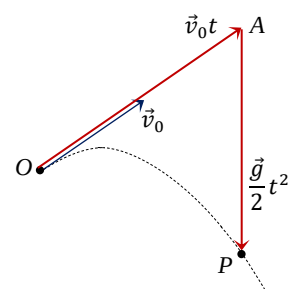
(18) Falso: la condizione è necessaria (perché se non è zero l'accelerazione scalare non è zero l'accelerazione tangenziale, e quindi non può essere zero il vettore $\vec{a}$) ma **non è sufficiente**: potrebbe infatti essere diversa da zero l'accelerazione centripeta. Esempio: moto circolare uniforme.

(19) Falso. Questo avverrebbe **solo in caso di traiettoria verticale**. Più in generale, $9,81 \text{ m/s}$ è il modulo del vettore verticale $\Delta\vec{v}$ (figura) che bisogna aggiungere a una generica velocità $\vec{v}_1$ per ottenere la velocità $\vec{v}_2$ che si verifica 1 s più tardi.



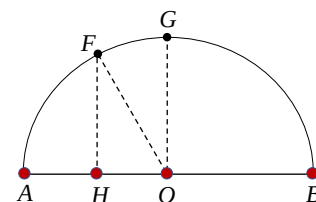
(20) Lo spostamento orizzontale è di 15 m in un secondo verso Est, costante. Lo spostamento verticale è stato di $(2 + 9,8) \text{ m} = 11,8 \text{ m}$ verso l'alto nel secondo precedente, e di $(2 - 9,8) \text{ m} = -7,8 \text{ m}$ verso l'alto (quindi $7,8 \text{ m}$ verso il basso) nel secondo successivo.

(21) **Esattamente in direzione del bersaglio.** Sia infatti O (figura) la posizione iniziale del proiettile, sia A la posizione iniziale del bersaglio, e imponiamo che il bersaglio e il proiettile si trovino a un dato istante in una

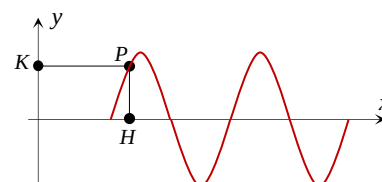


stessa posizione P . Con riferimento al moto del proiettile, la posizione di P rispetto a O è $\vec{OP} = \vec{v}_0 t + (\vec{g}/2)t^2$. Con riferimento al moto del bersaglio, la posizione di P rispetto a O è $\vec{OP} = \vec{OA} + (\vec{g}/2)t^2$. Per confronto tra le due espressioni di $\vec{OP}$ otteniamo $\vec{v}_0 t = \vec{OA}$, il che significa che la velocità iniziale $\vec{v}_0$ del proiettile è diretta da O verso A . Si noti che in tal caso il bersaglio viene raggiunto per *qualsiasi* valore di $\vec{v}_0$ (in un tempo $t = OA/v_0$ inversamente proporzionale a v_0 , e a una distanza $gt^2/2$, direttamente proporzionale al quadrato di t e quindi inversamente proporzionale al quadrato di v_0 , dalla sua posizione iniziale A).

(22) Da A a B (figura) mezzo periodo, da A a O un quarto di periodo, da A ad H un sesto di periodo (il punto immaginario rotante di moto uniforme, da cui P si può pensare ottenuto per proiezione, deve portarsi da A ad F , con uno spostamento angolare di 60°), da H a O un dodicesimo di periodo (il punto rotante deve subire uno spostamento angolare di 30°).



(23) (a) Il moto di H (figura) **non è uniforme**: la sua velocità è il componente x di un vettore velocità di modulo costante ma direzione variabile. Quando P è sull'asse della sinusoide, la velocità di H è minima. Quando P è alla massima distanza dall'asse della sinusoide, la velocità di H è massima (9 cm/s).



(b) Il moto di K **non è armonico**. Lo sarebbe se la sinusoide percorsa da P venisse modificata sostituendo gli archi di sinusoide posti al di sopra e al di sotto dell'asse con altrettante semicirconferenze.

(24) [Da Tonzig – 100 errori di fisica – cap.5 (“Due sole possibilità”)]

...Ma il punto vero è un altro. Il punto è che la traslazione di un corpo K *non implica assolutamente che i suoi punti si spostino in linea retta*. ‘Traslazione’ significa solo che K si muove mantenendosi parallelo a sé stesso: cioè, presi ad arbitrio due punti di K , la retta che li congiunge si sposta senza mai cambiare direzione. Conseguentemente, tutti i punti di K hanno, in un dato istante, uguale velocità e uguale accelerazione, tutti i punti di K subiscono nello stesso intervallo di tempo spostamenti identici, tutti i punti di K descrivono traiettorie identiche. Di quale forma? *Una forma qualsiasi*. Potrebbero essere rette, ma anche parabole, ellissi, sinusoidi, spirali, e via dicendo. Così, il fatto che i punti di un corpo K si spostino lungo circonferenze non implica assolutamente che il movimento di K debba essere rotatorio: potrebbe benissimo essere un moto di traslazione (si pensi ad esempio al movimento all’indietro del pedale di una bicicletta ferma, supponendo che si mantenga sempre parallelo al terreno)^[1].

Ma c’è ancora una possibilità: anzi, parecchie. Una vite che gira su sé stessa penetrando nel legno, che fa? Fa una cosa complicata: ruota e trasla al tempo stesso. Nel senso che il suo movimento, che non è né traslatorio né rotatorio, può essere descritto come una combinazione, o sovrapposizione, di due moti componenti, uno di traslazione e uno di rotazione^[2]. Lo stesso si può dire per le ruote di un’automobile che proceda in linea retta: solo che in questo caso la rotazione avviene attorno a un asse che non è parallelo, ma perpendicolare alla direzione di traslazione. Per una trottola invece è diverso. Nella migliore delle ipotesi, il movimento di una trottola è la combinazione di due rotazioni: quella della trottola attorno al proprio asse geometrico, e quella dell’asse attorno alla verticale condotta per il punto d’appoggio (moto di ‘precessione’). Se però, come in pratica succede, mentre la trottola gira il punto d’appoggio si sposta, la faccenda si complica, perché nella combinazione entra anche un moto di traslazione con la velocità del punto d’appoggio. E non è ancora finita, perché l’angolo di inclinazione dell’asse della trottola rispetto alla verticale non resta costante, ma oscilla tra un minimo e un massimo (moto di ‘nutazione’).

Che dire, a questo punto? L’Autore concede ai corpi rigidi «solo due possibilità di movimento»: chi non trasla in linea retta, ruota, o se no sta fermo. Be’, forse è troppo severo.

¹ Si noti che un moto traslatorio circolare è ben diverso da un moto di rotazione. Nel primo caso tutti i punti descrivono circonferenze di raggio uguale attorno ad assi paralleli, mentre nel secondo caso le traiettorie sono circonferenze coassiali di raggio diverso.

² Così, la velocità di un suo punto P corrisponde alla somma (vettoriale) di due velocità, quella che spetta a P nel moto componente traslatorio e quella che spetta a P nel moto componente rotatorio.

ESERCITAZIONE N.3

I PRINCIPI DI NEWTON

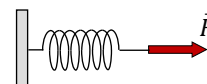
RIFERIMENTI INERZIALI

- (1/a) Che cos'è un osservatore (un riferimento) inerziale?
 (1/b) Che giudizio dà un osservatore inerziale sul movimento degli altri osservatori inerziali?
 (1/c) Qual è il classico esempio di riferimento inerziale?
 (1/d) La Terra è un riferimento inerziale?
 (1/e) Un sistema fisico del tutto isolato sarebbe sicuramente un riferimento inerziale (*vero/falso*).

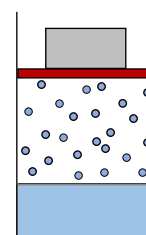
KILOGRAMMO

(2) Che cosa si ottiene dividendo 1 kgf per 1 kg (l'unità pratica di forza per l'unità internazionale di massa)?

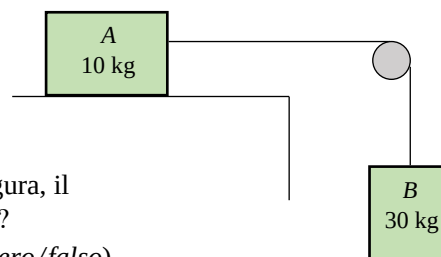
(3) In un testo universitario di fisica generale (probabilmente il più adottato in Italia) si possono leggere, a proposito della forza elastica proveniente da una molla sottoposta a deformazione, le seguenti parole: «Se vogliamo mantenere costante la deformazione... la nostra mano deve applicare alla molla una forza uguale e opposta alla forza che la molla esercita sulla mano». Commentare.



(4) Altro esempio di non-comprensione (!!!) del terzo principio (da un manuale universitario di termodinamica): «L'equilibrio meccanico del pistone richiede che la forza esercitata verso il basso dal pistone sul gas sottostante sia esattamente equilibrata dalla forza che il gas esercita verso l'alto sul pistone.» Qual è l'errore?

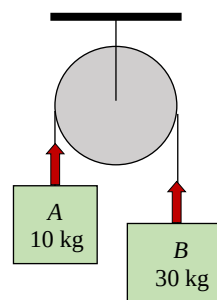


(5) Un blocco A di massa 10 kg, posto su un piano orizzontale sul quale può scivolare **senza attrito**, è collegato mediante un filo a un blocco B di massa 30 kg. Il filo, **privo di massa e inestensibile**, può scivolare **senza attrito** nella gola di una puleggia; il blocco B è sospeso al filo.



- (a) Possiamo escludere che, nella situazione rappresentata in figura, il blocco A stia viaggiando verso sinistra e il blocco B verso l'alto?
 (b) Il filo tira il blocco A verso destra con una forza di 30 kgf (*vero/falso*).

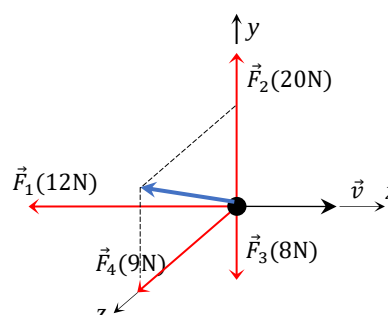
(6) Con riferimento alla situazione rappresentata in figura, possiamo affermare (*vero/falso*) che la puleggia è tirata verso il basso, oltre che dal proprio peso, da una forza di 40 kgf.



7) Un punto materiale K di **massa m**, che viaggia a un dato istante con **velocità v** in direzione x, è soggetto (figura)

- a una forza $\vec{F}_1$ di valore 12 N parallela e controversa all'asse x,
- a una forza $\vec{F}_2$ di valore 20 N diretta come l'asse y,
- a una forza $\vec{F}_3$ di valore 8 N diretta in senso opposto all'asse y,
- a una forza $\vec{F}_4$ di valore 9 N diretta come l'asse z. Sapendo che non agiscono altre forze,

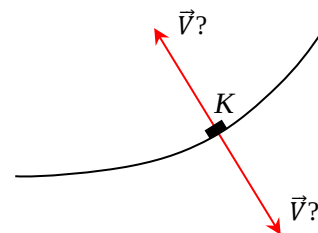
- (a) Si determini valore e direzione della forza centripeta
 (b) Si individui la posizione del centro di curvatura.



(8) Pendolo semplice: pallina di massa m che oscilla appesa a un filo di lunghezza L . Si spieghi come potrebbe essere calcolata la forza che la pallina esercita sul filo:

- (a) quando passa dalla posizione di equilibrio con velocità v ,
- (b) quando si trova alla massima distanza dalla posizione di equilibrio.

(9) Un blocchetto K è vincolato a muoversi in un piano verticale lungo una linea curva L : agiscono solo il peso e la reazione $\vec{V}$ del vincolo, perpendicolare alla velocità di K per l'assenza di attrito. Considerando sia il caso di concavità verso l'alto (disegno a lato) che il caso di concavità verso il basso, si chiarisca **in quale dei due sensi possibili è diretta la reazione del vincolo. È importante, ai fini della risposta, la direzione di marcia?**

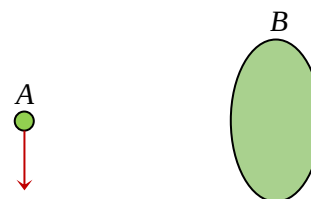


LEGGE DI AZIONE E REAZIONE

(10/a) Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, questo lo sa dire anche lo studente più disamorato della fisica. Ma... si renderà conto di quanto sta dicendo? Forse no, se è vero che quasi mai trova da ridire sul seguente ragionamento: quando un libro è appoggiato sul tavolo, la forza che il tavolo esercita verso l'alto sul libro è uguale in valore al peso del libro «per il principio di azione e reazione». Che corrisponde a dire: per il principio di azione e reazione, la forza che A (il tavolo) esercita su B (il libro) è uguale in valore alla forza che C (la Terra) esercita su B (il peso di B). Il discorso da fare è un po' diverso... (vedi alla risposta 11).

(10/b) Vale sempre?

(10/c) Dalla legge di azione e reazione e dalla conservazione del momento angolare (da cui deriva la regola che azione e reazione sono sempre sulla stessa retta d'azione) deriva anche (*vero/falso*) che, a meno di effetti relativistici, «l'interazione tra corpi può essere solo attrattiva oppure repulsiva»: è cioè impossibile che la forza che l'oggetto B (figura) esercita sull'oggetto A sia rappresentata dalla freccia.



(11) Citazione: «Se su un corpo agisce una forza $\vec{F}$ e questo è in equilibrio, deve necessariamente agire sul corpo una forza $-\vec{F}$ uguale in modulo e direzione e contraria in verso. Rivediamo cioè in azione il terzo principio della dinamica» (*testo di fisica per i licei scientifici*). Dov'è l'errore?

(12) Se, nel problemino dei due blocchi sospesi qui proposto al punto (6), sostituiamo uno dei blocchi con una scimmia che si tiene aggrappata alla corda, abbiamo un problemino che, proposto in prima battuta da Lewis Carrol (autore a tempo perso di fiabe come *Alice nel paese delle meraviglie*), da un paio di secoli a questa parte ha tolto il sonno, e continua a toglierlo, a uno stuolo di esseri pensanti. La domanda è: come cambia la posizione della scimmia, e come cambia quella del contrappeso, se a un certo punto, a partire da una situazione iniziale di quiete, la scimmia comincia ad arrampicarsi sulla corda? Chiaramente, la situazione viene fortemente idealizzata, altrimenti la soluzione non è univoca: la corda ha massa trascurabile, ed è trascurabile l'attrito che ne contrasta lo scorrimento nella gola della puleggia.



SOLUZIONI

(1/a) Un osservatore rispetto al quale è valida la legge d'inerzia (e tutte le leggi della fisica nella forma che noi diamo alle leggi della fisica).

(1/b) Moto traslatorio, rettilineo e uniforme.

(1/c) Il cielo delle stelle fisse (= il cielo delle costellazioni).

(1/d) No. L'osservatore terrestre vede il firmamento ruotare attorno all'asse di rotazione terrestre ($\rightarrow$ nell'emisfero Nord in sensi antiorario attorno alla Stella Polare). L'osservatore terrestre vede gli effetti di forze apparenti di trascinamento e di Coriolis. Per esempio, ai Poli vede che il piano di oscillazione del pendolo ruota di $15^\circ/\text{h}$ (360° nelle 24 h). A Milano sarebbero $11^\circ/\text{h}$ (264° al giorno), a Palermo $9^\circ/\text{h}$, all'equatore nessuna rotazione.

(1/e) Falso. Prima di tutto dovrebbe trattarsi di un sistema rigido (ogni parte del sistema immobile rispetto a tutte le altre), altrimenti non avrebbe senso parlare di "terna cartesiana rigidamente collegata al sistema". Ma rispetto ai riferimenti inerziali un corpo rigido libero non si muove in genere 'nel modo giusto': il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, il resto del corpo ruota attorno a un asse che passa dal centro di massa (con modalità tali da conservare il momento della quantità di moto = momento angolare).

(2) Stiamo dividendo una forza per una massa, dunque ($F = ma$) otteniamo un'accelerazione. Quale accelerazione? Quella prodotta da una forza di 1kgf quando è applicata alla massa di 1 kg.

Concetto di kgf: è il peso di un corpo di massa 1 kg sulla superficie della Terra. Più esattamente: è la forza che applicata a un punto di massa 1 kg produrrebbe l'accelerazione di $9,81 \text{ m/s}^2$ ($9,80665$, accelerazione di gravità campione).

Dunque $1 \text{ kgf} / 1 \text{ kg} \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, **il rapporto tra 1 kgf e 1 kg è uguale a un'accelerazione di $\approx 9,81 \text{ m/s}^2$** (la indichiamo spesso con g_0 , o più semplicemente, se non ci sono in gioco variazioni dell'accelerazione di gravità con l'altitudine, come qui nel seguito, con g).

$\rightarrow$ **Applicando a un blocco di massa $x \text{ kg}$ la forza di $x \text{ kgf}$ si produce un'accelerazione uguale a g .**

Se la massa fosse $x \text{ kg}$ e la forza $2x \text{ kgf}$, l'accelerazione sarebbe $2g$.

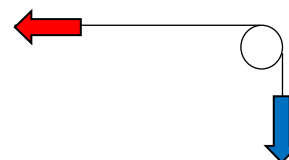
Se la massa fosse $x \text{ kg}$ e la forza fosse $x/3 \text{ kgf}$, l'accelerazione sarebbe $g/3$.

(3) La frase è sbagliata: la forza che la molla esercita sulla nostra mano e la forza che la nostra mano esercita sulla molla hanno *sempre*, necessariamente, valore uguale, **sia in caso di equilibrio che in caso di non equilibrio** della molla: è la terza legge di Newton. Il testo doveva dire: "... uguale e opposta alla forza che la molla esercita sulla mano **in condizioni statiche**".

(4) La forza del pistone sul gas e la forza del gas sul pistone hanno necessariamente sempre lo stesso valore, che ci sia o che non ci sia l'equilibrio del pistone: è la legge di azione e reazione (la legge più semplice di tutta la fisica!). Oltre a tutto: perché mai l'equilibrio del pistone dovrebbe dipendere dal valore delle forze che agiscono **sul gas**? L'equilibrio del pistone richiede solo che sia zero la somma delle forze che agiscono **sul pistone**.

(5) (a) No, possiamo solo dire che il vettore **accelerazione** è diretto verso destra per A e verso il basso per B. La velocità potrebbe anche essere diretta (**con valori in diminuzione**) verso sinistra per A e verso l'alto per B: possiamo per esempio immaginare che, immediatamente prima della situazione rappresentata in figura, si sia strappato un filo che stava tirando A verso sinistra.

(b) Falso. Se così fosse, il blocco A avrebbe accelerazione $3g$ (e tenderebbe a ∞ per m_A tendente a zero!) mentre il blocco B (che, date le circostanze, deve avere la stessa accelerazione del blocco A) avrebbe **accelerazione zero** (dovendo essere uguali, **per il fatto che la massa del filo è zero e che non c'è attrito sulla carrucola**, le forze che tirano il filo ai due estremi, la forza del filo su B sarebbe 30 kg verso l'alto).



L'accelerazione dei due blocchi è in realtà $(3/4)g$ (una forza di 30 kgf accelera un sistema di 40 kg), perciò ai due estremi del filo c'è una forza di $7,5 \text{ kgf}$.

$\rightarrow$ N.B. Nel calcolo dell'accelerazione (che qui ha il significato di "rapidità di variazione *del valore* della velocità") non si è tenuto conto delle forze che agiscono al contatto tra filo e puleggia perché, per l'assenza di attrito, sono **perpendicolari** in ogni punto al filo e quindi non influiscono sul valore della velocità.

$\rightarrow$ **Nulla ovviamente vieterebbe di esprimere le forze non in kgf ma in N! Sono solo calcoli in più, e quindi maggiore rischio di errori.**

(6) Falso. Se così fosse, il filo (massa zero, forza verso l'alto 40 kg) sarebbe tirato verso il basso ai due estremi da due forze di valore 20 kgf (**necessariamente uguali per l'assenza di massa del filo e di attrito tra filo e puleggia**). Allora il blocco A avrebbe accelerazione g verso l'alto e il blocco B avrebbe accelerazione $g/3$ verso il basso: impossibile, l'accelerazione è uguale in valore per i due blocchi.

Oppure: se così fosse, la puleggia spingerebbe a sua volta il filo verso l'alto con una forza di 40 kgf. Perciò la forza complessiva sul sistema mobile (blocchi + filo) sarebbe zero, e dunque il CM del sistema avrebbe accelerazione zero: mentre è chiaro che il CM accelera verso il basso (i due blocchi hanno accelerazioni di ugual valore, ma il blocco B ha massa maggiore).

L'accelerazione dei due blocchi è $g/2$ (una forza complessiva di $[30-10] \text{ kgf} = 20 \text{ kgf}$, differenza tra i pesi dei blocchi, accelera una massa complessiva di 40 kg), perciò ai due estremi del filo c'è una forza di 15 kgf (verso l'alto sui blocchi, verso il basso sul filo). Dunque il filo è tirato verso il basso da due forze di **15 kgf**, il che significa che tira verso il basso la puleggia con una forza di 30 kgf.

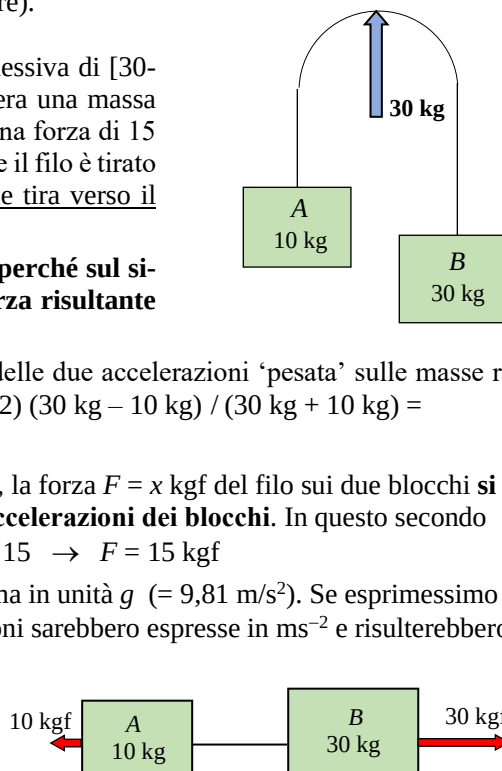
Il CM del sistema ha accelerazione verso il basso $g/4$, perché sul sistema, che ha massa complessiva 40 kg, agisce una forza risultante di 10 kgf verso il basso.

Controllo: l'accelerazione verso il basso del CM, media delle due accelerazioni 'pesata' sulle masse rispettive) è $a_{\text{CM}} = [(g/2)m_B - (g/2)m_A] / (m_B + m_A) = (g/2) (30 \text{ kg} - 10 \text{ kg}) / (30 \text{ kg} + 10 \text{ kg}) = (g/2) (20/40) = g/4$.

Nota: sia in questo problema che nel problema precedente, la forza $F = x \text{ kgf}$ del filo sui due blocchi **si poteva trovare anche imponendo l'uguaglianza delle accelerazioni dei blocchi**. In questo secondo caso: $(x - 10) \text{ kgf} / 10 \text{ kg} = (30 - x) \text{ kgf} / 30 \text{ kg} \rightarrow x = 15 \rightarrow F = 15 \text{ kgf}$

- Queste accelerazioni **non** risultano espresse in ms^{-2} , ma in unità g ($= 9,81 \text{ m/s}^2$). Se esprimessimo il valore delle forze in N anziché in kgf, le accelerazioni sarebbero espresse in ms^{-2} e risulterebbero in modulo 9,81 volte più grandi.

SI NOTI CHE IN QUESTA **DIVERSA** SITUAZIONE LA SOLUZIONE PER LA FORZA DEL FILO SUI BLOCCHI SAREBBE **LA STESSA**

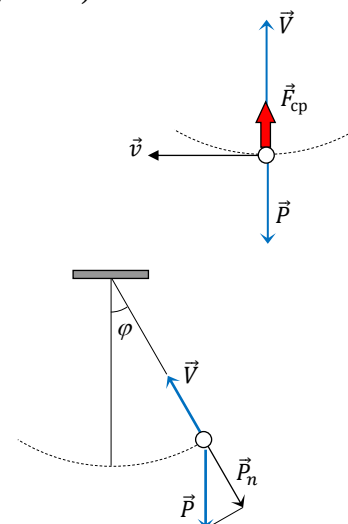


(7) (a) La forza centripeta è il componente trasversale (= perpendicolare alla velocità) della forza risultante: ovvero, la somma dei componenti trasversali delle forze applicate. La $\vec{F}_1$ è parallela alla velocità, quindi non influisce sul valore della forza centripeta. La $\vec{F}_2$ e la $\vec{F}_3$ hanno come risultante una forza diretta come l'asse y di valore 12 N. Tale forza, sommata con la $\vec{F}_4$, dà la forza centripeta, la quale quindi ha modulo $\sqrt{9^2 + 12^2} \text{ N} = 15 \text{ N}$.

(b) Il centro di curvatura è sulla perpendicolare alla velocità, e precisamente sulla retta (a questo punto nota) che contiene la forza centripeta. La distanza del centro di curvatura dal punto mobile è il raggio r di curvatura, determinato dalla relazione $F_{\text{cp}} = mv^2/r$ (dove l'unica incognita è r).

(8) (a) La forza peso $\vec{P}$ (verticale verso il basso) e la reazione del vincolo $\vec{V}$ (verticale verso l'alto) sono entrambe perpendicolari alla velocità: la loro somma rappresenta la forza centripeta $\vec{F}_{\text{cp}}$, ed è quindi necessariamente diretta verso il centro di curvatura, cioè verso l'alto. Ciò significa che la reazione del vincolo è **più grande** del peso: precisamente, detta L la lunghezza del filo deve essere $V = P + mv^2/L$, in modo che la forza risultante $\vec{V} + \vec{P}$ abbia modulo mv^2/L .

(b) In questo caso la velocità della pallina è zero, quindi la forza centripeta (somma della reazione del vincolo e del componente $\vec{P}_n$ del peso sulla normale alla traiettoria, e cioè nella direzione del filo) è zero. Dunque, $V = P \cos \varphi$, dove φ è l'angolo tra il filo e la verticale.

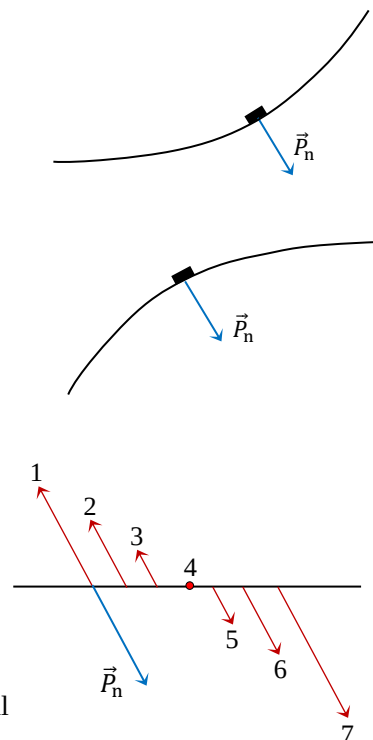


(9) *Concavità verso l'alto.* La forza centripeta $\vec{V} + \vec{P}_n$ (reazione del vincolo più componente trasversale del peso) è diretta verso il centro di curvatura, quindi verso l'alto. Essendo $\vec{P}_n$ diretto verso il basso, necessariamente $\vec{V}$ è diretta (parallelamente a $\vec{P}_n$) verso l'alto (con $V \geq P_n$).

→ La direzione di marcia è del tutto influente.

Concavità verso il basso. La forza centripeta è diretta verso il basso, come il componente $\vec{P}_n$ del peso sulla normale: la reazione del vincolo sarà diretta verso l'alto o verso il basso a seconda del valore della forza centripeta, e quindi a seconda della velocità di K .

1. Per velocità zero, la forza centripeta è zero e quindi la somma delle due forze trasversali è zero: $V = P_n$ (freccia rossa 1 in figura).
2. Per velocità piccole, la forza centripeta è piccola e quindi V è di poco inferiore a P_n (freccia 2).
3. Man mano che aumenta la velocità, aumenta la forza centripeta e quindi V diventa sempre più piccola (freccia 3).
4. Se la velocità arriva a quel valore per cui la forza centripeta è uguale a P_n , deve essere $V = 0$ (situazione 4 in figura).
5. Se la velocità aumenta ulteriormente, occorre che $\vec{V}$ sia diretta verso il basso e vada aumentando al crescere della velocità (freccie 5, 6 e 7) altrimenti non c'è abbastanza forza centripeta per quel dato raggio di curvatura: il raggio di curvatura della traiettoria aumenta, il blocchetto si stacca quindi dalla superficie di appoggio (come quando uno sciatore passa in velocità su un dosso).



(10/a) Per il principio di azione e reazione, il peso del libro (la forza che la Terra esercita sul libro) è uguale in valore alla forza che il libro esercita sulla Terra, e la forza che il tavolo esercita sul libro è uguale in valore alla forza che il libro esercita sul tavolo. Se tutto è in equilibrio, la forza complessiva sul libro deve essere zero, perciò il peso del libro è uguale in valore alla forza che il libro riceve dal tavolo, e allora, *per il principio di azione e reazione*, anche la forza del libro sul tavolo è uguale al suo peso. Ma attenzione: se, per qualche strana ragione, il libro si trovasse sul pavimento di un ascensore che sta prendendo o perdendo velocità (accelerazione diversa da zero), la forza complessiva sul libro non sarebbe più zero e non sarebbe più vero che la forza esercitata dal libro sul pavimento, e dal pavimento sul libro, corrisponde al peso del libro.

(10/b) **Nella meccanica classica sì, ma può non valere in presenza di effetti relativistici.**

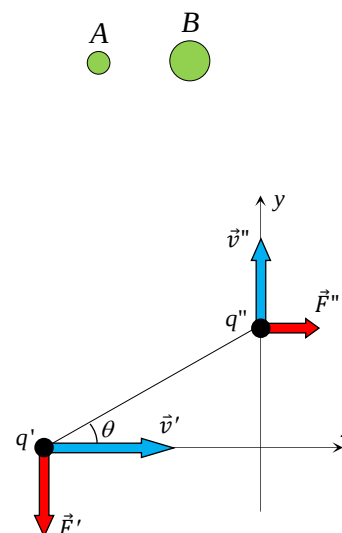
Es. Il fatto che le variazioni di un campo di forza si propagano con una velocità finita è un effetto relativistico: e infatti il principio di azione e reazione può cadere in difetto **nel caso di interazione a distanza** (interazione tra corpi che non si trovino a contatto).

Esempio. Se l'oggetto A e l'oggetto B , entrambi in quiete, si attraggono per effetto gravitazionale, la legge di azione e reazione funziona perfettamente: ma se a un certo istante B viene spostato in allontanamento da A , portandosi quindi in una posizione dove il campo prodotto da A è più debole, il campo gravitazionale prodotto da B non può immediatamente risultare a sua volta più debole nel punto dove A si trova, **altrimenti l'informazione relativa al cambiamento di posizione di B avrebbe viaggiato da B verso A con velocità infinita**. Dunque, per un tempo estremamente breve – ma diverso da zero – dopo lo spostamento di B , la forza di A su B è più piccola della forza di B su A , e il principio di azione e reazione è violato.

Inoltre: forza del campo magnetico su una carica elettrica: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Nel caso della figura qui a lato, le forze magnetiche di interazione fra le due cariche non hanno né lo stesso valore né direzioni opposte.

Nota: **il campo magnetico è un effetto relativistico**. Le forze del campo magnetico sono l'effetto

1. della legge di Coulomb (interazione fra cariche in quiete)

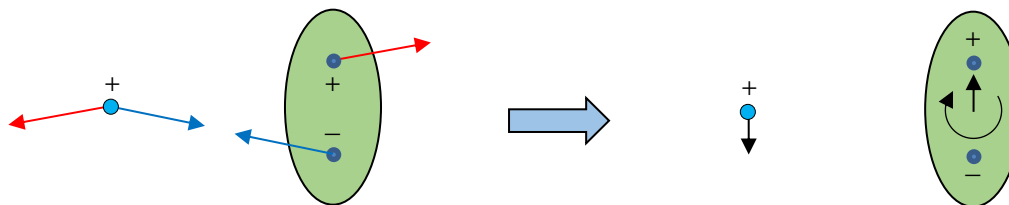


2. dell'invarianza relativistica della carica

3. della contrazione relativistica delle lunghezze (se, in condizioni di quiete,

un oggetto ha, in direzione x , lunghezza L_0 , quando l'oggetto si muove in direzione x con velocità v la lunghezza è $L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

(10/c) **FALSO**, la 'regola' vale **solo per oggetti puntiformi**. Nel caso della domanda, il corpo A potrebbe essere (vedi figura sottostante) una carica puntiforme e il corpo un sistema di due cariche a somma zero:



Una situazione di questo tipo **si presenta realmente** quando una carica puntiforme (es. un elettrone) viene a trovarsi in prossimità di un 'dipolo' elettrico (es. una molecola d'acqua).

NOTA BENE: l'azione meccanica sul dipolo a destra **non può essere ricondotta a una semplice forza... occorre anche una coppia** (di momento uguale a quello della coppia dei due componenti orizzontali di forza sul dipolo). Ovviamente, anche in questo caso la somma vettoriale delle forze interne al sistema complessivo è zero: e dunque, se il sistema è isolato (niente forze esterne) la velocità del centro di massa è costante ($\rightarrow$ la quantità di moto è costante). Ed è costante anche il momento angolare (momento della quantità di moto).

(11) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.41 ("Qualche volta non vale")]

C'è forse, in fisica, una legge più famosa del principio di azione e reazione? Lo escludo. Anche il più ignorante degli studenti sa recitare a memoria che «ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria».

Magari non si rende conto di che cosa esattamente sta dicendo, e lo dice a sproposito. Se chiedete a uno studente, non necessariamente alle prime armi, quale forza esercita sul pavimento una cassa di peso 15 kg, vi risponderà senza esitazione: 15 kg. E, se proprio non si vuole essere pignoli tirando in ballo il moto di rotazione della Terra, non si può che dargli ragione. Se però gli chiedete di dimostrarlo, una volta riavutosi dalla sorpresa dichiarerà immancabilmente: «per il principio di azione e reazione». Risposta che, sotto il profilo della pura logica, non vale molto di più di quest'altra: 15 kg, perché piove ed è ormai mezzogiorno. Perché, è vero, la forza della cassa sul pavimento è 15 kg, ma il principio d'azione e reazione proprio non c'entra. Il principio di azione e reazione richiede semplicemente che, dato che la cassa pesa 15 kg, cioè è attirata dal pianeta Terra con una forza di 15 kg, abbia valore 15 kg la forza (verso l'alto) che la cassa esercita sul pianeta Terra: *non* la forza (verso il basso) che la cassa esercita sul pavimento!

La ragione per cui la forza della cassa sul pavimento vale tanto quanto il peso della cassa è che la cassa, essendo per ipotesi immobile, non possiede accelerazione, il che richiede che la forza risultante sulla cassa sia zero: 15 kg verso il basso (la forza peso), 15 kg verso l'alto (la forza che proviene dal pavimento). E qui arriva il principio di azione e reazione: se la forza del pavimento sulla cassa è 15 kg, allora anche la forza della cassa sul pavimento è 15 kg. Controprova: se il pavimento in questione è quello di un ascensore, la forza della cassa sul pavimento è uguale al peso *solo quando l'ascensore è fermo, oppure viaggia* – non importa se verso l'alto o verso il basso – *con velocità costante* (si veda al cap. 52).

Ma questi sono errori da studenti, gli errori degli Autori sono ovviamente di tutt'altro livello. Quello che ho citato in [A], per esempio, ha una visione: se è vero che nel momento meno propizio, mentre cioè sta osservando non l'interazione tra due corpi, ma **le forze applicate ad uno stesso corpo**, «rivede in azione» il terzo principio della dinamica. E al lettore per poco non gli prende un colpo. [...] (*segue*)

(12) [Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.13 ("I problemi della fisica")]

Incredibilmente, il quesito ha ricevuto nel tempo e continua a ricevere le risposte più diverse anche da parte di gente che ha professionalmente a che fare con la fisica. Nel sito web di una università del Nord Italia ho trovato, diversi anni addietro, il ragionamento seguente:

«Il carico si sposta verso l'alto. La fune scorre sotto le zampe della scimmia. Il sistema carico-scimmia-fune è isolato perché la risultante delle forze esterne agenti su di esse è nullo. Ne consegue che il centro di massa del sistema deve rimanere fermo. Supponiamo che inizialmente carico e scimmia si trovino alla stessa quota e che la massa della fune sia trascurabile rispetto alle altre. Se per effetto dell'arrampicarsi della scimmia la fune scorre sotto le sue zampe ed il carico sale rispetto alla posizione iniziale, affinché il centro di massa del sistema resti fisso la posizione della scimmia deve abbassarsi rispetto a quella iniziale.» La risposta è ripresa tale e quale (copia e incolla) nel sito di un liceo della Svizzera italiana.

Ho allora inviato al sito dell'università e a quello del liceo il seguente messaggio di contestazione.

- «Isolato, il sistema mobile? Solo se si assume che la forza della carrucola sulla corda corrisponda esattamente al peso complessivo del sistema mobile, il che accade solo in condizioni di quiete o di moto uniforme. Sarebbe come dire che, se da una parte c'è un blocco di peso 2 kg e dall'altra un blocco di peso 10 kg, la forza della corda sulla carrucola è 12 kg...
- Dire che il centro di massa del sistema resta fermo significa chiaramente dire che di tanto sale il contrappeso, di altrettanto scende la scimmia: perciò la lunghezza del tratto di corda tra scimmia e contrappeso è rimasta invariata. Ma... la fune non doveva "scorrere sotto le zampe della scimmia"? E la scimmia... non doveva "arrampicarsi" sulla corda?
- Inoltre: se è vero che, partendo da fermo, la scimmia acquista velocità verso il basso, significa che ha subito un'accelerazione verso il basso. Domanda: quale forza verso il basso si è aggiunta al peso (o quale forza verso l'alto è diminuita) per dare luogo a tale accelerazione?
- Infine: a che cosa è servita l'ipotesi della quota iniziale uguale per la scimmia e per il carico?»

E ho controproposto quest'altra soluzione.

«Se, a un certo momento, la scimmia esercita sulla fune una forza supplementare verso il basso per issarsi verso l'alto, una forza supplementare *di identico valore* tira tanto la scimmia quanto il carico verso l'alto (le forze ai due estremi della fune – esercitate sulla fune dalla scimmia e, rispettivamente, dal carico – sono identiche perché la fune ha massa zero e può scorrere senza attrito), mentre una forza supplementare di valore doppio agisce verso il basso sulla carrucola e verso l'alto sulla fune (per effetto della carrucola). Le due masse sospese si trovano esattamente nelle stesse condizioni, subiscono quindi in definitiva un *identico spostamento verso l'alto*, uguale a metà dello spostamento delle mani della scimmia sulla corda: la distanza verticale tra carico e scimmia *resta invariata*. Il centro di massa del sistema scimmia + carico + fune è stato accelerato verso l'alto (e quindi spostato verso l'alto) dalla forza della carrucola sulla fune, momentaneamente più grande del peso complessivo. Esempio numerico: la scimmia si appende sulla corda 40 cm più in alto. La scimmia e il contrappeso salgono allora entrambi di 20 cm, il tratto di corda compreso tra i due si accorcia di 40 cm, il tratto di corda sotto la scimmia si allunga di 40 cm.»

Com'è poi andata a finire? Dalla sede universitaria mi è stato subito risposto che avevo ragione e mi hanno ringraziato. Dal liceo, nessuna risposta (e nessuna modifica al loro documento).

ESERCITAZIONE N.4

CENTRO DI MASSA – DINAMICA ROTAZIONALE

(1) Possiamo definire il baricentro come “punto d’applicazione della forza peso”? Possiamo definire il centro di massa (lo fanno praticamente tutti i testi scolastici preuniversitari) come “il punto in cui possiamo immaginare sia concentrata la massa di un corpo”? Vale a dire: è sempre possibile risolvere i problemi di fisica fingendo che la massa di un corpo sia concentrata nel relativo centro di massa?

(2) Come possiamo allora definire il baricentro?

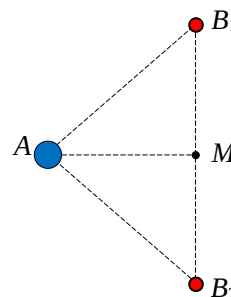
(3) Determinazione del centro di massa (del baricentro) “per parti” (proprietà distributiva del centro di massa)

(4) Massa inerziale e massa gravitazionale: differenza concettuale

(5) Centro di massa e baricentro, posizione.

(6) Si legge in molti libri di testo preuniversitari (praticamente tutti) che la forza gravitazionale tra due corpi può essere calcolata con la formula di Newton collocando idealmente le masse dei corpi interagenti nei rispettivi centri di massa. Commentare.

(7) Le particelle A , B_1 , B_2 (figura) si attraggono per effetto gravitazionale. La particella A si trova sull’asse del segmento B_1B_2 , la B_1 e la B_2 hanno massa uguale. Le distanze e le masse sono note. Domanda. Sarebbe possibile calcolare la forza complessiva sulla particella A collocando la massa complessiva delle altre due nel centro M del segmento che le connette?



(8) Se applichiamo la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ assumendo come forza la somma di tutte le forze agenti su un sistema di N punti materiali, e come massa la massa complessiva degli N punti, otteniamo l’accelerazione media dei punti del sistema (vero/falso).

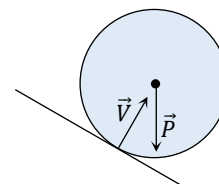
(9) Le forze interne a un sistema fisico S non hanno alcuna influenza sul moto del centro di massa del sistema (vero/falso).

(10) L’energia cinetica e la quantità di moto di un sistema fisico possono essere calcolate collocando tutta la massa del sistema nel relativo centro di massa (vero/falso).

(11) Il lavoro delle forze gravitazionali può sempre essere calcolato collocando le masse nei centri di massa (vero/falso).

(12) Il momento d’inerzia di un corpo rispetto a un determinato asse si può sempre calcolare collocando le masse nei rispettivi centri di massa (vero/falso).

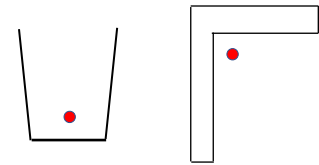
(13) Come si comporterebbe il cilindro, partendo da fermo in totale assenza di attrito? Scivolerebbe o ruoterebbe? Rispetto all’asse del cilindro le forze in gioco hanno momento zero ($\rightarrow$ scivolamento senza rotazione), rispetto invece alla linea di contatto il momento del peso non è zero ($\rightarrow$ moto di rotolamento).



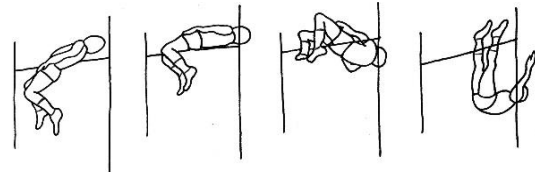
(14) Citazione (con riferimento a un corpo rigido): «È visibile che la rotazione determinata da una coppia di forze applicate in A e B avviene attorno a una retta perpendicolare al piano della coppia, passante per il centro O di AB » (testo di fisica per il liceo scientifico). Dov’è l’errore?

SOLUZIONI

- (1) Il baricentro di un vaso *non* è un punto del vaso.
 Il baricentro di una lastra sagomata a L *non* è un punto della lastra.



Nel salto in alto con tecnica Fosbury, se il corpo rasenta l'asticella (figura) il baricentro le passa sotto

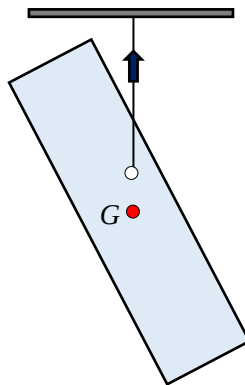


Da Tonzig "Semplicemente fisica – Fraintendimenti e buchi neri nell'apprendimento della fisica"

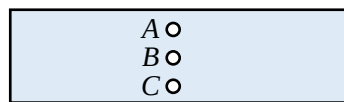
→ Ai puri fini del calcolo, tuttavia, in alcuni casi la 'finzione' è lecita (ed è preziosa).

- (2) **Baricentro** = punto per il quale passa la retta d'azione della forza capace di realizzare, insieme alle forze peso, le condizioni di equilibrio del corpo rigido:

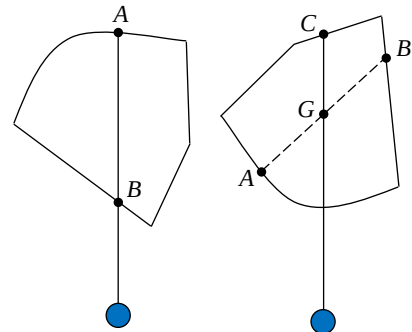
- somma delle forze uguale a zero
- somma dei momenti delle forze rispetto a uno stesso punto (comunque scelto) uguale a zero.



Lastra sospesa a un filo:
 il baricentro G si trova sul
 prolungamento del filo



Lastra impernata
 in A → equilibrio stabile
 in B → equilibrio indifferente
 in C → equilibrio instabile



Individuazione del baricentro di una
 lastra omogenea di spessore costante

- (3) Il baricentro di un sistema di corpi coincide col baricentro del sistema di punti materiali che si ottiene

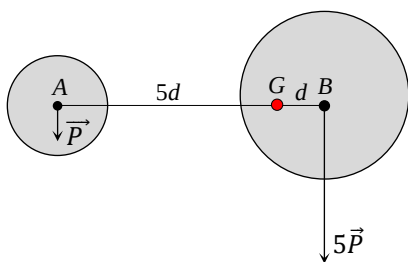


Figura 1

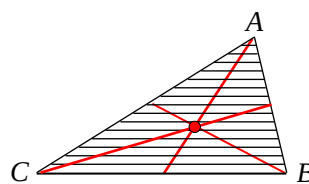


Figura 2

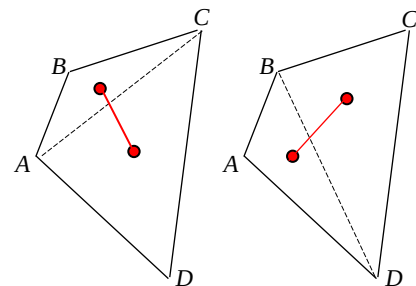


Figura 3

sostituendo ad ogni corpo un punto avente il peso di quel corpo e posizionato nel relativo baricentro.

Figura 1 – Il baricentro del sistema di due sfere omogenee, di centro A e B e di peso P e $5P$, è sul segmento AB , cinque volte più vicino a B .

Figura 2 – Il baricentro di una lastra triangolare omogenea di spessore costante è su tutte e tre le mediane, e dunque nel loro punto di intersezione. La mediana per A , ad esempio, contiene necessariamente il baricentro del sistema di strisce orizzontali di cui il triangolo è costituito, *perché contiene il baricentro di tutte le strisce*.

Figura 3 – Baricentro di una lastra quadrilatera omogenea $ABCD$ di spessore costante è sul segmento che

connette i baricentri dei triangoli ABC e ACD , ma anche sul segmento che connette i baricentri dei triangoli ABD e BCD : dunque è nell'intersezione dei due segmenti in questione.

(4) **Massa inerziale** ($\vec{F} = m\vec{a}$): capacità di un corpo di opporsi agli effetti di accelerazione prodotti dalle forze ad esso applicate.

Massa gravitazionale ($F = Gm'm''/r^2$): capacità di esercitare-subire azione attrattiva governata da legge di Newton.

Proprietà a priori indipendenti, ma **esperienza**: se due corpi hanno la stessa massa inerziale, nello stesso punto dello spazio hanno anche lo stesso peso, sono cioè uguali anche le masse gravitazionali (*principio di equivalenza*).

(5) La posizione del centro di massa è la media delle posizioni dei punti del sistema, 'pesata' sulle rispettive masse: Nel caso di tre punti materiali

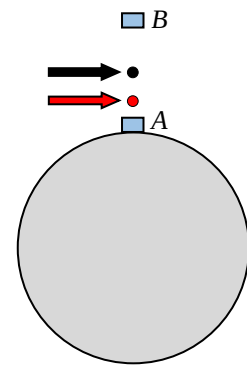
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \text{ ovvero}$$

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = x_1 \frac{m_1}{M} + x_2 \frac{m_2}{M} + x_3 \frac{m_3}{M} \quad y_{CM} = \dots \quad z_{CM} = \dots$$

La posizione del baricentro si ottiene invece da una media 'pesata' sui pesi: nelle formule precedenti, al posto di m_1 dovremmo scrivere $m_1 g_1$, e lo stesso per ogni altro punto del sistema. Se poi $g_1 = g_2 = \dots$ (se cioè l'accelerazione di gravità è uguale per tutti i punti del sistema, campo gravitazionale uniforme), le coordinate del centro di massa e del baricentro coincidono.

Esempio 1, sfera omogenea. A rigore, il baricentro è un po' più in basso del centro di massa, posto nel centro geometrico: la mezza sfera inferiore è infatti più vicina al terreno rispetto alla mezza sfera superiore, e dunque pesa di più.

Esempio 2 (figura), due blocchi A e B identici che distano rispettivamente R e $2R$ dal centro della Terra (R raggio terrestre): baricentro (pallino rosso in figura) e CM (pallino nero) distano $d = (R/2 - R/5) = 0,3 R_T$, a conti fatti quasi 2000 km.



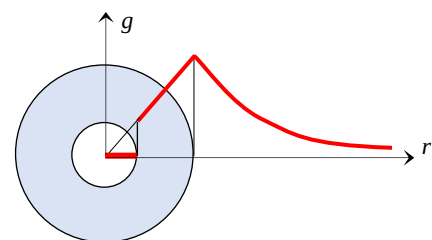
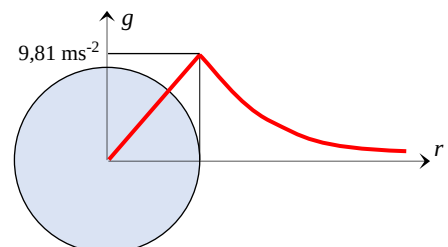
(6) Affermazione a dir poco imprudente, perché valida in realtà solo per corpi sferici nei quali la massa sia distribuita attorno al centro con simmetria sferica (in modo cioè che la densità – la massa per unità di volume – risulti uguale in tutti i punti equidistanti dal centro): *e solo agli effetti esterni*.

Se, ad esempio, schematizziamo la Terra come sferica e localizziamo la sua massa nel centro della sfera, possiamo ottenere per l'attrazione gravitazionale da essa esercitata su oggetti esterni (il corpo umano, un aereo, un satellite artificiale, la Luna) un valore ben approssimato. Viceversa, per il peso di oggetti posti all'interno della Terra troveremmo erroneamente un valore via via più grande al diminuire della distanza dal centro, e tendente addirittura a infinito al tendere della distanza a zero: risultato chiaramente assurdo, anche perché è chiaro che nel centro della Terra un corpo sarebbe attratto in tutte le direzioni con uguale intensità cosicché la forza gravitazionale risultante sarebbe zero.

→ All'interno della Terra, quando la distanza dal centro tende a zero la forza gravitazionale tende a zero, NON a infinito!!

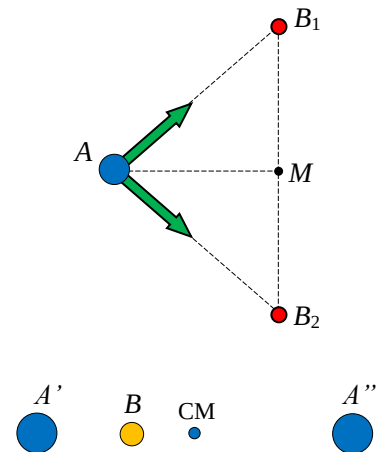
All'interno di una sfera omogenea il campo gravitazionale (l'accelerazione g di gravità) diminuisce in proporzione alla distanza fino a zero (figura a lato).

Campo gravitazionale generato da un guscio sferico omogeneo di spessore costante: nella cavità interna (figura qui a lato) il campo è ovunque nullo (assenza di peso effettiva, *non come quella degli astronauti in orbita*, che sembra zero – la bilancia segna zero, gli oggetti non cadono – solo perché anche la capsula ha l'accelerazione di gravità, come un ascensore in caduta libera).



(7) No. Se fosse lecito porre la massa nel baricentro M , la forza su A sarebbe del tutto indipendente dalla lunghezza (figura) del segmento B_1B_2 , il che è palesemente assurdo: al crescere della lunghezza B_1B_2 , la forza risultante su A diminuisce rapidamente (nel disegno, aumenta l'angolo fra le due frecce verdi e contemporaneamente diminuisce la loro lunghezza).

→ Concentrando tutta la massa nel CM si corre tra l'altro il rischio di dare alla forza gravitazionale una **direzione diversa** da quella giusta: nel caso della figura qui a fianco, la forza gravitazionale complessiva del sistema $A' + A''$ sulla massa B è chiaramente diretta verso sinistra; collocando la massa del sistema $A' + A''$ nel rispettivo centro di massa, la forza sarebbe diretta verso destra.



(8) Falso. Otteniamo l'accelerazione del centro di massa del sistema, che corrisponde non a una semplice media aritmetica ma a una media “ponderata”: nel caso per es. di due soli punti materiali, la media delle accelerazioni è $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) / 2$, la media ponderata è $(m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2) / (m_1 + m_2) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) / (m_1 + m_2)$, coincidente con la media aritmetica solo se le due masse sono uguali.

→ È la proprietà fondamentale del CM: per come la sua posizione viene definita, **il CM si comporta come se in esso fosse concentrata l'intera massa del sistema e se ad esso fossero applicate tutte le forze agenti sul sistema.**

Le prime due leggi di Newton potrebbero (dovrebbero!) essere espresse in questi termini:

1. Se, per un qualsiasi corpo o insieme di corpi, la somma delle forze applicate è zero, il CM del sistema si muove con velocità costante in direzione e valore (in particolare, potrebbe risultare immobile);
2. La somma delle forze applicate a un qualsiasi corpo o insieme di corpi è uguale alla massa complessiva del sistema moltiplicata per l'accelerazione del CM.

(9) Se, come nella stragrande maggioranza dei casi pratici (assenza di effetti relativistici), vale la legge di azione e reazione, la somma delle forze interne (forze dovute all'interazione tra le varie parti del sistema) è uguale a zero: perciò le forze interne non possono avere alcuna influenza sul moto del CM.

L'esempio che viene sempre proposto è quello della granata che scoppia in volo lungo la sua traiettoria parabolica: le forze che per effetto dello scoppio agiscono sul sistema (il proiettile) sono interne al sistema: se, con un po' di arbitrio, ammettiamo che lo scoppio non modifichi le forze esterne (in realtà cambia parecchio nella resistenza dell'aria), dopo lo scoppio il CM del sistema continua a muoversi come nulla fosse successo.

Un altro buon esempio è quello del tuffatore: durante il volo dal trampolino, i cambiamenti di configurazione del suo corpo sono dovuti a forze interne e, se trascuriamo le variazioni nella resistenza dell'aria, non condizionano in alcun modo il moto del CM: per una data velocità iniziale del CM – valore e direzione – il CM si muove poi lungo la stessa traiettoria parabolica e con la stessa legge oraria quali che possano essere i contorcimenti del tuffatore.

(10) Falso per l'energia cinetica (quantità scalare sempre positiva), vero per la quantità di moto (quantità vettoriale).

Se due blocchi di massa uguale (figura) viaggiano con uguale velocità v in direzioni opposte, l'energia cinetica complessiva è il doppio dell'energia cinetica di un blocco, la quantità di moto complessiva è zero.



Altro esempio: se un cilindro omogeneo ruota con velocità angolare ω attorno al proprio asse geometrico, la sua quantità di moto è zero perché è zero la velocità del centro di massa (posto sull'asse di rotazione), la sua energia cinetica è $I\omega^2/2$ ($I = MR^2/2$, momento d'inerzia rispetto all'asse del cilindro).

(11) Non “sempre”, ma solo nel caso di campo gravitazionale uniforme (accelerazione di gravità uguale in ogni punto del campo). Nell'esercizio 15 del capitolo 6 (“Gravitazione”) si vedrà un esempio in cui il lavoro delle forze gravitazionali non può essere calcolato né ponendo la massa complessiva nel centro di massa, né ponendola nel baricentro.

(12) Promemoria: il momento d'inerzia rispetto a un asse è il corrispettivo rotazionale della massa, rappresenta la capacità di un corpo di opporsi (di fare contrasto) alle variazioni della sua velocità angolare attorno a quel dato asse. Un punto materiale K di massa m distante r da un asse (fig.5), ha, rispetto a tale asse, momento d'inerzia $I = mr^2$.

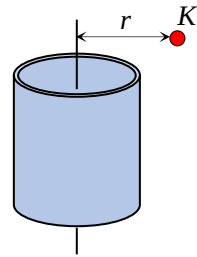


Fig. 5

Risposta al quesito 12: falso. Un tubo di massa M , spessore zero, raggio R (fig.5) (oggetto puramente ideale, come il punto materiale) ha, rispetto al proprio asse geometrico, momento d'inerzia MR^2 ; se localizzassimo la massa nel CM, chiaramente posto sull'asse del tubo, otterremmo $I = 0$.

Applicazione. Se vogliamo calcolare, attraverso la formula $\alpha = \tau/I$ (momento delle forze diviso momento d'inerzia) l'accelerazione angolare di una sbarra omogenea (massa M , lunghezza L) che oscilla impernata a un estremo (fig.6), nella determinazione del momento τ delle forze gravitazionali rispetto al perno P possiamo senz'altro collocare la massa della sbarra nel CM (possiamo cioè fingere che il peso agisca su un unico punto, il baricentro); ma se facessimo lo stesso per determinare il momento d'inerzia otterremmo $I = M(L/2)^2 = \mathbf{ML^2/4}$; mentre, indicata con A l'area della sezione trasversale della sbarra e con x la distanza da P di un elemento di sbarra di lunghezza dx , il valore corretto è

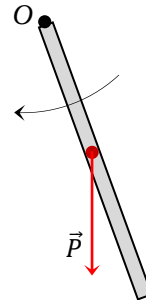


Fig. 6

$$I = \int_0^L \rho A x^2 dx = \rho A L^3/3 = (\rho A L) L^2/3 = \mathbf{ML^2/3}$$

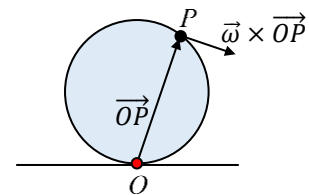
più grande del precedente nel rapporto 4 a 3. Avremo dunque, per un dato spostamento rotatorio da fermo (stesso lavoro della forza peso, stesso incremento dell'energia cinetica $I\omega^2/2$) una ω^2 più piccola nel rapporto 4:3 (e un'accelerazione angolare più piccola nello stesso rapporto).

(13) L'applicazione alla retta di contatto della relazione $\alpha = \tau/I$ (corrispettivo rotazionale della $a = F/m$) non è in questo caso lecita!

Il **limite di validità** della $\alpha = \tau/I$ è pesante:

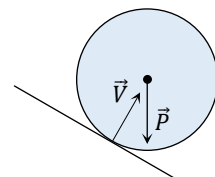
- 1 - occorre che il momento d'inerzia I sia costante nel tempo
- 2 - occorre che il momento delle forze τ e il momento d'inerzia I siano riferiti a uno stesso asse che può essere:

- un asse di rotazione a posizione fissa
- un asse di rotazione a posizione variabile (punto rosso in figura, rotolamento **senza** strisciamento), che però mantiene una direzione costante e si sposta *parallelamente alla velocità del CM*
- un asse parallelo all'asse di rotazione e passante dal CM (in tal modo cambiano τ e I ma resta uguale il loro rapporto, e cioè l'accelerazione angolare).



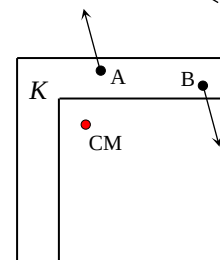
Cilindro che rotola **senza** strisciare: la retta di contatto è un asse di istantanea rotazione **perché** all'istante considerato le velocità (non le accelerazioni!) sono quelle che competono a un moto di rotazione attorno a tale retta.

Nel caso della domanda 13 (assenza di attrito), possiamo certamente riferire momento delle forze e momento d'inerzia all'asse del cilindro, e dunque è fuori discussione che, partendo da fermo, il moto del cilindro sarebbe uno scivolamento senza rotazione. Il fatto che, facendo riferimento alla retta di contatto, si ottenga un risultato diverso, conferma che tale retta non è, nel caso specifico, un asse di rotazione.



(14) [da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.20 ("Che effetto fa una coppia")]

... Una delle idee più utili della Meccanica è la seguente: il centro di massa di un *qualsiasi* sistema fisico si comporta (si muove) come se in esso fosse concentrata la massa dell'intero sistema, e ad esso fossero applicate tutte le forze agenti sul sistema. Conseguenza: *il centro di massa non può entrare in movimento per effetto di un sistema di forze a risultante zero*, come ad esempio una coppia. Pertanto, qualunque cosa possa suggerire l'intuizione, l'effetto di una coppia di forze applicate in A e B a un corpo rigido K (figura) è una rotazione attorno a un asse che passa *non dal punto medio di AB, ma dal centro di massa di K* ^[1]. Non sarà particolarmente «visibile», ma almeno è vero.



¹ Chiaramente, è solo un effetto tendenziale: possiamo cioè osservarlo solo se la coppia viene applicata a un corpo rigido in quiete, e se il corpo è libero da vincoli capaci di contrastare e alterare – per esempio attraverso l'attrito – l'effetto della coppia. Si noti anche che, contrariamente a quanto si sostiene nella frase citata, l'asse di rotazione *non* è, in generale, diretto perpendicolarmente al piano della coppia (ciò avviene solo se la perpendicolare al piano della coppia ha la direzione di uno degli assi principali d'inerzia dell'oggetto considerato).

ESERCITAZIONE N.5

LAVORO ED ENERGIA

Concetti **fra i più importanti** della fisica,
fra i più semplici della fisica,
fra i meno capiti dagli autori dei testi preuniversitari di fisica.

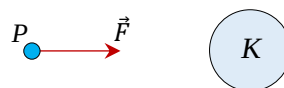
RICORDA!

- 1 – **NON ESISTE** UN PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE PER IL LAVORO
- 2 – NON CI SONO “MOLTE FORME” DI ENERGIA, MA **DUE SOLE** (ANZI, UNA)
- 3 – L’ENERGIA POTENZIALE DI UN CORPO **NON È** IL LAVORO CHE IL CORPO PUÒ COMPIERE

(1) CITAZIONI

(a) «...Ma giacché, per la terza legge di Newton, nel mentre A lavora positivamente su B , B lavora negativamente su A (e per un ammontare uguale in assoluto)... » (*Testo di fisica per il liceo scientifico*). Commentare.

(b) «Il lavoro fatto sulla particella P dalla forza $\vec{F}$ è uguale al lavoro fatto dalla particella sull’oggetto K che causa la forza, cambiato di segno.» (*Testo universitario americano*). Commentare.



(2) CITAZIONI

(a) «Con altre parole si può dire che esistono cinque tipi o forme di energia (elettrica, meccanica, chimica, radiante, nucleare) e ciascuno di questi tipi o forme può esistere allo stato potenziale o allo stato cinetico.» (*Testo di chimica per il liceo scientifico*)

(b) «Va osservato che esistono altre forme di energia oltre quella cinetica, potenziale e termica, quali, ad esempio, l’energia elettrica, magnetica e nucleare.» (*Testo universitario per ingegneria e fisica*)

(c) «[...] la forza elettrica compie un lavoro e trasforma l’energia potenziale elettrostatica in energia elettrica.» (*Testo di fisica per il liceo scientifico*)

(3) – CITAZIONE

«L’energia potenziale di un corpo è il lavoro che un corpo può compiere grazie alla sua posizione» (*Autori vari*). Commentare.

(4) - CITAZIONE

«La fisica classica ed il comune modo di condurre i ragionamenti suggeriscono infatti che l’energia posseduta da un corpo (potenziale, termica, ecc.) può diminuire, al limite può anche annullarsi, ma non può certo assumere valori minori di zero; è come vuotare un bicchiere d’acqua: quando è stata versata l’ultima goccia, altro non si può fare; non è facile pensare a quantità d’acqua negative!» (*Testo di Fisica per il liceo scientifico*). Commentare.

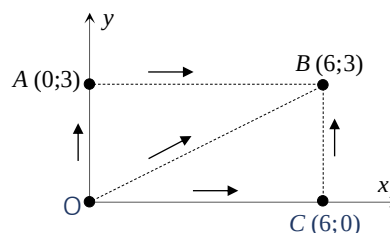
(5) Un punto P è in movimento nel piano cartesiano xy sotto l’azione di alcune forze tra cui la forza $\vec{F} = (5N)\vec{u}_x + (2N)\vec{u}_y + (11N)\vec{u}_z$. Si determini il lavoro compiuto da tale forza quando il punto mobile si sposta dalla posizione A ($x = 15$ cm, $y = 0$, $z = 3$ cm) alla posizione B ($x = 0$, $y = 15$ cm, $z = 3$ cm).

(6) Una ipotetica forza avente direzione sempre uguale a quella della velocità del punto su cui agisce non sarebbe conservativa (*vero/falso*)

(7) La forza $\vec{F} = y^2\vec{u}_x + 5x\vec{u}_y$ (unità SI) agisce su una particella K mobile nel piano cartesiano xy .

(a) Si chiarisca se tale forza è conservativa.

(b) Considerati (fig. 8) i punti A ($0;3$), B ($6;3$) e C ($6;0$), si calcoli il lavoro compiuto dalla forza in questione quando K si sposta da O a B lungo il percorso OAB , il percorso OCB , il percorso OB .

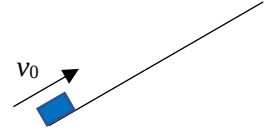


(8) Un corpo soggetto esclusivamente al peso parte da fermo da un livello 1 ($v_1 = 0$) e arriva a un livello 2 (figura) con una velocità $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Se ne può dedurre (*vero/falso*) che, se la velocità iniziale v_1 fosse stata 10 m/s , la velocità finale v_2 sarebbe stata $v_2 = v_1 + 10 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$, e più in generale che al generico valore v_1 della velocità iniziale corrisponde il valore $v_2 = v_1 + 10 \text{ m/s}$ della velocità finale.

● $v_1 = 0$

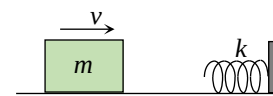
● $v_2 = 10 \text{ m/s}$

(9) Un corpo viene lanciato con velocità v_0 , nel senso della salita, lungo un piano inclinato privo di attrito. Si dimostri che, se si trascura la resistenza dell'aria, l'altezza raggiunta è del tutto indipendente dall'inclinazione del piano.

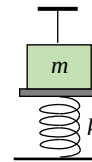


(10) Un sasso viene lanciato con velocità $\vec{v}_0$. Sapendo che $\vec{v}_0$ forma un angolo φ col terreno e che dopo il lancio agisce solo la forza peso, si determini l'altezza h raggiunta.

(11) Un blocco C di massa m scivola senza attrito con velocità v lungo un piano orizzontale, soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo. La corsa di C viene poi arrestata da una molla di rigidità k , che rilancia C in direzione opposta. Quale deformazione ha subito la molla?



(12) Un blocco C di massa m è sospeso a un filo: immediatamente al disotto di C c'è un piatto orizzontale di massa trascurabile sostenuto da una molla di costante elastica k . Di quanto si comprime la molla se si taglia il filo, prima di ridistendersi verso l'alto?



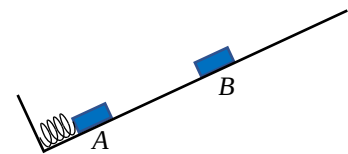
(13) Se le forze applicate ad un corpo hanno risultante zero, il relativo lavoro è zero e quindi non influisce sul valore dell'energia cinetica (*vero/falso*).

(14) Se R è il riferimento dell'energia potenziale, il valore dell'energia potenziale di una particella che si trova in R è zero (*vero/falso*).

(15) Se R è il riferimento dell'energia potenziale, il valore dell'energia potenziale di una particella è zero solo in R (*vero/falso*).

(16) Nella domanda precedente, la rappresentazione delle superfici equipotenziali non è in linea con le convenzioni che al riguardo vengono normalmente seguite. Spiegare.

(17) Un blocchetto è soggetto al peso, a una forza elastica, a forze di attrito. Nella posizione A l'energia cinetica di Q vale 30 J , l'energia potenziale gravitazionale -20 J , l'energia potenziale elastica 100 J . Nella posizione B i rispettivi valori sono invece 40 J , -10 J , -20 J . Determinare il lavoro compiuto dalle forze di attrito tra A e B.



(18) Citazioni: [A] «L'energia di un corpo è la misura del lavoro che il corpo può compiere in virtù del particolare stato in cui si trova» (*testo universitario per ingegneria e fisica*)

[B] «Abbiamo interpretato l'energia cinetica di un corpo come la sua capacità a compiere lavoro per effetto del movimento» (*testo universitario americano*)

[C] «Un corpo possiede energia quando è in grado di compiere lavoro [...]. Un corpo in movimento è in grado di compiere lavoro per effetto della velocità posseduta. Quando la velocità si annulla, il corpo perde la capacità di compiere lavoro» (*testo di fisica per il liceo scientifico*).

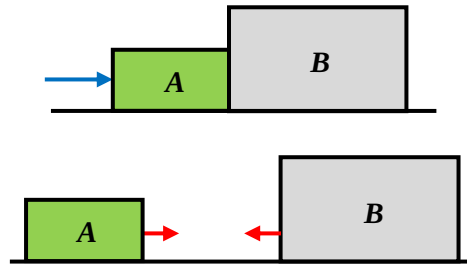
Dov'è l'errore nelle tre frasi?

SOLUZIONI

(1) Le due affermazioni sono corrette solo nel caso particolarissimo di forze **tra corpi a contatto**, perché in tal caso gli spostamenti delle due superfici a contatto sono identici.

Un caso diverso: se i due blocchi, inizialmente fermi, si attraggono in assenza di altre forze orizzontali (niente attrito), gli spostamenti (e quindi i lavori delle forze) sono inversamente proporzionali alle masse (il centro di massa resta immobile e si mantiene nulla la quantità di moto).

→ In contrasto con la citazione, il lavoro su *A* e quello su *B* sono **entrambi** positivi e hanno valori **diversi**.



(2) [Da Tonzig - “100 errori di fisica”, cap.47] A volte sembra quasi una gara a chi, di possibili forme di energia, ne scova di più. Sotto tale aspetto, l’Autore [a] resta, con solo cinque forme di energia al suo attivo, nella normalità. Altri chiamano in causa anche l’energia termica, l’energia magnetica, l’energia elastica, l’energia sonora, l’energia solare, l’energia eolica, l’energia geotermica, l’energia mareomotrice... e via sbizzarrendosi. [...]

Quanto alle «molte forme di energia», il concetto mi sembra non solo poco interessante, ma anche abbastanza pericoloso, perché suggerisce idee perverse: per esempio, che l’energia termica, l’energia del vento, l’energia delle maree non abbiano nulla a che vedere con l’energia cinetica; che l’energia elastica non sia, in definitiva, energia potenziale legata all’interazione elettromagnetica tra molecole; che l’energia gravitazionale o elettrica o chimica o nucleare non siano, ancora e sempre, energie di tipo potenziale (l’Autore [b] e l’Autore [d] lo negano esplicitamente). Al contrario, mi sembrerebbe più istruttivo unificare: sottolineare che, al di là dell’apparente molteplicità delle manifestazioni energetiche, l’idea ultima di energia è, in fisica classica almeno, una sola. Perché **dietro la parola energia troviamo sempre, in ultima analisi, l’energia cinetica: $mv^2/2$ per le particelle di materia, hf per le particelle di radiazione** (h costante di Plank, f frequenza della radiazione).

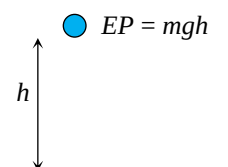
→ L’energia potenziale è il lavoro eventuale delle forze, e dunque l’eventuale aumento dell’energia cinetica = **energia cinetica allo stato di possibilità**.

Con la fisica moderna viene introdotta anche l’energia relativistica di quiete, o, come dice qualcuno, l’energia «intrinseca» della materia: $E_0 = mc^2$. Tale quantità può (entro limiti) trasformarsi in energia cinetica di particelle di materia (come nei processi di fissione e fusione nucleare) o di particelle di radiazione (come nei processi di annichilazione di ‘coppie’ costituite da particella e relativa antiparticella)

(3) Non «il lavoro che il corpo può compiere», bensì il lavoro che le forze applicate al corpo possono compiere (in relazione all’eventuale spostamento del corpo fino alla posizione di riferimento). E solo in casi eccezionali i due lavori sono uguali.

Quando (figura) un sasso di massa m cade subendo uno spostamento verticale h , la sua energia cinetica subisce un aumento mgh (lavoro della forza peso).

Se l’energia potenziale gravitazionale del sasso fosse legata al lavoro compiuto dal sasso, non subirebbe nessuna variazione perché la forza esercitata dal sasso sulla Terra non compie, durante la caduta, alcun lavoro. Così, l’energia del sasso non si sarebbe conservata, sarebbe aumentata. In realtà, l’*EP* gravitazionale del sasso subisce una diminuzione pari al lavoro mgh subito (e non ‘compiuto’), col che la sua energia totale si è conservata.



PRO MEMORIA:

→ L’**aumento** dell’*EC* (valore finale meno valore iniziale) è uguale al lavoro di tutte le forze applicate: $EC_f - EC_i = L_{tot}$

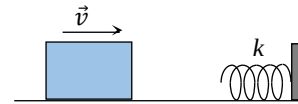
→ La **diminuzione** dell’*EP* (valore iniziale meno valore finale) è uguale al lavoro delle forze conservative: $EP_i - EP_f = L_{cons}$. E precisamente: la diminuzione dell’*EP* gravitazionale è uguale al lavoro delle forze gravitazionali, la diminuzione dell’*EP* elastica è uguale al lavoro delle forze elastiche, ecc.

ATTENZIONE: “aumento” dell’*EC* vuole solo dire differenza (variazione) calcolata come valore finale meno valore iniziale, l’aumento potrebbe essere negativo, l’*EC* potrebbe essere diminuita. La “diminu-

zione” dell’EP è la differenza calcolata come valore iniziale meno valore finale (per lavori negativi del lavoro l’EP risulta in realtà aumentata).

Esempio (figura): l’EP elastica del blocco rispetto alla posizione di massimo schiacciamento della molla è positiva o negativa?

L’EP elastica del blocco **non** è il lavoro positivo che il blocco «può compiere» comprimendo la molla, **bensi** il lavoro negativo compiuto dalla molla sul blocco dopo l’impatto: l’«aumento» dell’EC del blocco (lavoro delle forze agenti sul blocco) è qui negativo, ed è negativa anche la «diminuzione» della sua EP elastica (lavoro resistente della molla sul blocco).



(4) Dunque, a detta dell’autore l’energia potenziale non può assumere valori negativi. Cito da *Tonzig - 100 errori di fisica*, cap.44, “Un segno meno per l’energia”.

«Circa il comune modo di condurre i ragionamenti, penso che tutto sia possibile e preferisco non prendere impegni. Ma sul fatto che la fisica classica suggerisca che l’energia non può assumere valori negativi, mi sentirei di fornire al lettore [...] le più ampie rassicurazioni: la fisica classica suggerisce un’infinità di cose, ma questa proprio non la suggerisce. Certo, un’energia cinetica negativa non esiste [...] Ma l’energia potenziale, in quanto «lavoro eventuale delle forze conservative», per quale ragione al mondo non dovrebbe poter essere negativa? L’energia potenziale gravitazionale del bicchiere posto sul tavolo non è forse negativa rispetto al riferimento del soffitto?

Mi chiedo: ha mai sentito parlare, l’Autore, di livelli energetici degli elettroni atomici? E non ha mai notato che, avendo posto il riferimento dell’energia potenziale elettrostatica a distanza infinitamente grande, l’energia complessiva di un elettrone atomico assume solo valori negativi? Non sa che [...] per un pianeta o per un satellite si può dire esattamente la stessa cosa?

Un elettrone atomico è ‘legato’ al nucleo proprio perché non è abbastanza veloce per andarsene, la sua energia cinetica è inferiore al lavoro resistente che verrebbe compiuto dall’attrazione elettrostatica proveniente dal nucleo quando l’elettrone se ne stesse allontanando.

Stessa cosa, in ambito gravitazionale, per i satelliti della Terra (Luna più artificiali) e per i pianeti del Sole.

(5) Il lavoro $L = \vec{F} \times \overrightarrow{AB}$ compiuto dalla forza $\vec{F}$ è la somma dei lavori compiuti dai suoi componenti cartesiani:

$$L = L_x + L_y + L_z = F_x AB_x + F_y AB_y + F_z AB_z.$$

Il lavoro del componente x è $L_x = -5 \text{ N} \times 0,15 \text{ m} = -0,75 \text{ J}$, il lavoro del componente y è

$L_y = 2 \text{ N} \times 0,15 \text{ m} = 0,30 \text{ J}$, il lavoro del componente z è zero. Pertanto, $L = L_x + L_y + L_z = -0,45 \text{ J}$.

(6) Vero: essendo sempre e solo positivo, il lavoro di tale forza non potrebbe essere zero su un percorso chiuso.

(7) (a) Devono risultare uguali le derivate ‘in croce’ delle componenti cartesiane della forza. Nel caso qui considerato è $\partial F_x / \partial y = 2y$ mentre $\partial F_y / \partial x = 5$, dunque la forza non è conservativa.

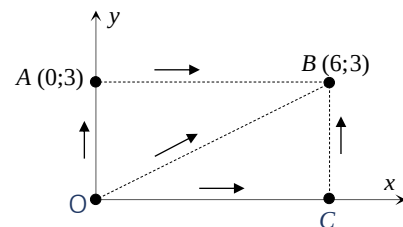
(b) Non essendo la forza conservativa, ci aspettiamo che il lavoro possa risultare diverso lungo i diversi percorsi.

Da O ad A il percorso è verticale, quindi lavora solo il componente verticale $5x\vec{u}_y$ della forza, che però su tale tratto ($x = 0$) è zero: il lavoro è zero.

Da A a B lavora solo il componente orizzontale $y^2\vec{u}_x$, che su tale tratto ($y = 3$) ha valore costante 3^2 N . Dato che lo spostamento è 6 m , il lavoro è 54 J . Complessivamente, lungo il percorso OAB il lavoro è 54 J .

Da O a C lavora solo il componente orizzontale $y^2\vec{u}_x$ della forza, che però su tale tratto ($y = 0$) è zero: lavoro uguale a zero. Da C a B lavora solo il componente verticale $5x\vec{u}_y$, che su tale tratto ha valore costante $5 \times 6 \text{ N}$. Dato che lo spostamento è 3 m , il lavoro è 90 J . In totale, il lavoro lungo il percorso OCB è 90 J .

Nel tratto da O a B (lungo il quale è $y = 0,5x$) il lavoro elementare dL è la somma del lavoro dL_x compiuto dal componente x e del lavoro dL_y compiuto dal componente y . Risulta $dL_x = F_x dx = y^2 dx = (0,5x)^2 dx$, $dL_y = F_y dy = 5x dy = 10 y dy$. Il lavoro complessivo del componente x è pertanto



$L_x = \int_0^6 (0,5x)^2 dx = 0,25 \left[x^3/3 \right]_0^6 = 18 \text{ J}$. Il lavoro complessivo del componente y è

$L_y = \int_0^3 10y dy = 10 \left[y^2/2 \right]_0^3 = 45 \text{ J}$. In totale, il lavoro della forza è $L = L_x + L_y = 18 \text{ J} + 45 \text{ J} = 63 \text{ J}$.

(8) Falso. Ciò che resta sempre uguale nel passaggio dal livello 1 al livello 2 è il lavoro della forza peso: perciò è sempre lo stesso l'aumento dell'energia cinetica, vale a dire è sempre uguale l'aumento $v_2^2 - v_1^2$ del quadrato della velocità (nel caso specifico, $100 \text{ m}^2/\text{s}^2$). Ciò significa che (come si ottiene subito anche con considerazioni di cinematica^[1]) l'aumento della velocità è tanto più piccolo quanto più grande è la velocità iniziale. Ad esempio, per $v_1 = 10 \text{ m/s}$ sarebbe $v_2 = 14,4 \text{ m/s}$.

(9) La velocità finale è zero, il lavoro delle forze si riduce al lavoro del peso (in assenza di attrito la reazione del vincolo è perpendicolare alla velocità e non compie lavoro). Pertanto $0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$, da cui $h = v_0^2/2g$, **esattamente come se il corpo fosse stato lanciato verticalmente**. Al variare dell'inclinazione del piano, resta comunque vero che la velocità finale è zero, perciò è sempre uguale il lavoro del peso tra posizione iniziale e posizione finale, ed è quindi sempre uguale, a pari velocità di lancio, l'altezza raggiunta.

(10) Non essendoci forza in direzione orizzontale, il componente orizzontale di $\vec{v}_0$ ha valore $v_0 \cos \varphi$ costante. Pertanto nel punto più alto, dove la velocità ha direzione orizzontale, risulta $v = v_0 \cos \varphi$. Per il teorema dell'energia cinetica

$\frac{1}{2}m(v_0 \cos \varphi)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$, da cui $h = v_0^2(1 - \cos^2 \varphi)/2g = (v_0 \sin \varphi)^2/2g$ (ottenibile direttamente considerando il solo componente verticale del moto).

(11) Sia x_M la deformazione massima della molla. In corrispondenza di tale valore della deformazione l'energia cinetica del blocco è zero, il lavoro compiuto dalla molla è $-\frac{1}{2}kx_M^2$. Per il teorema dell'energia cinetica $0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx_M^2$, da cui $x = v\sqrt{m/k}$.

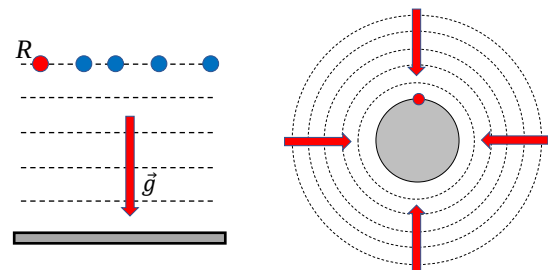
(12) Se il blocco subisce lo spostamento $\vec{y}$, il lavoro della forza elastica è $-\frac{1}{2}ky^2$, il lavoro della forza peso è mgy . L'energia cinetica di C è zero sia nell'istante iniziale che nell'istante finale (massima compressione della molla). Dunque, il lavoro complessivo deve essere a sua volta zero: $mgy - \frac{1}{2}ky^2 = 0$, da cui $y = 0$ (molla indeformata) oppure $y = 2mg/k$ (la soluzione che ci interessa)^[2].

(13) Falso: ad esempio, una coppia di forze ha risultante zero, ma per effetto di una coppia un corpo rigido può entrare in rotazione e acquistare energia cinetica. Oppure, molla sottoposta ad allungamento per effetto di due forze di uguale valore e direzione opposta.

Quello che un sistema di forze a risultante zero non può modificare è la velocità del centro di massa, e dunque la quantità di moto del sistema.

(14) Vero: un percorso da R a R è un percorso chiuso, perciò il lavoro complessivo di una forza conservativa lungo tale percorso è zero.

(15) Falso: se, a partire da R (figura), una particella si sposta sempre e solo perpendicolarmente alla direzione di una forza conservativa, tale forza non compie mai lavoro, perciò l'energia potenziale della particella non subisce variazioni.



Superfici equipotenziali e accelerazione di gravità nel campo gravitazionale terrestre

¹ La velocità aumenta in ogni caso di $9,8 \text{ m/s}$ ad ogni secondo, ma più grande è la velocità iniziale più rapidamente il corpo passa dal livello iniziale al livello finale, e quindi più breve è il tempo a disposizione per l'aumento della velocità.

² Si noti che sarebbe gravemente erroneo cercare la soluzione imponendo la condizione $mg = ky$, imponendo cioè che sia zero la forza complessiva su C . Tale valore di y corrisponde o a una possibile situazione di equilibrio, oppure al fatto che è zero l'accelerazione di C (e massima la sua velocità), e quindi *non* alla situazione di massima deformazione della molla.

(16) La distanza tra due superfici consecutive dovrebbe aumentare man mano che ci si allontana dal centro della Terra, a indicare la diminuzione di g ($P = mg = -dEP_g/dl$, dove dl è uno spostamento infinitesimo nella direzione del campo $\vec{g} \rightarrow$ se g diminuisce, diminuisce la rapidità di variazione di EP_g).

(17) Se non ci fosse attrito, l'energia complessiva avrebbe lo stesso valore (110 J) in A e in B. A causa invece delle forze di attrito, non conservative, l'energia in B vale soltanto 10 J. I 100 J mancanti corrispondono evidentemente al lavoro resistente compiuto tra A e B dalle forze di attrito.

$$L_{\text{tot}} = \Delta EC = (40 - 30) \text{ J} = 10 \text{ J}$$

$$L_{\text{grav}} = -\Delta EP_{\text{grav}} = -(-10 + 20) \text{ J} = -10 \text{ J}$$

$$L_{\text{elast}} = -\Delta EP_{\text{elast}} = -(-20 - 100) \text{ J} = 120 \text{ J}$$

$$L_{\text{attr}} = L_{\text{tot}} - L_{\text{grav}} - L_{\text{elast}} = (10 + 10 - 120) \text{ J} = -100 \text{ J}.$$

(18) [da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.40, “Il comune senso dell'energia”]

Quello di definire l'energia di un corpo come la sua «capacità di compiere lavoro», o la sua «attitudine all'esecuzione di lavoro», è un malvezzo estremamente diffuso [...].

È sicuramente una definizione piacevole, anche perché trova riscontro nel significato (peraltro un po' vago) che ai vocaboli energia e lavoro si dà nel linguaggio di ogni giorno: secondo il quale, chi ha molta energia può compiere molto lavoro. Sennonché, in fisica i termini energia e lavoro hanno un significato tutto particolare, che va preso per quello che è. Secondo il linguaggio corrente il lavoro si ricollega all'idea di fatica, e questa all'idea di sforzo e insieme all'idea di tempo (durata dello sforzo), mentre secondo la terminologia della fisica il lavoro si ricollega all'idea di forza e all'idea di *spostamento nella direzione della forza*: senza del quale spostamento, per grande che sia la forza il lavoro è zero. [...]

Esempio. Un blocco A, portatore di una carica elettrica positiva, viene lanciato lungo un piano orizzontale, in assenza d'aria e di attrito, verso un blocco B che non ha possibilità di movimento, a sua volta carico di segno più. Dato che ognuno dei due blocchi esercita sull'altro una forza repulsiva, dal momento del lancio in poi A procede verso B perdendo via via velocità: se la sua velocità iniziale non è troppo grande, si arresta prima di arrivare a contatto con B per poi ripartire immediatamente dopo in direzione opposta. Durante la fase di rallentamento, A perde tutta la sua energia cinetica: quanto lavoro ha compiuto? Zero, visto che B, al quale è applicata la forza proveniente da A, non si è mosso. Viceversa B, pur essendo completamente privo di energia cinetica, ha compiuto un lavoro resistente esattamente uguale all'energia cinetica persa da A. E, dato che nulla vieta di ripetere l'esperienza all'infinito, la conclusione è che *da un corpo privo di energia cinetica ci si può aspettare un lavoro comunque grande*. E allora? Allora siamo all'evidenza: l'energia cinetica di un corpo non rappresenta affatto la sua attitudine all'esecuzione di lavoro. Al cap.43 il discorso verrà esteso all'energia potenziale. E alla bella favola che l'energia di un corpo sia il lavoro che esso può compiere, qualcuno forse non crederà più.^[3]

³ A sostegno della tesi secondo cui l'energia di un corpo è il lavoro che il corpo può compiere, viene a volte portato il primo principio della termodinamica nella forma tipica $q = L + \Delta U$, a norma della quale il lavoro L compiuto in condizioni adiabatiche ($q = 0$) viene pagato con una equivalente diminuzione dell'energia U del sistema considerato. A parte l'ipotesi restrittiva della mancanza di scambi termici, faccio notare che il lavoro L della formula non è *tutto* il lavoro compiuto dal sistema, ma solo il cosiddetto ‘lavoro termodinamico’: il lavoro che viene compiuto dal sistema su corpi che si trovano a contatto del sistema, quindi in circostanze tali per cui il lavoro compiuto *dal* sistema è necessariamente uguale, a parte il segno, a quello compiuto *sul* sistema. Per di più, l'energia U della formula non include *tutta* l'energia potenziale del sistema, ma solo quella legata alle interazioni interne.

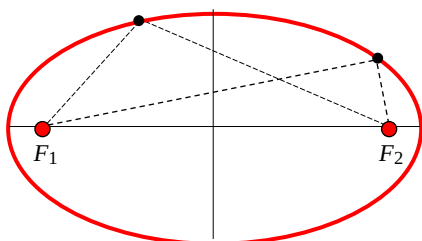
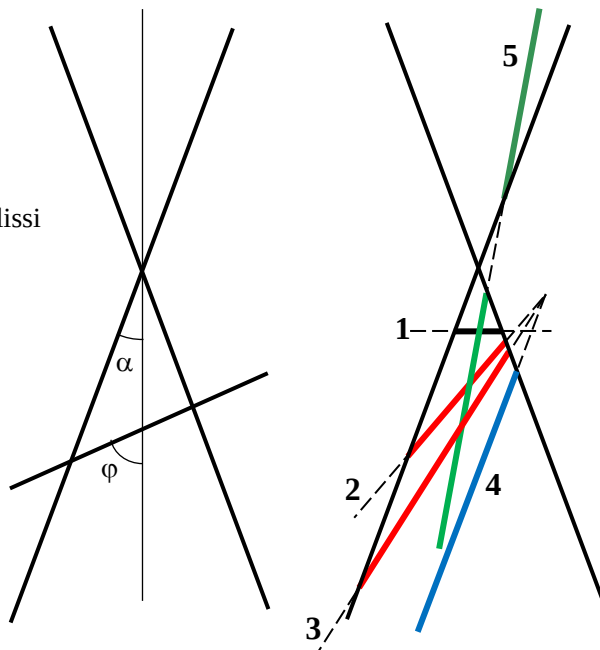
ESERCITAZIONE N.6

GRAVITAZIONE

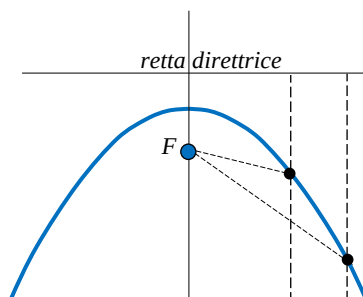
LE SEZIONI CONICHE

Sezioni di un cono di semiapertura α

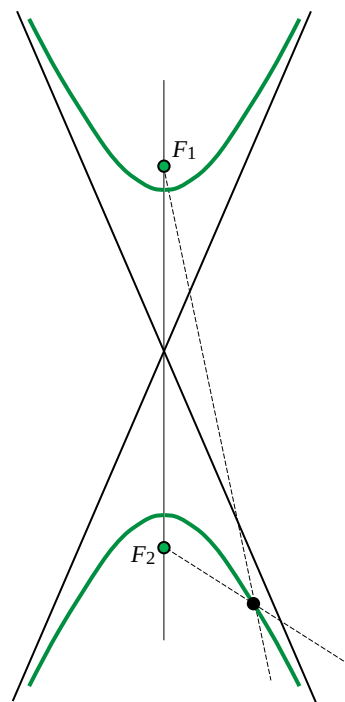
- 1 $\varphi = 90^\circ \rightarrow$ circonferenza
- 2,3 φ compreso fra 90° e α , estremi esclusi $\rightarrow$ ellissi
via più allungate al tendere di φ ad α
- 4 $\varphi = \alpha \rightarrow$ parabola
- 5 $\varphi > \alpha \rightarrow$ iperbole (due rami)



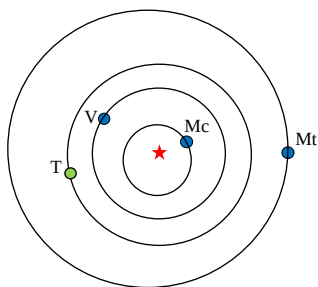
La somma delle distanze dai due fuochi è uguale per tutti i punti dell'ellisse. Se un raggio luminoso viene emesso da un fuoco, il raggio riflesso passa dall'altro fuoco.



Le tangenti alla parabola all'infinito sono parallele all'asse della parabola. Ogni punto della parabola è equidistante dal fuoco e dalla retta direttrice. Se un raggio luminoso viene emesso dal fuoco, il raggio riflesso è parallelo all'asse.



Le tangenti all'infinito sono gli asintoti. Per ogni punto dell'iperbole sono uguali le differenze fra le distanze dei due fuochi. Se un raggio luminoso viene emesso da un fuoco, il prolungamento del raggio riflesso passa dall'altro fuoco.



Orbite dei quattro pianeti più vicini al Sole (Mercurio, Venere, Terra, Marte), e posizione da essi occupata il giorno 1.4.1995. Si tratta a prima vista di circonferenze, tuttavia la posizione del Sole appare chiaramente eccentrica rispetto alle orbite di Mercurio e anche di Marte.

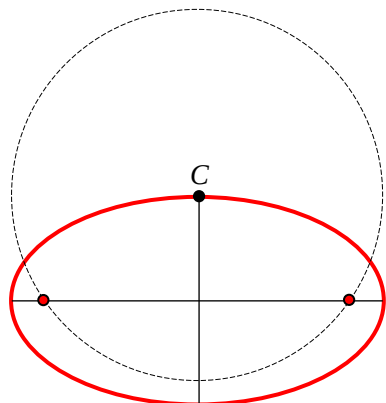
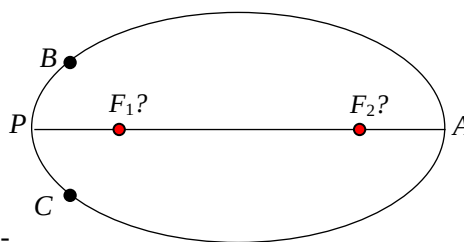
Parabola	$E_{\text{tot}} = 0$
Ellisse	$E_{\text{tot}} < 0$
Iperbole	$E_{\text{tot}} > 0$

INDIVIDUAZIONE DEI FUOCHI

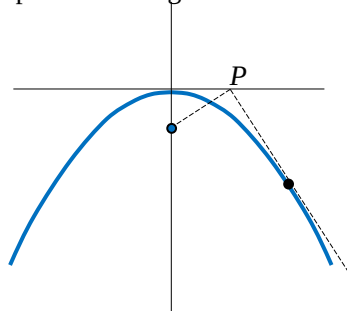
Dove sono i fuochi?

Se li posiziono ‘a occhio’ (come nella figura a lato) rischio di pensare che per un satellite della Terra ci possano essere altre posizioni (B e C in figura), oltre che gli estremi dell’asse maggiore, di perpendicolarità tra segmento Terra-satellite e tangente alla traiettoria.

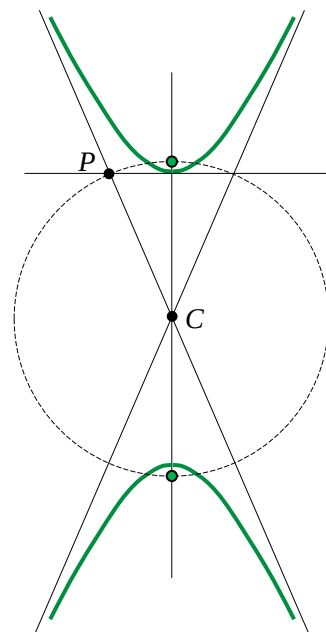
Se l’angolo tra velocità e raggio vettore fosse retto in B e C , dopo la riflessione un raggio proveniente da un fuoco si rifletterebbe su sé stesso anziché passare dall’altro fuoco! Il fatto è che nel disegno abbiamo dato al fuoco una posizione sbagliata.



Con centro C in uno degli estremi dell’asse minore si traccia una circonferenza di raggio pari al semiasse maggiore.



Dal punto P in cui la tangente nel vertice è intersecata da una qualsiasi altra tangente si manda la perpendicolare a questa seconda tangente.



I fuochi distano dal punto C di intersezione degli asintoti quanto C dista dall’intersezione P tra un asintoto e la tangente in un vertice.

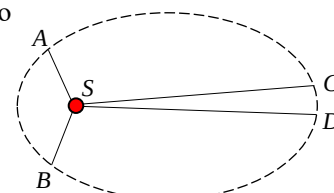
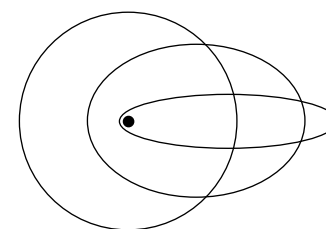
(1) Se le tre orbite satellitari rappresentate in figura hanno in comune la lunghezza $2a$ dell’asse maggiore, anche l’energia totale di un satellite di massa m assegnata è, sulle tre orbite, la stessa (vero/falso).

(2) Anche il periodo è lo stesso per le orbite con lo stesso asse maggiore (vero/falso)

(3) Il momento angolare (o “della quantità di moto”) di un pianeta rispetto al Sole è costante lungo l’orbita. Come si può dimostrare?

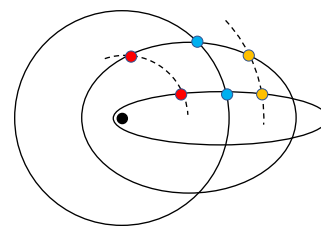
(4) La costanza della velocità areale (seconda legge di Keplero, vedi figura a lato) è conseguenza diretta della proprietà precedente (vero/falso).

(5) Il momento della quantità di moto è uguale per tutte le orbite aventi in comune la lunghezza dell’asse maggiore (vero/falso).

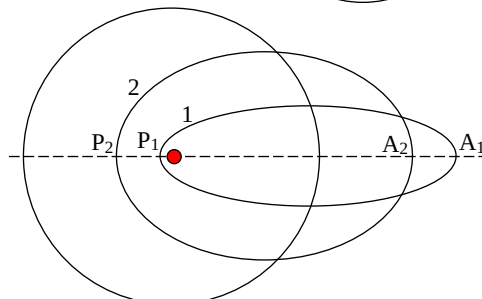


Se l’area ABS è uguale all’area SCD , il pianeta si sposta da A a B e da D a C in tempi uguali.

(6) Se per tre orbite satellitari (figura) è uguale la lunghezza dell'asse maggiore, nei punti equidistanti dalla Terra (stesso colore in figura) la velocità di un satellite di massa assegnata ha sulle varie orbite lo stesso valore (*vero/falso*).



(7) Le tre orbite del disegno a lato hanno un asse maggiore di uguale lunghezza $2a$. Come variano da un'orbita all'altra le velocità massime? E le velocità minime?



(8) Se un satellite in orbita viene colpito da un meteorite che sta cadendo verso la Terra, possiamo affermare che immediatamente prima dell'urto i due corpi avevano la stessa accelerazione (*vero/falso*).

(9) A che altezza sulla superficie terrestre si trova un satellite «geostazionario» (un satellite cioè immobile rispetto alla Terra)?

(10) Come mai, in un lancio in assenza d'aria, non occorre una velocità infinita per raggiungere una distanza infinita? Non c'è la formula $v = \sqrt{2gh}$ (da $0 = mv^2/2 - mgh$) ?

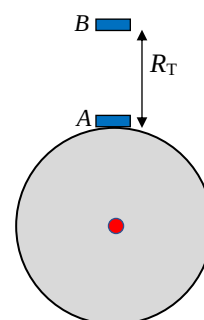
(11) Come mai, se un oggetto si allontana dalla Terra fino all'infinito, il lavoro della forza gravitazionale (il suo peso) non è a sua volta infinito pur essendo la forza sempre diversa da zero?

(12) Che differenza c'è tra accelerazione gravitazionale della Luna e accelerazione gravitazionale sulla Luna?

(13) In che rapporto stanno, a parità di velocità iniziale, le altezze raggiunte sulla Terra e sulla Luna con un lancio verticale? La massa della Luna è 1,2 centesimi della massa della Terra, il raggio della Luna è 27 centesimi di quello della Terra.

(14) È vero che gli astronauti in orbita sperimentano l'assenza di peso?

(15) Un oggetto A di massa m (figura) subisce un breve spostamento verticale h in prossimità della superficie terrestre. Un oggetto B di massa uguale, posto sulla verticale per A e distante da A un raggio terrestre (R_T), subisce a sua volta lo stesso spostamento verticale. È possibile calcolare il lavoro complessivo delle forze gravitazionali concentrando la massa del sistema A + B nel centro di massa? È possibile calcolarlo concentrando la massa nel baricentro?



(16) Citazioni: [A] «Essendo il baricentro il punto nel quale è applicato il peso del corpo [...]» (*Testo di fisica per il liceo scientifico*)

[B] «Prende il nome di *baricentro* il punto di applicazione del risultante delle forze peso di un corpo esteso.» (*Testo di fisica per i licei scientifici*)

[C] «Il baricentro [...] rappresenta il punto G in cui può pensarsi applicato il peso del corpo.» (*Testo di fisica per il liceo scientifico*).

Commentare.

(17) In [questo documento](#), di provenienza NASA Space Place, si vuole a un certo punto spiegare come mai i satelliti se ne stanno in orbita senza cadere. La spiegazione che viene data è questa: "This happens because there is a balance between the energy the satellite picked up from the rocket – called momentum – and the pull of Earth's gravity. The balance of these two forces can keep a satellite in orbit for many years".

Commentare.

SOLUZIONI

(1) Vero. Se il riferimento dell'energia potenziale gravitazionale è all'infinito, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale è

$$[A] \quad E_{\text{tot}} = EP_{\infty} + EC = -(\mathbf{GmM})/2a \quad [\text{cfr. testo cap.11 domanda 30}]$$

- proporzionale alla massa m del satellite
- inversamente proporzionale alla lunghezza $2a$ dell'asse maggiore
- **indipendente dalla lunghezza dell'asse minore** (eccentricità dell'ellisse) (vedi nel testo a pag.327)

Caso particolare di un'orbita circolare:

$$L_g = GmM(1/r_f - 1/r_i) \rightarrow EP_{\infty} = -(\mathbf{GmM})/R \quad (\text{costante lungo l'orbita})$$

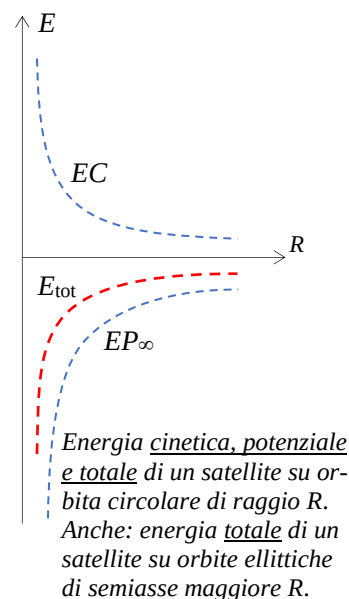
$$EC = (\mathbf{GmM})/2R = -EP_{\infty}/2 \quad (\text{costante lungo l'orbita})$$

[ottenuta da "forza centripeta uguale a peso":

$$mv^2/R = GmM/R^2 \rightarrow EC = mv^2/2 = \dots]$$

$$E_{\text{tot}} = EC + EP_{\infty} = -(\mathbf{GmM})/2R \quad (\text{in accordo con la [A]})$$

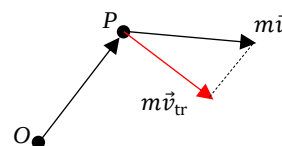
$$E_{\text{tot}} = -EC = EP_{\infty}/2$$



(2) Vero, terza legge di Keplero (costanza del rapporto T^2/R^3 , con R = semiasse maggiore)

$$(3) \text{ Vero. Promemoria: } \vec{L} = \vec{OP} \times m\vec{v} \rightarrow L = |\vec{OP}| \cdot m v_{\text{tr}}$$

Vale a dire: il momento della quantità di moto (= momento angolare) del punto mobile P rispetto al polo O è uguale, in modulo, al prodotto della distanza di P da O per la quantità di moto trasversa di P (massa per componente di velocità perpendicolare al vettore-posizione $\vec{OP}$).



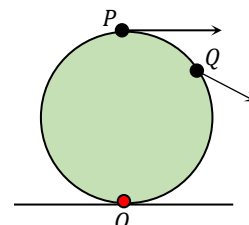
Teorema del momento della quantità di moto (**seconda equazione cardinale della dinamica**): rispetto a un polo O risulta (a certe precise condizioni, vedi più sotto).

$$[A] \quad \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \text{cfr. prima equazione cardinale} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (= \frac{m d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \text{ se } m \text{ è costante})$$

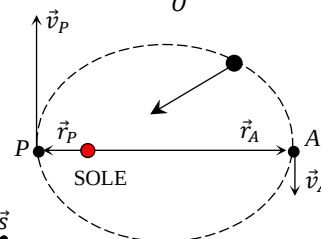
$$\text{Più in generale [B]} \quad \vec{\tau}_O = d\vec{L}_O/dt + \vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM}$$

Validità della forma [A]

- Quando la velocità del CM del corpo in movimento è zero (non è il nostro caso), il polo A può essere un punto qualsiasi.
- Quando la velocità del CM non è zero ma il polo è un punto avente velocità zero (nella figura a destra il punto O), oppure il CM, oppure un punto che si sta muovendo parallelamente al centro di massa del sistema (in figura il punto P , non il punto Q)



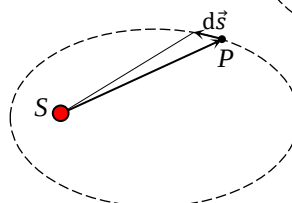
→ Rispetto al Sole, il momento $\vec{\tau}$ dell'attrazione gravitazionale su un pianeta è zero (la retta d'azione della forza passa dal Sole, figura) e quindi **il momento angolare $\vec{L}$ del pianeta rispetto al Sole è costante**. In figura, $L = \text{cost.} = m v_P r_P = m v_A r_A$.



(4) Vero, **il momento L^* della quantità di moto rispetto al Sole è proporzionale alla velocità areale v^*** .

Risulta $L^* = 2m\vec{v}^*$. Dimostrazione (figura):

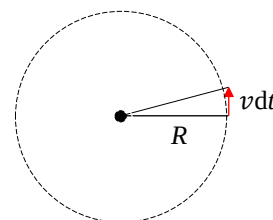
$$\vec{v}^*(1/2) (\vec{SP} \times d\vec{s})/dt = (1/2) (\vec{SP} \times \vec{v}) = \vec{L}/2m \quad (\text{infatti } \vec{L} = \vec{SP} \times m\vec{v})$$



Caso particolare, circonferenza:

$$L = mvR \quad v^* = (1/2) (v dt) R/dt = vR/2 \quad (\text{figura a lato})$$

Ma è $v = \sqrt{GM/R}$ (da $mv^2/R = GmM/R^2$), perciò



$$L = m \sqrt{GMR}, \quad v^* = \sqrt{GMR/4} = L/2m.$$

(5) Falso: a parità di asse maggiore, il momento della quantità di moto è tanto minore quanto minore è l'asse minore (minore l'area, maggiore l'eccentricità, lo schiacciamento) dell'ellisse.

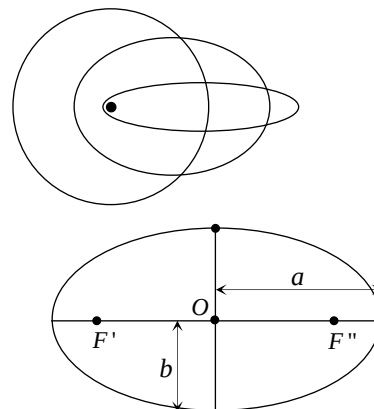
DIPENDENZA di v^* e quindi di L dall'eccentricità

(a) Il tempo T di percorrenza delle tre ellissi considerate (asse maggiore uguale) è esattamente lo stesso (terza legge di Keplero);

(b) l'area di una ellisse è $A = \pi ab$, direttamente proporzionale alla lunghezza dei semiassi;

(c) la velocità areale v^* (costante) può essere calcolata come rapporto tra l'area A dell'ellisse e il tempo complessivo di percorrenza T :

$v^* = A/T = \pi ab / T$. Dato che T è lo stesso per le tre ellissi, ne consegue che per tali ellissi la velocità areale diminuisce in proporzione all'area, e dunque a b .



→ Lo stesso può allora dirsi per il momento della quantità di moto $L = mv^*$.

(6) Vero. Nei punti equidistanti dalla Terra è uguale, per un satellite di massa m , l'energia potenziale $EP_\infty = -(GmM)/r$. Avendo l'energia totale, per l'uguaglianza dell'asse maggiore, lo stesso valore $-(GmM)/2a$ in tutti i punti delle possibili orbite, nei punti equidistanti dalla Terra dovrà essere uguale, oltre all'energia potenziale, anche l'energia cinetica e quindi la velocità

→ Per un data lunghezza dell'asse maggiore di un'orbita, a ogni punto del campo gravitazionale prodotto dalla Terra è univocamente associato un preciso valore dell'energia cinetica $mv^2/2$ di un satellite. La velocità v del satellite in tale punto sarà inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa m (massa quattro volte più grande, velocità due volte più piccola).

(7) (a) L'energia complessiva $E = EC + EP_\infty = -GmM/2a$ è costante lungo una stessa orbita ed è la stessa sulle tre orbite.

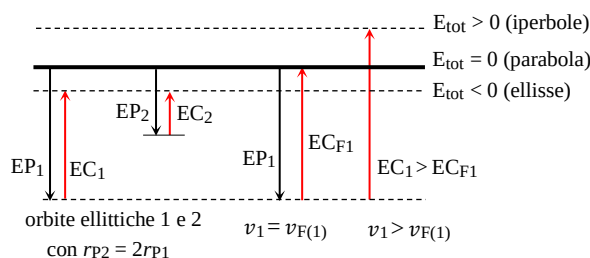
(b) Da P_1 c'è, rispetto a P_2 , un più grande lavoro resistente della gravità per un allontanamento fino all'infinito → è più grande in modulo il valore negativo dell' EP_∞ .

(c) Allora in P_1 è di altrettanto più grande, rispetto a P_2 , il valore positivo dell' EC .

(d) Viceversa, all'afelio dell'orbita 1 è minore in modulo il valore negativo dell' EP_∞ , quindi sarà di altrettanto più piccolo il valore positivo dell' EC .

Per esempio, se P_1 fosse due volte più vicino di P_2 , l' EP_∞ (inversamente proporzionale a r) sarebbe, in P_1 , due volte più grande in modulo (figura) e l' EC sarebbe (figura) di altrettanto più grande (l'energia complessiva è la stessa).

→ Lungo l'orbita circolare la velocità è costante. All'aumentare, da zero, dell'eccentricità ('schiacciamento', rapporto fra distanza tra i fuochi e lunghezza asse maggiore) aumenta la differenza tra velocità massima e velocità minima lungo una data orbita: aumenta infatti il valore della velocità massima (perielio) e diminuisce il valore della velocità minima (afelio).



(8) Vero (se si trascura, come ragionevole, l'interazione gravitazionale tra i due oggetti): quali che fossero le diverse condizioni di velocità (valore e direzione), essendo i due corpi soggetti esclusivamente alle forze del campo gravitazionale l'accelerazione era per entrambi l'accelerazione locale di gravità, rapporto tra peso e massa ($g = GM/r^2$, con direzione verso il centro della Terra).

(9) Il periodo T del satellite è 24 ore. Dovendo il rapporto T^2/R^3 avere lo stesso valore per il satellite e per la Luna, risulta, esprimendo i periodi in giorni,

$$R_S = R_L \sqrt[3]{(T_S/T_L)^2} = 384\,000 \text{ km} \times \sqrt[3]{(1/27,3)^2} = 42\,354 \text{ km}.$$

Il satellite dista perciò circa $(42\,354 - 6\,378) \text{ km} \approx 36\,000 \text{ km}$ dalla superficie terrestre.

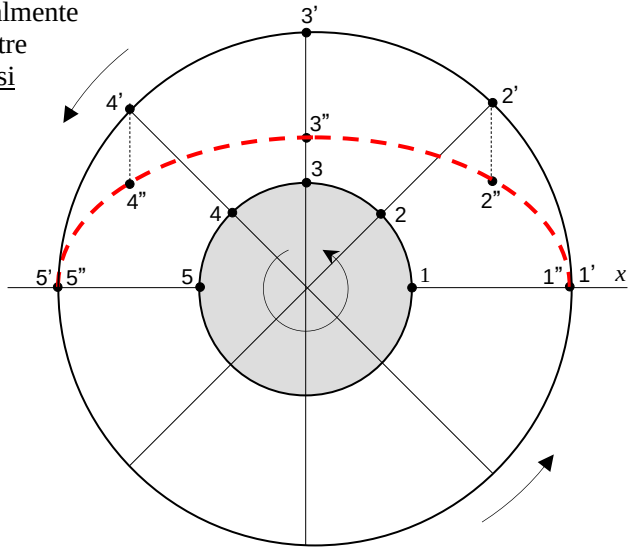
NB. Per il raggio della Terra si è assunto il valore del raggio all'equatore, **trovandosi necessariamente la traiettoria del satellite nel piano equatoriale** (in caso contrario, il satellite non potrebbe trovarsi

costantemente né sullo stesso parallelo né sullo stesso meridiano, non sarebbe cioè ‘geostazionario’). Se all'istante 1 il satellite non-geostazionario S (traiettoria tratteggiata in rosso) si trova nel piano equatoriale sopra il meridiano M, sarà su M anche dopo 6, 12 e 18 ore. Nelle prime 3 ore dopo l'istante zero S si sposta gradualmente su meridiani sempre più a Ovest (ritarda su M), nelle tre ore successive recupera. Idem a partire dall'istante $t = 12$ h. Viceversa, nelle prime tre ore dopo gli istanti $t = 6$ h e $t = 18$ h S si sposta gradualmente su meridiani sempre più a Est (anticipa), poi nelle tre ore successive M recupera. Vedere disegno (dove si immagina di guardare la Terra dalla stella Polare).

Il cerchio piccolo è la sezione della Terra col piano equatoriale. La circonferenza grande è l'orbita (fortemente rimpicciolita in proporzione al diametro terrestre) di un satellite sincrono nel piano equatoriale.

Ai punti 1, 2, 3, 4 e 5 dell'equatore (posizioni via via assunte da un meridiano terrestre) corrispondono le posizioni 1', 2', 3', 4' e 5' di un satellite sincrono sull'orbita equatoriale, le posizioni 1'', 2'', 3'', 4'' e 5'' di un satellite sincrono su un'orbita non equatoriale (ottenuta dalla precedente facendone ruotare il piano attorno alla retta x).

Si vede che le posizioni 2'' e 4'' **non** si trovano sullo stesso meridiano delle altre tre.



(10) La formula $L = \pm mgh$ **presuppone che il peso mg sia costante**.

Risulta invece: $L = \int_R^\infty \frac{GmM}{r^2} dr = GmM \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{GmM}{R}$ (energia potenziale gravitazionale a distanza R rispetto all'infinito).

Velocità “di fuga” (velocità zero all'infinito) $0 = mv^2/2 - GmM/R \rightarrow v = \sqrt{2GM/R}$.

(11) Perché il valore della forza (inversamente proporzionale al quadrato della distanza) tende a zero più rapidamente di quanto la distanza non tenda a infinito.

Se la forza fosse inversamente proporzionale alla distanza r , anziché al suo quadrato, il lavoro dalla distanza iniziale R_i fino all'infinito sarebbe infinito:

$$L = \int_{R_i}^\infty \frac{GmM}{r} dr = GmM [\ln r]_{R_i}^\infty = \infty$$

... e la velocità di fuga sarebbe a sua volta infinita.

(12) L'accelerazione *della* Luna (i 2,7 mm/s² calcolati da Newton) è quella che compete al moto di rivoluzione della Luna rispetto alla Terra, e dipende dalla forza gravitazionale a cui la Luna è soggetta per effetto della Terra. L'accelerazione *sulla* Luna (1,6 m/s², vedi domanda successiva) è quella di un corpo che cade sulla Luna, ed è essenzialmente prodotta dalla forza attrattiva esercitata sul corpo in questione dalla Luna.

Nota. La forza del Sole sulla Luna è più che doppia rispetto alla forza F_T esercitata sulla Luna dalla Terra. La forza gravitazionale complessiva sulla Luna oscilla fra un valore minimo $F_{\min} = 1,18 F_T$ (quando i tre corpi sono allineati e la Terra è, rispetto alla Luna, dalla parte opposta del Sole) e un valore massimo $F_{\max} = 3,18 F_T$ (quando i tre corpi sono allineati e, rispetto alla Luna, la Terra e il Sole sono dalla stessa parte). Nel riferimento delle stelle fisse, la traiettoria della Luna volge costantemente la concavità verso il Sole.

[Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.3 (“Evidenze e paradossi”)]

...A questo punto la domanda è: ma come diavolo è fatta, allora, la traiettoria della Luna? Risposta: è una ‘specie’ di circonferenza con centro nel Sole e con raggio di curvatura alternativamente un po’ più grande e un po’ più piccolo rispetto alla traiettoria, praticamente circolare, percorsa dalla Terra: più grande quando la Luna sta tra la Terra e il Sole (caso della fig. 15); più piccolo – curvatura quindi più stretta – quando, rispetto alla Luna, la Terra e il Sole stanno dalla stessa parte (fig. 14).

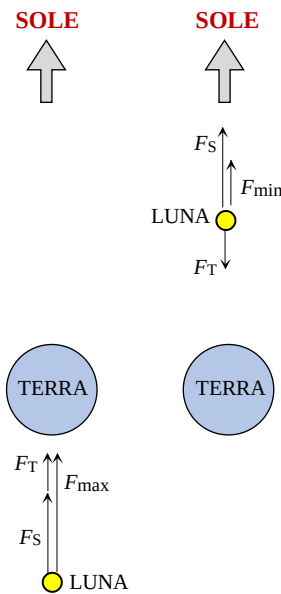


Fig. 14

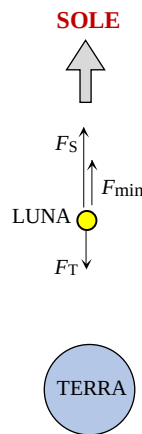


Fig. 15

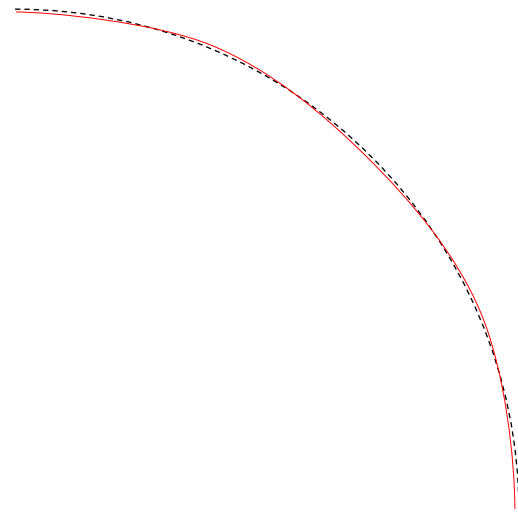


Fig. 16 – La linea nera a tratteggio rappresenta la traiettoria del centro della Terra, la linea rossa continua rappresenta la traiettoria della Luna.

Rappresentare il tutto in questa pagina nelle giuste proporzioni è impossibile dato che la distanza della Luna dalla Terra è quasi 400 volte più piccola del raggio dell'orbita terrestre: in una ipotetica rappresentazione in scala nella pagina, gli scostamenti della traiettoria della Luna da quella della Terra non sarebbero assolutamente visibili. Si accontenti il lettore di una rappresentazione molto approssimativa (fig.16).]

(13) Posto $M_L = 0,012 M_T$ e $R_L = 0,27 R_T$ si ottiene $g_L = GM_L/R_L^2 = 0,16 GM_T/R_T^2 = 0,16 g_T = 0,16 \times 9,8 \text{ m/s}^2 = \mathbf{1,6 \text{ m/s}^2}$ (6,25 volte più piccola che sulla Terra).

L'altezza raggiunta è $h = v^2/2g$ (per esempio da $0 = mv^2/2 - mgh$) inversamente proporzionale a g . Sulla Luna viene raggiunta un'altezza 6,25 volte più grande che sulla Terra. Così, ad esempio, il record del salto in alto (dal 1993, cubano Sotomajor), sarebbe $2,45 \text{ m} \times 6,25 = 15,31 \text{ m}$.

(14) Sì e no: ne sperimentano gli effetti, che però non sono dovuti all'assenza di peso (la bilancia segnerebbe zero anche su un ascensore in caduta libera). Sperimentano ciò che accadrebbe in un riferimento inerziale in assenza di peso.

Accelerazione di gravità a 1000 km di altezza sulla superficie terrestre

$$g/g_0 = (R_T + 1000 \text{ km})^2 / R_T^2 = 0,74 \approx 3/4$$

Un oggetto che sulla Terra pesa 100 kg, a 1000 km di quota pesa circa 74 kg.

$$\rightarrow \text{Peso di un satellite geostazionario: } P/P_0 \approx (6300 \text{ km} / 42000 \text{ km})^2 \rightarrow P = 0,15 P_0.$$

(15) Risposta negativa a entrambe le domande. A distanza R dal centro della Terra l'accelerazione di gravità è g_0 , a distanza $2R$ è $g_0/4 = 0,25 g_0$. Il lavoro **effettivo** è quindi

$$L = m(g_0 + 0,25 g_0)h = \mathbf{1,25 m g_0 h}.$$

Concentrando la massa nel CM (posto a distanza $1,5 R$ dal centro della Terra, dove

$$g = g_0/1,5^2 = 0,444 g_0) \text{ otteniamo}$$

$$L' = 2m(0,444 g_0)h = \mathbf{0,888 m g_0 h} = 0,888 L/1,25 = 0,710 L, \text{ un valore quindi } \mathbf{\text{inferiore}}$$
 a quello vero.

Il baricentro si trova invece a distanza $R/5$ sopra la superficie terrestre (distanza $1,2 R$ dal centro della Terra), dove l'accelerazione di gravità è $g_0/1,2^2 = 0,694 g_0$. Se localizziamo la massa del sistema nel baricentro otteniamo

$$L'' = 2m(0,694 g_0)h = \mathbf{1,39 m g_0 h} = 1,39 L/1,25 = 1,11 L, \text{ un valore questa volta } \mathbf{\text{superiore}}$$
 al valore vero.

$\rightarrow$ Quando la massa è distribuita in uno spazio entro al quale il campo gravitazionale non può

schematizzarsi come uniforme, nel calcolo del lavoro delle forze gravitazionali la massa deve essere lasciata dove effettivamente si trova.

(16) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.29 (“Il baricentro e la gallina”)]

Si potrebbe quasi dire che qui si fronteggiano due scuole di pensiero. Alla prima, la più fantasiosa, appartiene – per quel che ne so – il gruppo compatto degli Autori di manuali per la media inferiore. Alla seconda fanno capo quasi tutti gli Autori di manuali per il liceo.

Che il baricentro di un corpo K sia, come in [A] e [B] viene dichiarato (ecco la prima scuola di pensiero), il punto in cui il peso di K è applicato, è una tale sciocchezza che non metterebbe quasi conto di parlarne: se non fosse che a furia di sentirselo ripetere, qualcuno potrebbe anche cominciare a crederci.

Mi limito ad osservare che per molti corpi il baricentro è un punto esterno, un punto che *non appartiene* al corpo: nessuno dei punti di una bottiglia rappresenta il baricentro della bottiglia, nessuno dei punti della cupola di San Pietro rappresenta il baricentro della cupola di San Pietro. E come si può pensare che una forza agisca su un corpo senza essere applicata ad alcun punto del corpo?... (*continua*)

(17) In poche righe, si apprende qui quanto segue:

1. L'energia è detta quantità di moto (momentum);
2. L'energia e la quantità di moto sono forze;
3. L'equilibrio tra la forza-energia (o tra la forza-quantità di moto) e la forza attrattiva gravitazionale è ciò che permette al satellite di restare in orbita.

A questo punto, il lettore-studente-navigatore, già frastornato dall'idea che l'energia possa essere detta quantità di moto (che corrisponde in realtà a un'energia diviso una velocità) e che entrambe possano dirsi forze (che significa un'energia diviso una lunghezza), si chiederà come sia mai possibile che l'equilibrio fra due forze possa produrre, anziché un moto rettilineo, il moto circolare del satellite: e, non trovando risposta, il lettore-studente-navigatore penserà una volta di più che la fisica è quella dannata cosa che non si capirà mai.

ESERCITAZIONE N.7

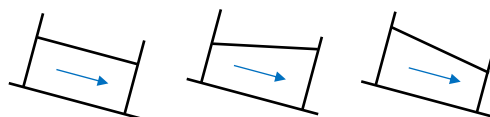
MECCANICA RELATIVA

- (1) Su un ascensore in caduta libera, un uomo lancia una pallina verso l'alto: che moto osserva prima e dopo l'urto contro il soffitto? Che moto osserverebbe se la direzione di lancio non fosse verticale?
- (2) Una barca si sposta alla velocità di 4 km/h rispetto all'acqua. Supponiamo che la barca debba attraversare un fiume largo 4 km, con una corrente che viaggia alla velocità di 2 km/h.
- (a) In quale direzione occorrerà dirigere la barca se si vuole che raggiunga il punto opposto a quello di partenza?
- (b) Quanto tempo occorrerà in tal caso per l'attraversamento del fiume?
- (c) Se si volesse attraversare il fiume nel più breve tempo possibile, in quale direzione bisognerebbe dirigere la barca?
- (d) Quanto tempo sarebbe necessario per compiere un tragitto di 12 km nel senso della corrente, per poi tornare al punto di partenza?

(3) Un'automobile percorre con velocità di valore costante una strada rettilinea. Se P è un punto di una ruota (che qui schematizziamo come disco rigido),

1. nel riferimento A dell'automobile il moto di P è circolare uniforme con accelerazione $\vec{a}$ costante in modulo e diretta sempre in senso centripeto (V/F);
2. in un riferimento B solidale col terreno la traiettoria del punto P è completamente diversa ma l'accelerazione ha in ogni istante lo stesso modulo e la stessa direzione che in A (V/F);
3. l'accelerazione tangenziale di P è in ogni istante la stessa in A e in B (V/F);
4. l'accelerazione centripeta di P è in ogni istante la stessa in A e in B (V/F).

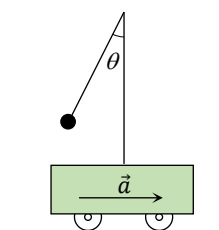
(4) Con riferimento a una vaschetta piena d'acqua che scivola *senza incontrare attrito* lungo un piano inclinato, quale delle tre figure rappresenta in modo corretto la posizione della superficie del liquido?



(5) Come mai, nella soluzione del problema precedente, non si è tenuto conto della pressione atmosferica? Se la superficie S del liquido è un rettangolo di lati 10 cm e 20 cm, l'atmosfera esercita su S una forza di 1 kgf/cm², quindi in totale 200 kgf!! Circa 100 volte maggiore del peso della vaschetta, se la vaschetta contiene 2 litri d'acqua.

(6) Si spieghi quale giudizio dà un osservatore K' , posto su una ruota panoramica di raggio R in rotazione con velocità angolare 0,8 rad/min, sulla velocità e sull'accelerazione di un corpo C soggetto solo al proprio peso.

(7) Pendolo su carrello che nel riferimento K del laboratorio (qui considerato inerziale) procede di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a}$: si osserva (figura) che il filo del pendolo tende ad assestarsi in una posizione in cui forma con la verticale un angolo θ definito da $\tan \theta = a/g$ (tanto più grande quanto maggiore è a). Come mai?



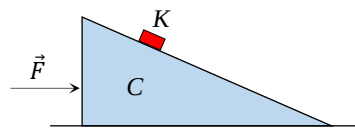
(8) Supponiamo che la velocità di rotazione della Terra sia tale per cui il peso apparente di un corpo situato all'equatore, immobile rispetto alla superficie terrestre, risulti zero. In quanto tempo la Terra girerebbe su se stessa?

(9) Un treno percorre una curva di raggio $R = 1000$ m alla velocità di 120 km/h. Determinare quali forze apparenti agiscono su un viaggiatore di peso 78 kg che si sposta lungo un corridoio con velocità relativa 1 m/s.

(10) In un laboratorio di fisica, una piattaforma gira su sé stessa con velocità angolare $\vec{\omega}$ di valore crescente diretta verso l'alto: un osservatore posto sulla piattaforma (in quiete rispetto ad essa) osserva una pallina di massa m , immobile rispetto al laboratorio, sospesa a un filo fissato al soffitto e distante d

dall'asse z di rotazione della piattaforma. Come viene valutato lo stato di moto della pallina nel riferimento della piattaforma? Come viene spiegato, sulla base delle leggi della dinamica, il fatto che il filo si mantenga verticale?

(11) Il blocchetto K , di massa m , appoggia senza attrito sul cuneo C . Sapendo che C è animato da moto rettilineo uniformemente vario in direzione orizzontale, si descriva il moto di K , e si chiarisca se la forza orizzontale $\vec{F}$ applicata al cuneo C è costante.



(12) Come sopra, ma si supponga questa volta che il cuneo C , di massa M , possa scivolare senza attrito sul piano orizzontale, e che le uniche forze esterne applicate al sistema cuneo + blocchetto siano le forze gravitazionali e la reazione del piano d'appoggio. Posto che entrambi i corpi abbiano inizialmente velocità zero, determinare la velocità del cuneo in funzione dello spostamento verticale del blocchetto.

(13) Citazione: «Nel linguaggio comune la massa dei corpi viene grossolanamente confusa con il loro peso. Si precisa che [...] mentre il peso di un corpo varia al variare dell'accelerazione di gravità e può perfino annullarsi, la sua massa non subisce alcuna variazione. Esempio pratico di quanto detto: un'astronave Apollo o Soyuz ha una massa di qualche tonnellata; il suo peso diventa zero quando g assume valore zero (a circa 100 km dalla Terra)» (*testo di chimica per le secondarie superiori*). Dov'è l'errore?

SOLUZIONI

(1) L'accelerazione di Coriolis $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ è zero (è infatti zero la velocità angolare dell'ascensore): pertanto anche l'accelerazione relativa (differenza tra accelerazione assoluta e accelerazione di trascinamento, in questo caso uguali entrambe per ipotesi a $\vec{g}$) è zero. Tutto va, nel riferimento dell'ascensore, come se la pallina fosse priva di peso: indipendentemente dalla direzione di lancio, il moto osservato è rettilineo e uniforme, sia prima che dopo l'urto contro il soffitto dell'ascensore.

(2) (a) La velocità assoluta $\vec{v}$ (velocità della barca rispetto alla terraferma) deve risultare ortogonale alla velocità della corrente (velocità di trascinamento). Dunque $\vec{v}$, $\vec{v}'$ e $\vec{v}_{tr}$ (fig. 1) formano un triangolo rettangolo avente come cateti $\vec{v}$ e $\vec{v}_{tr}$.

Avendo la velocità relativa valore doppio (4 km/h) rispetto alla velocità di trascinamento (2 km/h), gli angoli del triangolo sono 30° e 60° : dunque la barca deve puntare in una direzione che forma un angolo di 120° con la direzione della corrente.

(b) Risulta $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 - 2^2}$ km/h = 3,46 km/h, per cui il tempo di attraversamento è $T = 4 \text{ km} / (3,464 \text{ km/h}) = 1,154 \text{ h}$ (circa $1^h 9^{\text{min}}$).

(c) Perpendicolarmente alla direzione della corrente, perché in tal modo (fig. 2) la velocità della barca nella direzione di attraversamento avrebbe il massimo possibile valore (4 km/h). Il tempo di attraversamento sarebbe in tal caso $T = 4 \text{ km} / (4 \text{ km/h}) = 1 \text{ h}$.

(d) La velocità assoluta della barca sarebbe 6 km/h all'andata, 2 km/h al ritorno. Perciò il tempo sarebbe $12 \text{ km} / (6 \text{ km/h}) + 12 \text{ km} / (2 \text{ km/h}) = 8 \text{ h}$. Si noti che *non si verifica* un effetto di compensazione: vale a dire, il tempo guadagnato per effetto della corrente favorevole non compensa la perdita di tempo dovuta alla corrente contraria. In effetti, se l'acqua fosse immobile, il tempo complessivo sarebbe non di 8 h, ma di $(24 \text{ km}) / (4 \text{ km/h}) = 6 \text{ h}$.

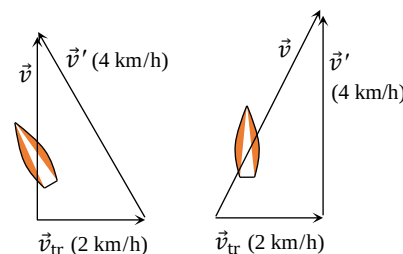
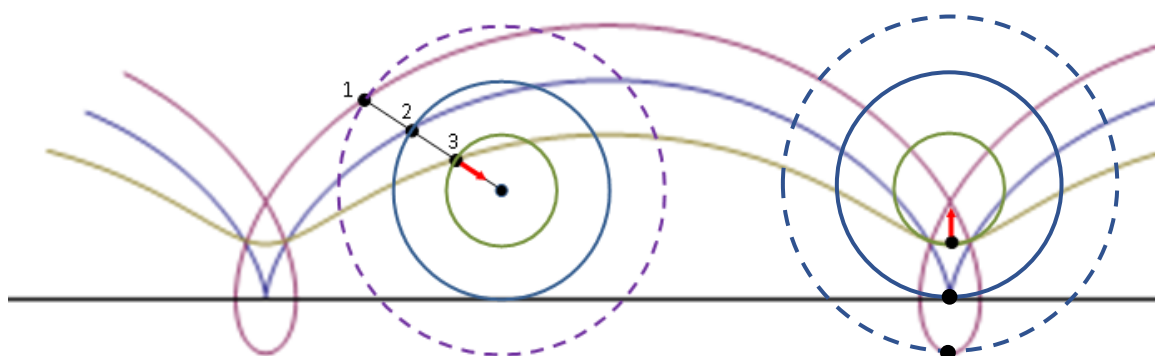


Fig.1

Fig.2



(3) La risposta è VERO per la 1 e la 2: essendo $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$, tutti gli osservatori in moto relativo traslatorio ($\rightarrow \omega = 0$), rettilineo e uniforme ($\rightarrow a_{tr} = 0$) danno la stessa valutazione ($\vec{a} = \vec{a}'$) sull'accelerazione di un punto (in particolare, tutti gli osservatori inerziali).

La figura mostra in colore verde la traiettoria circolare vista in A (automobile) e la traiettoria 'a cicloide accorciata' vista in B (terreno) di un punto 3 la cui distanza d dall'asse della ruota è inferiore al raggio R della ruota.

La traiettoria in colore blu ('cicloide') è quella di un punto 2 posto sul perimetro della ruota: $d = R$.

La traiettoria in colore viola ('cicloide allungata') è quella di un ipotetico punto 1 con distanza dall'asse della ruota superiore al raggio: $d > R$ (vedi ruote treno).

Sia in A che in B si osserva la stessa accelerazione (freccia rossa in figura nel caso del punto 3), ma è chiaro che tale vettore, sempre perpendicolare alla traiettoria circolare osservata da A, non lo è, in generale, alle traiettorie osservate da B.

(4) La prima. Se la vaschetta ha accelerazione $\vec{a}$ (accelerazione di trascinamento), nel riferimento della vaschetta tutto va come se l'accelerazione di gravità (l'accelerazione di un sasso lanciato nel vuoto) fosse non $\vec{g}$ ma $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ (direzione del filo di un pendolo in equilibrio, perpendicolare alla superficie di un liquido in quiete). Quando $a = g \sin \varphi$, il peso apparente $m\vec{g}'$ è perpendicolare al piano (fig.19).

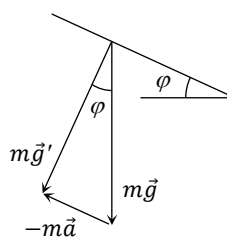


Fig. 19

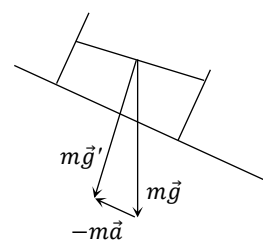


Fig. 20

Se $a < g$, la direzione del peso apparente (fig.20) è tanto più vicina alla verticale quanto è più piccola a .

Se fosse $a > g$, sarebbe tanto più lontana dalla verticale quanto più grande a .

(5) L'aria e la pressione atmosferica ci sono anche **sotto** la vaschetta (oltre che sulla superficie interne ed esterna delle pareti laterali. L'effetto complessivo su un corpo rigido è nullo.

(6) $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

[A] $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{tr}$ (disegno)

[B] $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Freccia blu (simboli privi di apice): valutazioni effettuate in K , inerziale, in questo caso dati del problema. Freccia rossa (simboli con apice): valutazioni effettuate in K' , nostre incognite.

Nel nostro specifico caso

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$\omega = 0$ (quella di K' , **non** quella della ruota!!)

Rispetto all'osservatore 'fisso' K solidale col terreno, la «navetta» in cui si trova K' si muove di moto traslatorio (**non rotatorio!**), dato che si mantiene sempre parallela a sé stessa: non si tratta ovviamente di una traslazione rettilinea (vedi fig.1 e 2 in basso nella pagina).

Il modulo di $\vec{a}_{tr}$ è $\omega^2 R$, dove ω è qui la velocità angolare **della ruota** (0,8 rad/min) ed R è il raggio della circonferenza (tratteggiata in figura) che C percorrerebbe se, nella posizione in cui si trova all'istante considerato, fosse rigidamente collegato con K' (e cioè, attenzione, **con la navetta, NON con la ruota!** altrimenti il centro della circonferenza sarebbe il centro della ruota); dato che K' si muove di moto traslatorio, nel giudizio di K il punto C si muoverebbe di moto circolare uniforme su traiettorie identiche con la stessa velocità e la stessa accelerazione di K' e di ogni punto della navetta. La direzione di $\vec{a}_{tr}$ è da C verso il centro della circonferenza tratteggiata. Risulta dalla [B]

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{tr}.$$

Nelle fig.1 e 2, si assuma come posizione iniziale del rettangolo colorato quella posta più in basso. Si supponga che il punto A descriva, nei due casi (moto traslatorio e moto rotatorio rispettivamente), circonferenze di raggio uguale, e si osservi come varia la traiettoria di B passando dal caso traslatorio al caso rotatorio.

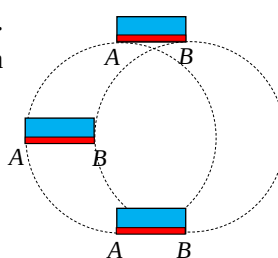
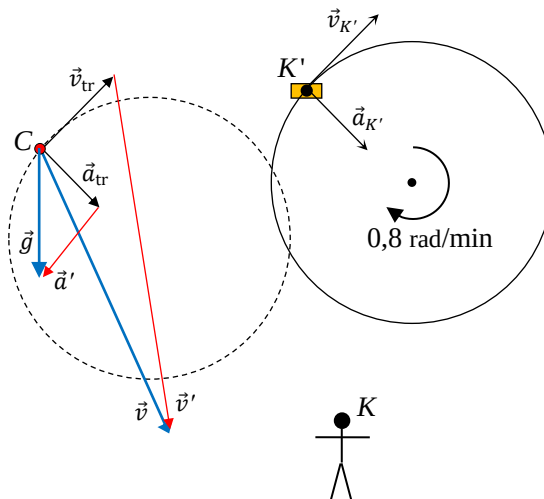


Fig.1 – Moto **traslatorio**: i punti A e B descrivono circonferenze identiche, il segmento AB mantiene una direzione costante.

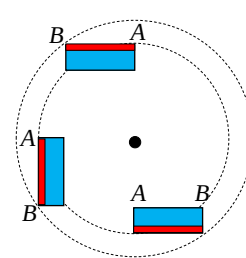


Fig. 2 – Moto **rotatorio**: i punti A e B descrivono circonferenze concentriche di raggio diverso, il segmento AB si sposta cambiando direzione.

(7) Dal punto di vista degli osservatori inerziali ciò accade perché (fig.2) il componente orizzontale $\vec{V}_x$ della forza $\vec{V}$ che il filo esercita sulla pallina è $m\vec{a}$ (il componente verticale è $\vec{V}_y = -m\vec{g}$), il che rende conto dell'accelerazione $\vec{a}$ che gli osservatori inerziali (tutti) attribuiscono alla pallina.

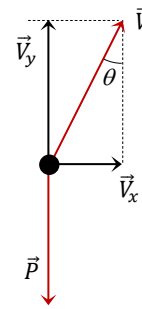


Fig. 2

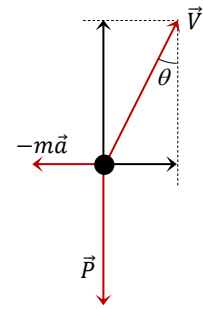


Fig. 3

Dal punto di vista invece dell'osservatore non inerziale K' solidale col carrello (fig.3), la pallina è immobile, e la posizione anomala del filo si spiega col fatto che sulla pallina agiscono non solo il peso e la reazione del vincolo, ma anche una forza fittizia di trascinamento $-m\vec{a}_{tr} = -m\vec{a}$, cosicché la forza apparente risultante è zero (promemoria: l'accelerazione di trascinamento è quella che si vede nel riferimento fisso quando nel riferimento mobile sono zero sia la velocità v' che l'accelerazione a' . In questo caso è l'accelerazione $\vec{a}$ del carrello)

La forza apparente di Coriolis $-m2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ è qui uguale a zero sia perché è zero la velocità $\vec{v}'$ della pallina nel riferimento del carrello, sia perché è zero la velocità angolare $\vec{\omega}$ del carrello.

(8) La forza apparente di trascinamento (la forza centrifuga $m\omega^2 R$) dovrebbe avere valore identico al peso mg . Dovrebbe cioè risultare $\omega = \sqrt{g/R} = \sqrt{(9,81 \text{ m/s}^2)/(6,37 \times 10^6 \text{ m})} = 1,24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$.

Per fare un giro completo su sé stessa la Terra impiegherebbe in tal caso $(2\pi \text{ rad})/(1,24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}) = 5,067 \times 10^3 \text{ s} \approx 1^h 24^{\text{min}}$.

(9) Il valore dell'accelerazione di trascinamento è $v^2/R = (120 \text{ km/h})^2 / (1000 \text{ m}) = [(120 \times 1000 \text{ m}) / (3600 \text{ s})]^2 / 1000 \text{ m} = 1,11 \text{ m/s}^2$, in direzione centripeta. La forza apparente di trascinamento ($-m\vec{a}_{tr}$) è più debole del peso (78 kgf) nella misura stessa in cui l'accelerazione di trascinamento è più debole dell'accelerazione di gravità, vale quindi $78 \times (1,11/9,81) \text{ kgf} = 8,83 \text{ kgf}$, con direzione centrifuga.

Se il viaggiatore si sposta nella direzione di marcia del treno, l'accelerazione di Coriolis ($2\vec{\omega} \times \vec{v}'$) ha anch'essa direzione centripeta, il suo valore è

$$2\omega v' = 2(v/R) v' = 2[(120 \times 1000 \text{ m} / 3600 \text{ s}) / 1000 \text{ m}] (1 \text{ m/s}) = 0,0667 \text{ m/s}^2.$$

La forza di Coriolis è diretta in senso centrifugo, il suo valore ($78 \text{ kg} \times 0,0667 / 9,81 = 0,530 \text{ kgf}$) si somma a quello della forza di trascinamento.

Se invece il viaggiatore si sposta in senso opposto al senso di marcia del treno, la forza di Coriolis è diretta in senso centripeto, e quindi il suo valore si sottrae a quello della forza centrifuga di trascinamento.

(10) Nel riferimento della piattaforma la pallina gira attorno all'asse z lungo una circonferenza di raggio d con velocità angolare $-\vec{\omega}$. Possiede pertanto un'accelerazione radiale $-\omega^2 d \vec{u}_r$ (fig. 23) e un'accelerazione tangenziale $-\omega d(\vec{u}_z \times \vec{u}_r)$. Essendo il filo verticale, dal filo proviene la forza verticale che neutralizza il peso. L'accelerazione della pallina proviene dalle forze apparenti: la forza di trascinamento $-m\vec{a}_{tr} = m\omega^2 d \vec{u}_r - m\omega d(\vec{u}_z \times \vec{u}_r)$ e la forza di Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\omega^2 d \vec{u}_r$. La somma di tale forza e del componente radiale della forza di trascinamento è diretto in senso centripeto e ha modulo $m\omega^2 d \vec{u}_r$: di qui l'accelerazione centripeta. Il componente tangenziale della forza di trascinamento produce l'accelerazione tangenziale.

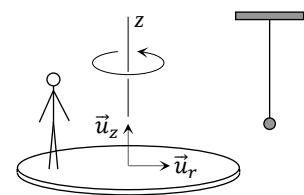


Fig. 23

(11) Le forze agenti su K sono il peso $\vec{P}$ e la reazione del vincolo $\vec{V}$, della quale sappiamo a priori che, per l'assenza di attrito, è perpendicolare al piano inclinato. L'accelerazione di K nel riferimento fisso è allora

$$[A] \quad \vec{a} = (\vec{P} + \vec{V})/m = \vec{g} + \vec{V}/m.$$

Sappiamo però anche che, se $\vec{A}$ è l'accelerazione del cuneo (accelerazione di trascinamento) e $\vec{a}'$ l'accelerazione di K rispetto al cuneo, è

$$[B] \quad \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$$

dove di $\vec{a}'$ si sa che è parallela al piano inclinato. Come la fig. 24 chiarisce, l'insieme della [A] e della [B] determina in modo univoco sia $\vec{a}'$, sia $\vec{a}$, sia

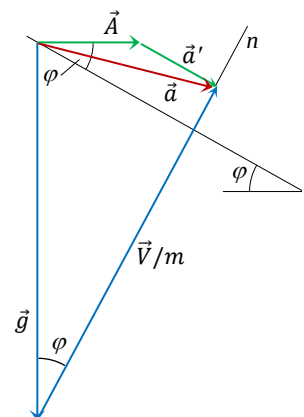


Fig. 24

$\vec{V}/m$ (e quindi la reazione del vincolo).

L'accelerazione relativa è $a' = g \sin \varphi - A \cos \varphi$, l'accelerazione assoluta ha componente orizzontale $a_x = A + a' \cos \varphi$ e componente verticale $a_y = a' \sin \varphi$. Tutti i valori trovati sono costanti nel tempo.

Il moto relativo, in cui la velocità è parallela all'accelerazione, è quindi rettilineo uniformemente vario (velocità funzione lineare del tempo); il moto assoluto è uniformemente accelerato (vettore $\vec{a}$ costante) con traiettoria parabolica e asse della parabola parallelo ad $\vec{a}$ (se però, nel momento in cui il cuneo comincia ad accelerare, la velocità assoluta di K è zero o è parallela ad $\vec{a}$, il moto assoluto di K è rettilineo e uniformemente vario). Essendo costante in valore e direzione la forza $-\vec{V}$ del blocchetto sul cuneo, il moto di quest'ultimo (uniformemente vario per ipotesi) richiede che anche la forza orizzontale esterna sia costante.

Casi particolari. Se, a partire dalla situazione rappresentata in fig. 24, l'accelerazione $\vec{A}$ del cuneo aumenta, a' diminuisce gradualmente fino ad annullarsi (moto relativo uniforme) per $A = g \tan \varphi$, mentre la reazione $\vec{V}$ diventa via via più grande fino ad assumere il valore $P/\cos \varphi$. Se $\vec{A}$ cresce ulteriormente, $\vec{a}'$ cambia direzione (l'espressione $g \sin \varphi - A \cos \varphi$ di a' diventa negativa) e diventa a sua volta (come $\vec{V}/m$) sempre più grande. Se $\vec{A}$ si annulla, $\vec{a}$ ha valore $g \sin \varphi$ e coincide con $\vec{a}'$ (il cuneo si muove di moto traslatorio, rettilineo e uniforme rispetto al riferimento fisso, quindi nei due riferimenti l'accelerazione è la stessa). Se $\vec{A}$ cambia direzione e diventa sempre più grande, $\vec{a}'$ è diretta nel senso della discesa e diventa a sua volta sempre più grande, mentre la direzione di $\vec{a}$ si approssima alla verticale e la reazione $\vec{V}$ diventa sempre più piccola. Per $A = g/\tan \varphi$ la reazione $\vec{V}$ si annulla e $\vec{a}$ coincide con l'accelerazione di gravità. Se $\vec{A}$ cresce ulteriormente $\vec{V}$ dovrebbe assumere il carattere di una forza di richiamo verso il piano inclinato: ma se il blocchetto è semplicemente appoggiato ciò che in realtà si verifica è il suo distacco dal cuneo, e quindi la sua caduta con accelerazione $\vec{g}$.

(12) Dato che, per l'assenza di attrito tra cuneo e piano d'appoggio, nessuna forza esterna agisce sul sistema in direzione orizzontale, il centro di massa del sistema non subisce spostamenti orizzontali: il cuneo si sposta perciò verso sinistra con velocità $\vec{V}$ e il blocchetto verso destra con velocità $\vec{v}_x$ tale che [A] $MV = mv_x$. Se $\vec{v}$ è la velocità del blocchetto e h il suo spostamento verticale, per il teorema dell'energia cinetica risulta

[B] $MV^2/2 + mv^2/2 = mgh$.

Il lavoro complessivo delle forze interne è zero: la forza del blocchetto sul cuneo, perpendicolare al piano inclinato per l'assenza di attrito, compie il lavoro positivo che produce l'energia cinetica del cuneo (lo spostamento del cuneo nella direzione della normale al piano inclinato è equiverso alla forza); la forza del cuneo sul blocchetto compie un lavoro uguale e contrario (sottraendo al blocchetto parte dell'energia cinetica prodotta dal lavoro del peso) perché, mantenendosi il blocchetto a contatto del cuneo, il suo spostamento nella direzione della perpendicolare al piano inclinato è identico a quello del cuneo.

La velocità $\vec{v}$ del blocchetto (figura) può esprimersi sia come $\vec{v}_x + \vec{v}_y$ sia anche come somma della velocità $\vec{v}'$ relativa con la velocità $\vec{V}$ di trascinamento:

[C] $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}' + \vec{V}$.

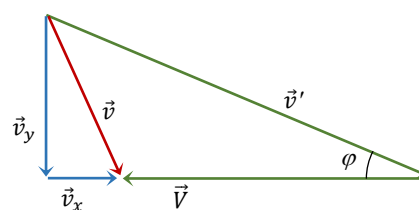
Essendo $\vec{v}'$ parallela al piano inclinato, risulta

[D] $v_y/(v_x + V) = \tan \varphi$.

Tenuto conto della [A], della [C] e della [D], la [B] diventa

$$MV^2/2 + mv_x^2/2 + mv_y^2/2 = MV^2/2 + (m/2)(MV/m)^2 + (m/2)[(v_x + V)\tan \varphi]^2 mgh$$

da cui $V = \sqrt{(2m^2 gh \cos^2 \varphi)/(m + M)(M + m \sin^2 \varphi)}$.



[13] Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap. 52 (“Se il riferimento precipita”)

Come in tutto il libro, il tono del discorso trasuda sicurezza, orgogliosa consapevolezza scientifica, giusta severità nei riguardi dei non addetti. E in questo caso anche giusta equidistanza politica. Con tutto ciò, la cantonata è terrificante. L'implicazione è che, 100 km sopra la superficie terrestre, l'astronave, libera ormai da impacci gravitazionali, lasci perdere l'idea di orbitare attorno alla Terra e se ne vada via in linea retta. Si consideri che i satelliti geostazionari (quelli delle telecomunicazioni) se ne stanno in orbita attorno alla Terra, per effetto del proprio peso, a un'altezza non di 100, ma i 36000 km... Sì, abbiamo tutti visto infinite volte gli astronauti galleggiare nelle loro astronavi «in assenza di peso» (come dicono i giornali e i telegiornali, e a volte perfino i testi scolastici). Ma eravamo fermamente convinti che ciò dipendesse non da una *effettiva* assenza di peso, ma dal fatto che l'astronave era abbandonata alle forze gravitazionali. (*continua*)

ESERCITAZIONE N.8

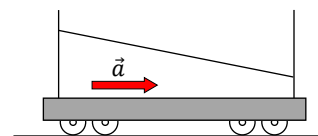
MECCANICA DEI FLUIDI

(1) Un cubo d'acciaio (peso specifico $\gamma = 8 \text{ g/cm}^3$) galleggia su mercurio ($\gamma = 13,6 \text{ g/cm}^3$). Quale frazione dell'altezza del cubo è visibile? Sarebbe diversa la risposta se ciò che galleggia fosse, anziché un cubo, una sfera dello stesso materiale? Si trascuri il peso dell'aria.

(2) Se la pressione atmosferica si annullasse, la parte visibile del volume di un iceberg aumenterebbe (*vero/falso*). Si tenga conto del peso dell'aria.

(3) Un bambino si lascia sfuggire di mano il palloncino nuovo, che subito sale fino al soffitto e lì si ferma alcune ore: fino a che, essendosi ormai sgonfiato, ritorna giù. A questo punto il bambino propone di rigonfiarlo usando la pompa a pedale del canottino di gomma. È una buona idea?

(4) Un carrello, sul quale è posto un contenitore cilindrico pieno d'acqua, è animato da moto rettilineo uniformemente vario ($v = at$), e conseguentemente il liquido si assesta (figura) in una posizione che resta fissa finché non cambia il valore dell'accelerazione ($\tan \varphi = a/g$, se φ è l'angolo tra superficie libera e piano orizzontale). Sarebbe corretto, in tali condizioni, calcolare la pressione in un punto posto sul fondo della vasca con la legge di Stevino $p = p_0 + \rho gh$?



(5) Con riferimento alla domanda precedente, si giustifichi la relazione $\tan \varphi = a/g$.

(6) Una zattera carica di ghiaia galleggia sull'acqua contenuta in una grande vasca. Che cosa accadrebbe del livello dell'acqua, se la ghiaia venisse scaricata in acqua? Diminuirebbe, aumenterebbe o resterebbe uguale? La densità della ghiaia è circa 3 volte più grande di quella dell'acqua.

(7) Una sfera d'acciaio galleggia su mercurio. Che cosa accade della posizione della sfera, se si ricopre il tutto con acqua?

(a) la posizione non cambia (b) la sfera si sposta verso l'alto (c) la sfera si sposta verso il basso.

(8) Si discuta la seguente affermazione: la pressione atmosferica dà luogo a forze che agiscono sulla superficie dei corpi verticalmente verso il basso (*vero/falso*).

(9) E... se c'è vento? La pressione nella direzione del vento e la pressione in direzione opposta sono ancora uguali?

(10) Un cubetto di ghiaccio galleggia su acqua in un bicchiere. Che accade del livello dell'acqua, man mano che il ghiaccio fonde? Si trascuri il peso dell'aria.

(11) Si consideri un pezzo di ghiaccio che galleggia su acqua: è giusto affermare che il ghiaccio riceve dall'acqua una spinta verso l'alto pari al peso dell'acqua spostata?

(12) È possibile fare in modo che un cilindro di legno di peso 2 kg galleggi su acqua, se in tutto sono disponibili 100 g d'acqua?

(13) All'interno di un fluido **ideale in movimento**, le forze che una generica porzione di fluido, delimitata da una superficie immaginaria S , riceve dal fluido circostante, sono sicuramente perpendicolari a S in ogni punto di S (*vero/falso*).

(14) Il teorema di Bernoulli

[A] $y + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante (m)} \quad [\gamma = \rho g]$

[B] $p + \gamma y + \rho v^2/2 = \text{costante (N/m}^2 = \text{Pa, o anche N} \cdot \text{m/m}^3 = \text{J/m}^3, \text{ energia per unità di volume)}$

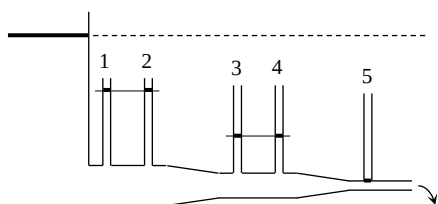
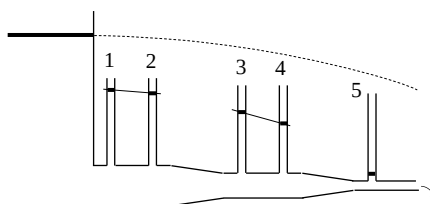
vale solo per fluidi ideali (*vero/falso*).

(15) Se un liquido (ideale) percorre un tubo ad asse orizzontale, un eventuale dimezzamento dell'area della sezione di passaggio comporterebbe

(a) un raddoppio della velocità (*vero/falso*)

(b) un valore quattro volte minore della pressione (*vero/falso*).

- (16) Come può essere definito il coefficiente di viscosità η di un fluido? Si spieghi l'esatto significato dei simboli usati.
- (17) Condotto pieno di liquido (in movimento o no). Tubo verticale (piezometro) superiormente aperto, fissato alla parete del condotto. Cosa si può dire circa il livello raggiunto dal liquido nel piezometro?
- (18) A quale livello si porta il liquido nel piezometro se il piezometro viene immerso nell'acqua di un canale?
- (19) Il tubo di Pitot: a cosa serve, come funziona.
- (20) Si chiarisca se, nelle figure sottostanti, i livelli assegnati al liquido nei diversi piezometri sono rappresentati correttamente (il livello nel serbatoio è mantenuto costante $\rightarrow$ **la situazione è stazionaria**).

Fig. 14 – Fluido *ideale*Fig. 15 – Fluido *reale*

- (21) I due recipienti A e B di fig.10a, entrambi dotati di un fondo mobile costituito da un disco orizzontale sostenuto da una molla, sono in tutto uguali tranne che per la forma della parte superiore che presenta in B un restringimento: se nei due recipienti viene versato un *identico* quantitativo d'acqua, in quale dei due il fondo mobile subirà, per effetto dell'acqua sovrastante, un maggiore spostamento verso il basso? Le possibili opzioni sono rappresentate in fig.10b, 10c e 10d.

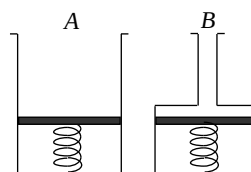


Fig. 10a

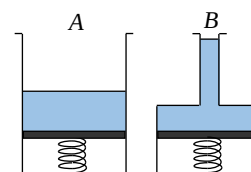


Fig. 10b

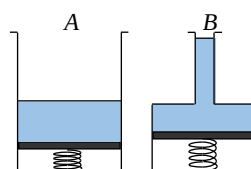


Fig. 10c

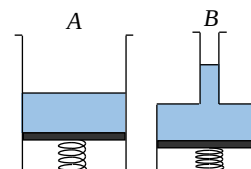


Fig. 10d

SOLUZIONI

(1) Per l'equilibrio deve essere

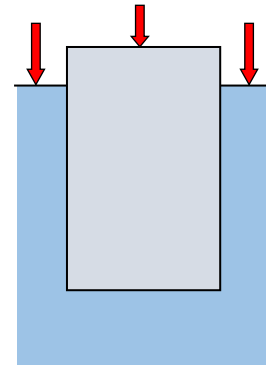
peso del liquido spostato = peso del cubo, $V_{\text{imm}} \gamma_{\text{Hg}} = V_{\text{tot}} \gamma_{\text{Fe}}$, quindi $V_{\text{imm}} = V_{\text{tot}} (\gamma_{\text{Fe}} / \gamma_{\text{Hg}})$

→ $V_{\text{visibile}} = V_{\text{tot}} - V_{\text{imm}} = V_{\text{tot}} (1 - \gamma_{\text{Fe}} / \gamma_{\text{Hg}}) = V_{\text{tot}} (1 - 8/13,6) = 0,41 V_{\text{tot}}$.

Il volume visibile è il 41% del totale, e trattandosi di un cubo il rapporto tra i volumi (visibile e totale) corrisponde al rapporto tra le relative altezze.

Per la sfera il rapporto tra il volume visibile e il volume totale sarebbe ancora definito dalla relazione $V_{\text{imm}} \gamma_{\text{Hg}} = V_{\text{tot}} \gamma_{\text{Fe}}$ e quindi rimarrebbe lo stesso, ma sarebbe diverso il rapporto tra le altezze (non c'è proporzionalità tra altezza e volume di una 'fetta' orizzontale di sfera).

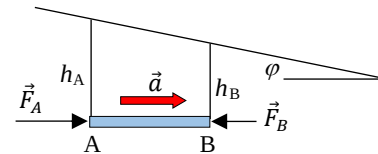
(2) Falso, diminuirebbe. La pressione atmosferica a livello dell'acqua è un po' più grande della pressione sulla superficie superiore del ghiaccio. Se si annullasse la pressione sul ghiaccio, la pressione sulla superficie dell'acqua (e, per la legge di Stevino $p = p_0 + \gamma h$, a tutti i livelli inferiori) subirebbe una diminuzione più grande, e quindi la spinta sul blocco di ghiaccio verso l'alto diminuirebbe più della spinta verso il basso. Del resto, in condizioni normali il blocco di ghiaccio sposta acqua e aria, se non ci fosse atmosfera il ghiaccio sposterebbe solo acqua, e dunque il peso del fluido complessivamente spostato sarebbe, a pari posizione del blocco, inferiore: il che determinerebbe un suo maggiore affondamento.



(3) No. Il palloncino gonfiato dal rivenditore contiene gas (elio) a pressione necessariamente superiore alla pressione atmosferica (altrimenti non resta gonfio e sposta un insufficiente volume d'aria): se tale gas fosse aria, il suo peso (tenuto anche conto del peso dell'involucro) sarebbe superiore a quello dell'aria spostata e il palloncino tenderebbe a scendere anziché a salire.

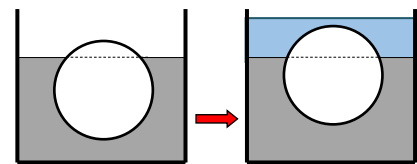
(4) Rispetto alla verticale il liquido è in equilibrio (tutti i punti hanno velocità verticale costantemente nulla): la legge di Stevino può essere applicata.

(5) Cilindretto AB, accelerazione a verso destra. La spinta orizzontale verso destra in A deve essere più grande della spinta orizzontale verso sinistra in B: $F_A - F_B = (\rho S L) a$ (dove ρ densità liquido, S area sezione verticale cilindretto, L lunghezza cilindretto), e dividendo per S → $p_A - p_B = \rho L a$. Allora, essendo $p = p_0 + \rho g h$, $\rho g h_A - \rho g h_B = \rho L a$, da cui $(h_B - h_A) / L = a$, cioè $\tan \varphi = a/g$.



(6) Diminuirebbe, perché diminuirebbe l'affondamento della zattera. Una pietra posta sulla zattera la fa affondare quanto occorre perché venga spostato un quantitativo d'acqua di peso pari a quello della pietra (quindi un volume d'acqua circa 3 volte più grande del volume della pietra). Posta invece sul fondo della vasca, la pietra sposta un quantitativo d'acqua uguale non al suo peso ma al suo volume: e quindi di peso molto minore (circa 1/3) della pietra (e del quantitativo d'acqua spostato dalla pietra quando sta sulla zattera).

(7) Risposta (b). Inizialmente la sfera spostava mercurio + aria, adesso sposta mercurio + acqua. Dovendo, in condizioni di equilibrio, restare identico il peso del fluido complessivamente spostato dalla sfera, deve diminuire il volume della parte di sfera immersa nel mercurio. La sfera si sposta quindi verso l'alto.



(8) L'affermazione è errata. Le forze derivanti dalla pressione atmosferica agiscono perpendicolarmente alla superficie dei corpi verso i corpi stessi. La forza di compressione sulla palma della mano aperta è esattamente la stessa comunque la mano venga orientata (vedi spinta verso l'alto sulle bolle di sapone).

Tale proprietà di 'isotropia' è, a rigore, verificata **nei fluidi reali** solo in assenza di movimenti interni alla massa fluida, in assenza quindi di forze interne di attrito viscoso (nel quale caso, su una qualsiasi superficie posta all'interno al fluido agiscono solo forze perpendicolari alla superficie): e si dimostra, con l'esperienza oltre che con la matematica, che tali forze possono cambiare da punto a punto, ma in uno stesso punto non cambiano al variare della direzione che si considera.

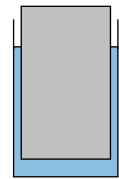
Per fluidi a bassa viscosità (come tutti i gas, ad esempio l'aria) si può comunque ritenere che l'isotropia della pressione sia sostanzialmente verificata anche in presenza di movimenti interni alla massa fluida.

(9) Sì! Se c'è un ostacolo, in un punto a monte dell'ostacolo c'è più pressione *in tutte le direzioni*, in un punto a valle c'è meno pressione *in tutte le direzioni*. Di qui la spinta nella direzione del vento.

(10) Se attribuiamo all'aria spostata peso zero, il livello del liquido resterebbe esattamente lo stesso: un blocco di ghiaccio di peso P galleggia in tal caso spostando un quantitativo di liquido di peso P , e quando fonde produce proprio quel quantitativo di liquido. Se invece consideriamo anche il peso dell'aria spostata, il blocco che galleggia sposta meno liquido di quanto poi ne produca fondendo, quindi *con la fusione il livello dell'acqua aumenta leggermente* (il volume supplementare di liquido è circa $1/800$ del volume d'aria spostato in galleggiamento).

(11) No, è la spinta *complessiva* del fluido circostante (acqua + aria) che è uguale al peso dell'acqua spostata (o, più esattamente, al peso dell'acqua spostata più il peso dell'aria spostata). La spinta verso l'alto dell'acqua è quindi più grande del valore indicato, con una differenza pari alla spinta verso il basso da parte dell'aria atmosferica. Esempio: nel caso di un cubetto di ghiaccio di lato 1 cm, il peso dell'acqua spostata è solo 0,92 g (peso del cubetto), e se la spinta verso il basso dell'aria è 1 kg (pressione 1 kg/cm² = 0,968 atm = 736 mmHg) la spinta verso l'alto dell'acqua è 0,92 g + 1 kg, *più di mille volte superiore al peso del cubetto*.

(12) Sì, basta che il cilindro di legno venga introdotto in un contenitore cilindrico di diametro appena superiore (figura), in modo che l'acqua sia costretta a risalire nella stretta intercapedine. Il «liquido spostato» è il liquido il liquido che «potrebbe stare» nel volume della parte immersa del corpo che galleggia (ovvero: «liquido spostato» è un quantitativo immaginario di liquido di volume uguale al volume della parte immersa del corpo che galleggia).



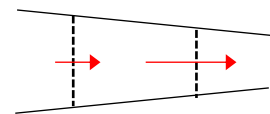
(13) Vero, esattamente come per i fluidi reali in equilibrio: per la manca di viscosità, forze di superficie tangenziali (tendenti quindi a modificare la forma delle varie porzioni di liquido senza variazione del volume, figura) non sono compatibili con l'equilibrio.



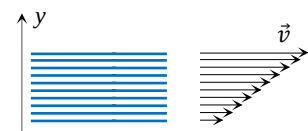
(14) Vero, il teorema di Bernoulli si applica a rigore solo a fluidi ideali (**incomprimibili e privi di viscosità**). La dimostrazione infatti prevede che ad ogni sezione trasversale possa essere attribuito la **stessa portata volumetrica** (in caso di moto regolare [stazionario], nello spazio fra due sezioni di un tubo di flusso entra in ogni caso tanta massa da un lato quanta ne esce dall'altro; se non c'è comprimibilità, a uguale massa corrisponde uguale volume); e che venga compiuto lavoro esclusivamente dalle forze gravitazionali e dalle forze di pressione (**assenza di forze di attrito**).

In pratica tuttavia il teorema di Bernoulli si applica spesso, con l'eventuale aggiunta di termini correttivi, anche ai fluidi reali (acqua e perfino aria, molto più comprimibile).

(15) Vero per la (a), falso per la (b). Per la costanza della portata anche in volume oltre che in massa ($q_v = Av = \text{cost.}$) la velocità raddoppierebbe, il quadrato della velocità sarebbe quattro volte più grande e quindi (Bernoulli) la pressione diminuirebbe di tanto quanto aumenta il termine $\rho v^2/2$, e cioè di $3\rho v^2/2$.



(16) La definizione fa riferimento a un moto per lamine piane e parallele che scivolano l'una sull'altra (assenza di vortici). Detto y (figura) un asse perpendicolare alle lamine e orientato nel senso in cui la velocità delle lamine aumenta, la forza che, per effetto della viscosità, agisce tangenzialmente sulle superfici di due lamine a contatto, nel senso del moto sulla lamina meno veloce, in senso contrario al moto sulla lamina più veloce, è $F = \eta A dv/dy$, dove A è l'area su cui F agisce e dv/dy («gradiente di velocità») esprime la rapidità di variazione della velocità in direzione y (perpendicolarmente quindi alla velocità) nel punto considerato.



Un pacco di «lamine di fluido» in movimento con le rispettive velocità.

La regola risale a Newton: *in un moto per lamine piane sovrapposte, la forza di attrito viscoso per unità di area è proporzionale al gradiente di velocità*.

(17) Piezometro = **misuratore di pressione** (nessuna informazione sulla velocità, potrebbe anche essere $v = 0$, come nel caso di un tubo verticale conficcato nella base superiore di un contenitore). Risposta: l'equilibrio del liquido nel piezometro richiede che la pressione esercitata su di esso verso l'alto dal liquido sottostante abbia il valore $p = p_a + \gamma h$ previsto dalla legge di Stevino: nel qual caso (figura)

$$h = (p - p_a) / \gamma = p / \gamma - p_a / \gamma$$

Si noti qui che h (altezza della colonna di liquido nel piezometro) è **più piccola** dell'**altezza piezometrica** p / γ (altezza della colonna di liquido in assenza di pressione atmosferica), con una differenza pari a p_a / γ (nel caso dell'acqua, **10,33 m**). Per questo h viene spesso denominata altezza piezometrica 'relativa'.

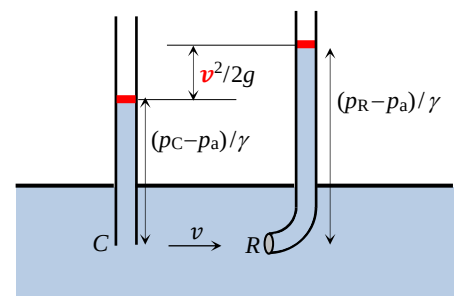
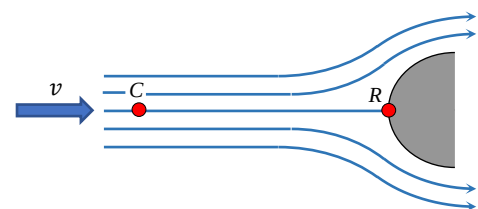
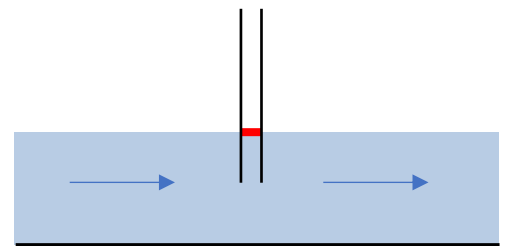
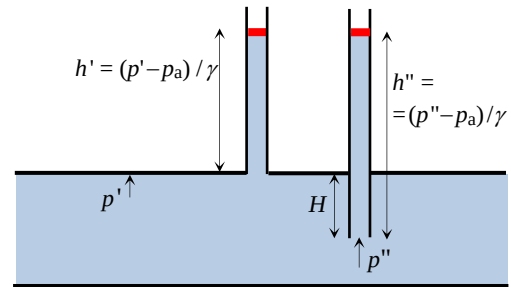
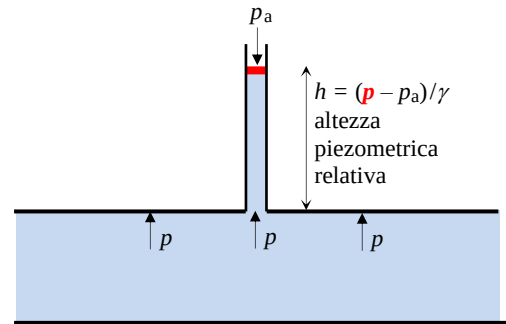
NB. Se assumiamo che all'interno della corrente liquida la pressione vari in modo idrostatico (Stevino)¹, **qualunque** sia il livello dell'imboccatura inferiore del piezometro **l'altezza raggiunta nel piezometro è sempre la stessa**. Nel passaggio (figura) dalla prima alla seconda situazione la pressione al livello dell'imboccatura inferiore aumenta, all'esterno del tubo, di γH , e di altrettanto deve aumentare, per l'equilibrio, all'interno del tubo: ciò richiede che l'altezza della colonna liquida nel tubo aumenti anch'essa di H , e quindi che il livello raggiunto nei due tubi sia lo stesso.

(18) A pari livello, all'interno e all'esterno del piezometro la pressione deve avere lo stesso valore: se la pressione è uguale, è uguale anche il livello. Questo (figura) vale in particolare per le due superfici libere, interna ed esterna al piezometro, per le quali è $p = p_a$.

(19) È un dispositivo che misura la velocità di un fluido desumendola da una misura di pressione.

Quando una corrente fluida orizzontale in moto regolare (velocità univocamente definita in ogni posizione, niente vortici) investe un ostacolo come in figura, le linee di corrente si allargano per aggirare l'ostacolo da sopra, da sotto e lateralmente: sulla superficie dell'ostacolo c'è però una posizione R («punto di ristagno») in corrispondenza della quale la velocità del fluido è zero. Se applichiamo la legge di Bernoulli al punto R e a un punto C che si trova (figura) sulla stessa linea di corrente a una sufficiente distanza da R (e dunque con linee di corrente ancora parallele), otteniamo (essendo le quote y uguali in C e in R) $\frac{p_C}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_R}{\gamma}$, il che significa che nel punto R di ristagno l'altezza piezometrica (e lo stesso vale per l'altezza piezometrica **relativa**, quella raggiunta dal liquido nel piezometro) ha subito, rispetto ai valori che si verificano a monte dell'ostacolo (dove la velocità è la velocità v misurata) un incremento Δh (figura) pari all'altezza cinetica perduta $v^2/2g$ (altezza raggiunta da un corpo lanciato in verticale con velocità v).

Se allora (figura) immergiamo un tubo ricurvo aperto alle due estremità (**tubo di Pitot**) in una corrente liquida orizzontale, in modo che in corrispondenza dell'imboccatura inferiore si formi un punto di ristagno, il liquido raggiunge nel tubo un livello che supera di $\Delta h = v^2/2g$ (figura) il livello raggiunto nel piezometro. → Misura della velocità di una

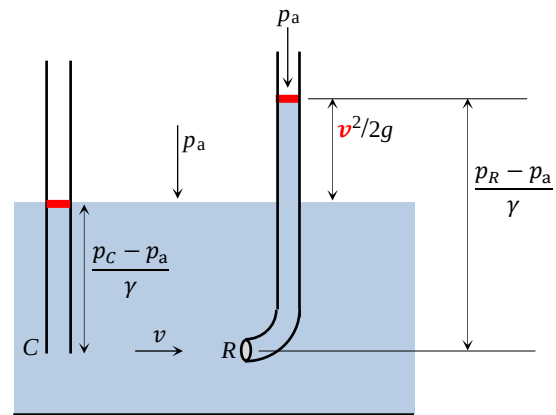


¹ Ciò si verifica quando le linee di corrente sono sensibilmente rettilinee e parallele (come nelle tubazioni e nei canali).

corrente liquida: $v = \sqrt{2g \Delta h}$.

Nota 1: ci si è riferiti a una corrente dentro una tubazione, ma il discorso **resta uguale** nel caso della corrente a superficie libera (figura).

Nota 2: il livello raggiunto dall'acqua nel tubo di Pitot cambia se si sposta il tubo verso l'alto o verso il basso, perché cambiano i valori della velocità all'altezza dell'imboccatura. Non così per quanto riguarda il livello nel piezometro, se la pressione varia con la profondità – come nel piezometro – in modo idrostatico (vedi nota a pag. precedente).

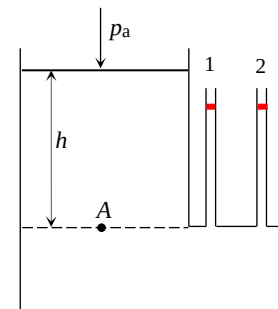


(20) Sì, i livelli sono tutti corretti. Nel caso di liquido **ideale**, i piezometri 1 e 2 non mostrano differenze di pressione, in accordo alla legge di Bernoulli (velocità uguale); lo stesso vale per i piezometri 3 e 4, ma qui la pressione (l'altezza quindi nel piezometro) è inferiore alla precedente perché la sezione del condotto è più stretta e la velocità è conseguentemente maggiore (senza che sia cambiata la somma $p + \rho v^2/2$).

In tutto il tratto finale, all'uscita dal quale il liquido sgorga all'aperto, la pressione è costante e dunque uguale alla pressione esterna: pertanto nel piezometro 5 l'altezza del liquido sul punto di attacco è zero.

Nel caso invece di liquido **reale**, lungo i due tratti cilindrici (velocità costante) si verifica la caduta di pressione prevista dalla legge di Poiseuille ($q_v = \pi R^4 \Delta p / 8 \eta L$): in particolare, il piezometro 5 segnala una pressione *superiore* alla pressione atmosferica. Si osservi che nel caso di fluido reale i piezometri 3 e 4 sono distanziati tra loro (L) esattamente quanto lo sono i piezometri 1 e 2, e tuttavia (in accordo alla legge di Poiseuille) tra il piezometro 3 e il piezometro 4 la caduta di pressione Δp è *maggiore* perché, **a parità di portata q_v** , il raggio R della sezione di passaggio è più piccolo.

NOTA. Anche nel caso del liquido ideale, il livello nel piezometro 1 è **inferiore** a quello della superficie libera nel serbatoio perché immediatamente al di sotto del piezometro (al livello quindi del punto A) la velocità del liquido è più grande che nella sezione orizzontale per A, e quindi ($p + \gamma y + \rho v^2/2 = \text{costante}$) è inferiore la pressione (che anche in A è, esattamente come nel piezometro, la pressione $p_a + \gamma h$ di Stevino, dato che per ipotesi la velocità del liquido sopra il punto A è costante → somma delle forze verticali uguale a zero come nel caso idrostatico).



[21] [Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.3 (“Evidenze e paradossi”)]

Si accettano scommesse: la totalità degli interpellati risponderà che, essendo uguale il peso dell'acqua da sostenere, le due molle risulteranno schiacciate nella stessa identica misura (fig.10b); mentre ovviamente, essendoci nel recipiente B maggior dislivello e quindi maggior pressione sul disco mobile, la risposta giusta è quella mostrata in fig.10d.

Il lettore inesperto potrebbe obiettare: è tutto vero, ma è anche vero che se nel recipiente B l'acqua esercita sul disco mobile una più grande forza verso il basso, allora riceve dal disco, per azione e reazione, una più grande spinta verso l'alto: e come si concilia questo col fatto che il peso dell'acqua – il peso da equilibrare – è per ipotesi, in A e in B, lo stesso e col fatto che, essendo ora più piccola l'area della superficie libera, è proporzionalmente più piccola la forza verso il basso dovuta alla pressione atmosferica?

Se la domanda è questa, il lettore ha dimenticato di considerare la spinta supplementare verso il basso che, in B, l'acqua riceve dal ‘soffitto’ del recipiente: per effetto di tale spinta, la forza che l'acqua esercita sul piatto sottostante è identica a quella che eserciterebbe se, fermo restando il livello massimo raggiunto dall'acqua, il restringimento superiore venisse eliminato (il recipiente B fosse quindi identico al recipiente A). Basti pensare che la pressione idrostatica – verso l'alto e verso il basso – al livello del ‘soffitto’ sarebbe esattamente la stessa.

(continua)

ESERCITAZIONE N.9

TEMPERATURA – CALORE – GAS IDEALE E GAS REALI

“La temperatura di un corpo è ciò che determina lo scambio di calore: il calore si sposta spontaneamente dalle alte alle basse temperature”

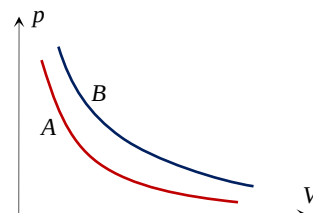
Sì, ma... che cos'è il calore?

“Il calore è l'energia scambiata per effetto di una differenza di temperatura”

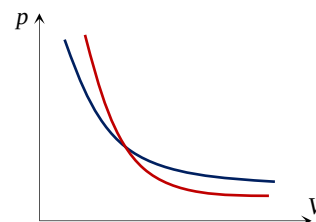
Sì, ma... che cos'è la temperatura?

- (1) Si commenti la seguente affermazione: la temperatura di un corpo è un indice della quantità di calore che il corpo contiene.
- (2) Che cos'è, in fisica, il calore?
- (3) Il concetto di «temperatura di una molecola» non ha alcun significato: la temperatura di una molecola non esiste (*vero/falso*).
- (4) L'affermazione il corpo *A* è «tre volte più caldo» del corpo *B* è, in fisica, priva di significato (*vero/falso*).
- (5) Rispetto alla variazione di temperatura di un corpo, il fatto che il corpo scambi calore rappresenta una condizione: (a) necessaria e sufficiente, (b) né necessaria, né sufficiente, (c) necessaria ma non sufficiente, (d) sufficiente ma non necessaria.
- (6) Si legge a volte che il passaggio di corrente elettrica in un filo conduttore determina nel filo uno «sviluppo di calore». È corretta tale terminologia?
- (7) Il calore specifico $c = q/(m\Delta T)$ di una stessa sostanza può assumere, a seconda delle circostanze, qualsiasi valore tra meno infinito e più infinito, estremi inclusi. Spiegare.
- 8 - Non tutte le trasformazioni di un gas si prestano a essere rappresentate in un diagramma di stato, tipo per esempio p, V oppure p, T (*vero/falso*).

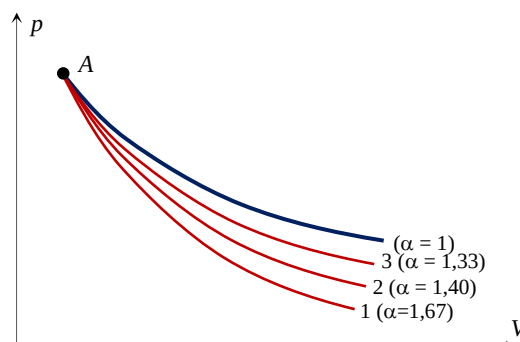
- (9) Le due curve isoterme della figura qui a lato si riferiscono rispettivamente al gas perfetto *A* e al gas perfetto *B*. Si spieghi se è possibile stabilire per quale dei due gas la temperatura è più elevata.



- (10) Nel diagramma pressione-volume della figura qui a lato le due linee rappresentano rispettivamente una trasformazione isoterma e una trasformazione adiabatica (reversibile) di un gas perfetto. Quale delle due è l'adiabatica?



- (11) Un gas perfetto si trova nello stato definito dal punto *A* del diagramma della figura. Le curve del diagramma mostrano come varierebbe lo stato del gas in relazione a una espansione isoterma e a una espansione adiabatica reversibile, nell'ipotesi sia di gas monoatomico che di gas biatomico e triatomico. Si dimostri in termini matematici che la prima curva dall'alto è l'isoterma, seguono verso il basso le adiabatiche di un gas triatomico (a molecola non lineare), di un gas biatomico, di un gas monoatomico.



(12) Al di là del calcolo matematico, per quale ragione fisica in una espansione adiabatica il gas monoatomico si raffredda più del gas biatomico, e questo più del gas triatomico?

(13) Un gas perfetto evolve in modo reversibile subendo prima un'espansione isoterma, poi un raffreddamento isobaro, poi una compressione adiabatica, infine un raffreddamento isobaro, tornando in definitiva nello stato iniziale. È possibile?

(14) Un gas perfetto evolve reversibilmente subendo prima una compressione isoterma 1-2, poi un raffreddamento isobaro 2-3, poi un raffreddamento isocoro 3-4, infine un'espansione adiabatica 4-5. È possibile che lo stato finale 5 coincida con lo stato iniziale 1?

(15) Sotto quali condizioni l'equazione di Van der Waals si riduce all'equazione del gas perfetto $pV = nRT$?

(16) Un gas deve essere raffreddato di 15°C mediante sottrazione di calore. Stabilire se la quantità di calore da sottrarre al gas è maggiore operando a volume costante oppure operando sotto pressione costante.

(17) Il calore specifico a volume costante:

(a) è uguale per tutti i gas perfetti,

(b) è uguale per tutti i gas perfetti la cui molecola contiene uno stesso numero di atomi (es. H_2O e CO_2 , oppure O_2 e N_2),

(c) dipende dal numero di atomi nella molecola e dal peso della molecola del gas perfetto considerato. Quali delle tre risposte sono valide?

(18) Stabilire quante calorie occorrono per aumentare di 40°C sotto pressione costante la temperatura di 70 g di azoto e di 85 g di ammoniaca. Si supponga di operare su gas perfetti.

(19) 2 kg di ghiaccio a -10°C vengono posti in acqua a 50°C sotto pressione di 1 atm. Determinare quale deve essere il quantitativo d'acqua se vogliamo che il sistema acqua + ghiaccio risulti in equilibrio (acqua a 0°C) dopo che il 70% del ghiaccio si è sciolto.

Promemoria: calore di fusione del ghiaccio $q = 80 \text{ cal/g}$, calore specifico del ghiaccio $c = 0,48 \text{ cal/g}$.

(20) (a) Per come il calore viene (ormai da decenni) definito in fisica, non è corretto affermare che «ci sono tre modalità di trasmissione del calore: conduzione, convezione, irraggiamento». Chiarire.

(b) Sui testi preuniversitari si legge spesso che «il calore è una nuova forma di energia» (sottinteso, in aggiunta all'energia cinetica e all'energia potenziale già introdotte in meccanica). Per quale motivo tale affermazione può essere contestata?

(21) Citazione: «Il processo di convezione è sfruttato nella caffettiera domestica: l'acqua che sale nella colonna centrale». Dov'è l'errore?

SOLUZIONI

(1) L'affermazione è priva di senso: per come il calore viene definito in fisica, il concetto di calore 'contenuto in un corpo' non esiste. La temperatura è, operativamente, ciò che si misura con i termometri (termometro a gas rarefatto), ed è correlata con l'energia cinetica media che le particelle costitutive possiedono nel loro moto individuale di traslazione, rotazione ed eventualmente (per temperature molto alte) vibrazione (NON nel moto d'insieme, tipo spostamento di un solido e corrente d'aria o d'acqua).

Per i gas perfetti (in pratica per qualsiasi gas sufficientemente rarefatto), l'energia cinetica media è $kT/2$ (T = temperatura assoluta, $k = R/N_0$ costante di Boltzmann = rapporto fra costante dei gas e numero di Avogadro) per ciascun grado di libertà della molecola (schematizzata come struttura rigida): 3 nella traslazione, e nella rotazione altri due per le molecole biatomiche (O_2) e altri tre per le pluriatomiche con atomi non allineati (H_2O ma non CO_2).

(2) È l'energia **cinetica** che i corpi scambiano in relazione al valore della loro temperatura: tale scambio avviene direttamente a livello del moto individuale (disordinato, complessivamente nullo, delle particelle costitutive)^[1]. Se i corpi non fossero costituiti da particelle animate da un moto interno di agitazione, anche il termine «calore», come il termine «temperatura», non esisterebbe.

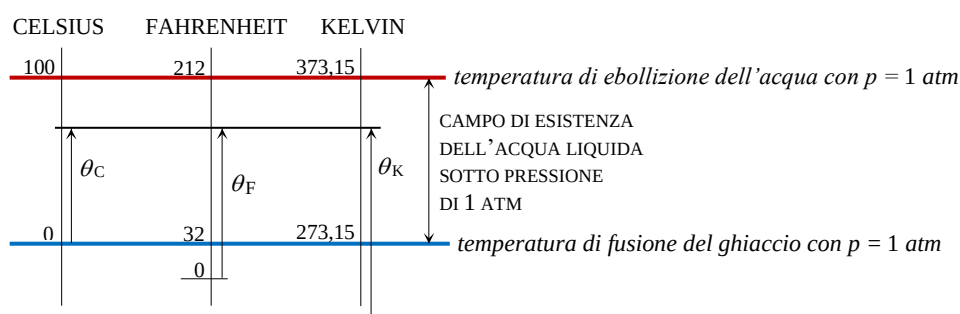
→ In uno scambio di energia cinetica da una singola molecola a un'altra molecola il termine calore non può essere usato.

(3) Non esiste come concetto istantaneo, potrebbe esistere come concetto statistico (correlato con l'energia cinetica media, nel tempo, dei vari gradi di libertà della molecola).

Concetti come quelli di equilibrio termico, di temperatura, di calore, di volume, di pressione hanno tutti natura statistica, sono cioè l'effetto complessivo di un grande numero di eventi, e sono quindi essenzialmente macroscopici: se riferiti a un numero troppo piccolo di particelle, perdono significato.

Anche il volume di una molecola non esiste. Anche la pressione di una molecola.

(4) Vero. Il numero che esprime la misura della temperatura varia al variare della scala termometrica prescelta: se, ad esempio, sappiamo che la temperatura Celsius del corpo A è il triplo di quella del corpo B, non abbiamo nessuna idea di quale sia il rapporto tra le rispettive temperature Fahrenheit o tra le rispettive temperature Kelvin. Una temperatura di $30^\circ C$ è tre volte più grande di una temperatura di $10^\circ C$? Nella scala Kelvin i rispettivi valori sono maggiorati di 273° , quindi sono 303 e 283, il rapporto non è 3 ma 1,07.



→ Il rapporto tra due temperature dipende da come è stato fissato lo zero della scala. Tutto questo è in relazione al fatto che la temperatura non è una grandezza fisica in senso stretto, bensì un **indice di stato** (richiede cioè la scelta di un livello zero, cosa che non accade per grandezze come lunghezza o massa o velocità).

→ **Analogia col 'livello' degli oggetti, con l'energia potenziale degli oggetti.**

Sono grandezze fisiche in senso stretto le differenze di livello o di energia potenziale.

¹ *Direttamente* significa senza passaggi energetici intermedi. Non, per esempio, per effetto di attrito, o di passaggio di corrente elettrica.

(5) Né necessaria, né sufficiente. Non è necessaria, perché ad esempio un gas può raffreddarsi espandendosi e riscaldarsi per effetto di una compressione (pompa della bicicletta); un filo metallico può riscaldarsi per effetto del passaggio di corrente elettrica; due superfici possono riscaldarsi per attrito dell'una sull'altra. Non è sufficiente, perché ad esempio una (**abbastanza lenta**) somministrazione di calore a un pezzo di ghiaccio che ha già raggiunto la temperatura di fusione non determina un ulteriore riscaldamento del ghiaccio, ma la trasformazione del solido in liquido senza variazione della temperatura. Lo stesso per l'ebollizione di un liquido (sotto pressione atmosferica costante).

(6) No, non è corretta (anche se molto usata al di fuori della fisica): ciò che “si sviluppa” è energia termica, vale a dire energia cinetica del moto di agitazione termica. Il termine calore non può essere usato: il riscaldamento del filo non deriva dall'interazione termica del filo con un corpo a più alta temperatura, ma dalla conversione (urti) dell'energia cinetica del moto collettivo degli elettroni di conduzione (= corrente elettrica) in energia cinetica del moto di agitazione termica delle particelle costitutive, per effetto degli urti tra gli elettroni di conduzione e le altre particelle.

→ Analogia: il riscaldamento di un gas per compressione, o di un solido per attrito, non possono descriversi come sviluppo di calore.

(7) Se, in una trasformazione, viene fornito calore in quantità insufficiente a impedire che la temperatura diminuisca (si pensi a un gas che si espande), il calore fornito q e l'aumento di temperatura ΔT hanno segni opposti, per cui il calore specifico (medio) risulta negativo. Lo stesso accade se viene sottratto calore in quantità insufficiente a impedire il riscaldamento (si pensi alla compressione di un gas). Se invece il calore fornito o sottratto è precisamente quello che occorre per impedire che si verifichi una variazione di temperatura ($\Delta T = 0$), il calore specifico risulta rispettivamente uguale a più o meno infinito. Se si verifica una variazione di temperatura senza che venga scambiato calore, il calore specifico relativo alla trasformazione è zero. Durante la fusione o l'ebollizione sotto p costante la temperatura non varia e dunque il calore specifico è infinito.

(8) Vero. In un diagramma di stato p, V , un punto assegna un valore preciso alla pressione, in un diagramma p, T un punto assegna un valore preciso sia alla pressione che alla temperatura. Questo è possibile solo se si fa riferimento a situazioni in cui le proprietà locali (tipo p e T) sono identiche in tutto il sistema, e quindi a situazioni di equilibrio. Dunque, solo le trasformazioni “quasi-statiche”, approssimabili come una successione continua di stati di equilibrio, possono essere rappresentate.

Tutto questo in linea teorica. Nelle applicazioni tecniche si deve venire a patti: anche se un motore fa tremila giri al minuto (50 giri al secondo), le trasformazioni termodinamiche del carburante (aspirazione, compressione, scoppio, scarico) vengono schematizzate come “successioni di stati di equilibrio”...

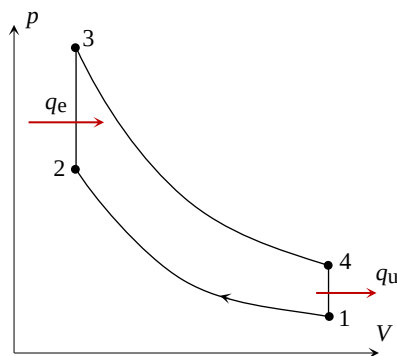


Fig. 3 – Il ciclo Otto

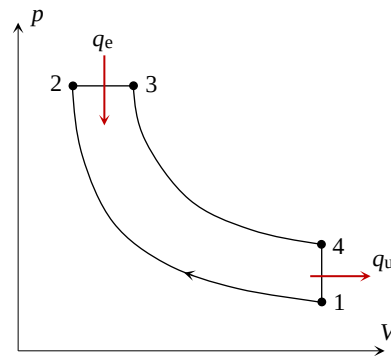
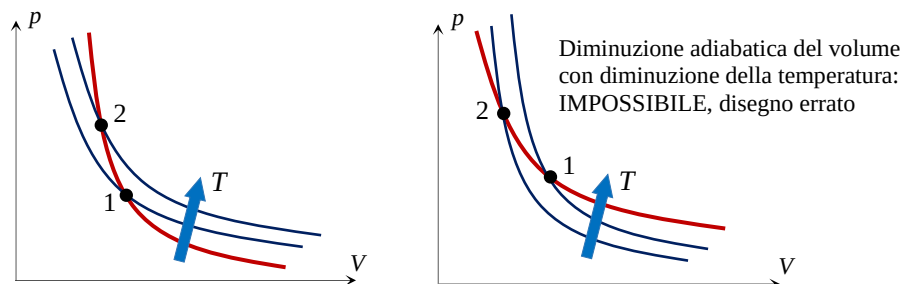


Fig. 4 – Il ciclo Diesel

(9) Per il gas B il volume è più grande a parità di pressione: il prodotto pV (costante per ipotesi per entrambi i gas, trattandosi di curve isoterme) è quindi più grande per il gas B. Dato che, per un gas perfetto, $pV = nRT$, nel gas B è più grande il numero n di moli, oppure la temperatura T , oppure entrambi. I dati non permettono di stabilire quale dei due gas sia più caldo.

(10) L'adiabatica è la linea rossa, che nel punto di intersezione presenta maggiore pendenza: se infatti il volume di un gas viene fatto diminuire senza una contemporanea sottrazione di calore (adiabatica), la sua temperatura aumenta e quindi il punto che ne rappresenta lo stato fisico in un diagramma p, V si sposta su isoterme via via «più calde» (più staccate dagli assi coordinati).

Perché il gas si riscalda? Si supponga che il gas sia contenuto entro un contenitore cilindrico chiuso da un pistone mobile: se il pistone si sposta verso il gas, le molecole che colpiscono il pistone rimbalzano indietro con energia cinetica di traslazione maggiorata (aumento del componente di velocità perpendicolare alla superficie del pistone).



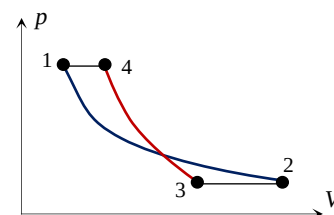
(11) Tutte e quattro le equazioni hanno la forma pV^α (= politropiche) con $\alpha = 1$ per una isoterma e, per una adiabatica, $\alpha = \gamma = C_p/C_v$ uguale a $8/6 = 1,33$ per i gas triatomici (a molecola non lineare), a $7/5 = 1,40$ per i biatomici, a $5/3 = 1,67$ per gas monoatomici.

Per una curva di equazione $pV^\alpha = k$, e cioè $p = k/V^\alpha$, la pendenza, a parità di p e di V , è tanto più forte quanto più grande è α . Ciò si può desumere dal fatto che la derivata di $p = kV^{-\alpha}$ rispetto a V è $dp/dV = -\alpha kV^{-\alpha-1}$. Essendo $k = pV^\alpha$, si ottiene $dp/dV = -\alpha p/V$, vale a dire: a parità di p e di V (cioè, in uno stesso punto del piano p, V , per esempio nel punto A della figura) la politropica ha pendenza tanto più grande quanto più grande è α .

(12) 1 - Le molecole che colpiscono il pistone in allontanamento perdono energia cinetica di traslazione.

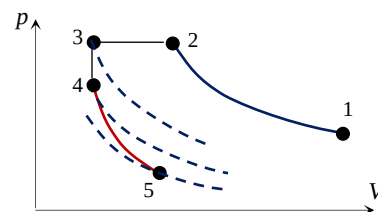
2 - Nei gas con molecola a più atomi, la perdita di energia cinetica traslazionale conseguente allo spostamento del pistone viene in parte compensata dal fatto che ogni grado di libertà deve avere in media la stessa energia cinetica, si verifica quindi una redistribuzione dell'energia cinetica con spostamento dai gradi di libertà rotazionali a quelli traslazionali, e conseguente rallentamento nella diminuzione della temperatura (e della pressione).

(13) Sì, grazie al fatto che, in uno stesso punto del piano p, V , l'adiabatica ha pendenza maggiore (vedi figura qui a lato).



(14) No, è impossibile. Dopo la prima trasformazione, che per ipotesi lascia invariata la temperatura, il gas si sposta verso temperature inferiori sia con la seconda che con la terza trasformazione. A questo punto non è possibile ritornare allo stato iniziale con un'espansione adiabatica, che implica un ulteriore raffreddamento (urtando contro il pistone in allontanamento le molecole perdono velocità).

In figura sono tratteggiate le curve isoterme relative allo stato 4 (raggiunto dal gas col raffreddamento isocoro) e allo stato finale 5.



(15) L'equazione è $(p + \frac{n^2 A}{V^2})(V - nB) = nRT$ dove i coefficienti A e B assumono valori **diversi** per i diversi gas. A determinare il volume del gas concorre, insieme alla pressione, anche la coesione molecolare: tutto va come se, insieme alla pressione esterna, agisse sul gas una sovrappressione fittizia (denominata **pressione interna**, o *pressione di coesione*): nel modello di Van der Waals (la pressione interna è inversamente proporzionale al quadrato del volume molare V/n (volume totale V diviso numero n di moli) del gas.

Per effetto della pressione interna il gas occupa, a parità di temperatura, un volume *minore* di quello indicato dall'equazione del gas perfetto. Ovvero: per effetto della pressione interna, la pressione che un gas esercita sulle pareti del contenitore è *inferiore*, a parità di volume e temperatura, a quella prevista dal modello del gas perfetto. Il che si giustifica subito se si tiene presente che la coesione molecolare rallenta le molecole, rendendo con ciò meno frequenti e in media meno violenti gli urti delle molecole più esterne contro le pareti.

Per effetto del covolume B (volume che il gas occuperebbe sotto una pressione infinita), il volume del gas è, a pari pressione, un po' superiore a quello che il gas occuperebbe se le molecole avessero volume zero.

L'equazione di VdW si riduce a quella del gas perfetto per basse pressioni (grandi rarefazioni):

1. sotto basse pressioni (grandi volumi) la pressione interna n^2A/V^2 diventa trascurabile rispetto alla pressione esterna p (la pressione esercitata sul gas, o dal gas),
2. quando il gas è molto rarefatto, il termine nB diventa trascurabile rispetto al volume V occupato dal gas.

(16) Sotto pressione costante, quindi con abbassamento del pistone mobile che chiude il recipiente (a causa della diminuzione del volume, la pressione esercitata dal gas resta costante nonostante il raffreddamento).

In tali condizioni occorre sottrarre calore non solo per raffreddare il gas, ma anche per neutralizzare l'effetto di riscaldamento prodotto dall'abbassamento del pistone (le molecole che colpiscono il pistone in movimento rimbalzano indietro con velocità maggiorata).

(17) Promemoria: la *mole* è un quantitativo il cui peso in grammi è dato dal numero che dà il peso di una molecola in rapporto all'atomo di idrogeno, es. 18 g per H_2O . Una mole contiene un numero fisso di molecole: $6,02 \times 10^{23}$ (numero di Avogadro).

Risposta (c): il calore specifico si ottiene infatti dal calore molare a volume costante (uguale per i gas perfetti a tante volte $R/2$ quanti sono i gradi di libertà della molecola, 3 i gas monoatomici, 5 per i gas biatomici, 6 per i pluriatomici) dividendo per il numero di grammi di una mole.

(18) Premessa: 1 cal = 4,19 J, calore necessario ad aumentare di 1 grado Celsius la temperatura di 1 g d'acqua (a 14,5°C)

Conviene ragionare in termini di moli.

70 g di azoto (N_2 , peso molecolare 28, peso di una mole 28 g) sono 2,5 moli di gas a molecola biatomica: il calore molare a pressione costante ($C_p = C_v + R$) è $5R/2 + R = 7R/2 = 3,5 \times 1,99 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K) = 6,96 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K)$.

85 g di ammoniaca (NH_3 , peso molecolare 17) sono 5 moli di gas a molecola pluriatomica: il calore molare a pressione costante è $8R/2 = 4 \times 1,99 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K) = 7,96 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K)$. La risposta è pertanto:
per l'azoto, $q = [6,96 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K)] \times (2,5 \text{ mol}) \times 40 K = 696 \text{ cal}$;
per l'ammoniaca, $q = [7,96 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot K)] \times (5 \text{ mol}) \times 40 K = 1592 \text{ cal}$.

(19) Il calore ceduto dall'acqua al ghiaccio dapprima riscalda il ghiaccio fino alla temperatura di fusione (0°C), e successivamente produce la fusione del ghiaccio: se il processo di fusione a un certo punto si arresta è perché la temperatura dell'acqua è scesa a 0°C e nessuno scambio di calore tra acqua e ghiaccio è più possibile.

Il bilancio energetico del processo è quindi: calore che scalda il ghiaccio fino alla temperatura di fusione + calore necessario alla fusione del 70% del ghiaccio = calore ceduto al ghiaccio dall'acqua che si raffredda:

e cioè, detta N la misura incognita in grammi del quantitativo d'acqua iniziale,

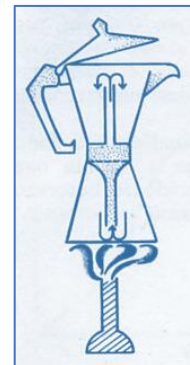
$$[0,48 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})] \times 2000 \text{ g} \times 10^\circ\text{C} + 80 \text{ (cal/g)} \times (0,7 \times 2000) \text{ g} = 1 [\text{cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})] \times N \text{ g} \times 50^\circ\text{C}.$$

(20) (a) La convezione consiste nello scambio di posizione tra masse fluide più calde (che risalgono verso l'alto per effetto del minor peso specifico) e masse fluide meno calde (che scendono a prendere il posto delle prime). Ma un corpo che si sposta *non rappresenta* uno spostamento di calore: il calore 'contenuto in un corpo' non esiste (calore è l'energia che viene scambiata per effetto di una differenza di temperatura).

(b) Il calore è *energia cinetica*: è l'energia cinetica scambiata da un corpo, in entrata o in uscita, a livello del moto di agitazione termica delle particelle costitutive (per contatto con un corpo a diversa temperatura nel caso della conduzione, per emissione/assorbimento di fotoni nel caso dell'irraggiamento).

[Da Tonzig – *100 errori di fisica* – cap.64 (“La caffettiera a convezione”)]

Relativamente al fenomeno della convezione, l'errore tipico è un altro: quello di considerare la convezione come un meccanismo di spostamento del calore, al pari della conduzione e dell'irraggiamento^[2]. Un discorso del genere poteva reggere ancora qualche decina d'anni fa, quando con la parola ‘calore’ la maggior parte degli Autori si riferiva all'energia associata al moto disordinato delle molecole: quella che in termodinamica si chiama energia cinetica interna. Ma la convenzione secondo la quale il termine calore indica *l'energia scambiata in funzione della temperatura* è ormai definitivamente accettata, e non è più lecito parlare di «calore contenuto in un corpo»: lo spostamento di un corpo caldo non rappresenta in alcun modo uno spostamento di calore, lo scambio di posizione tra fluido caldo e fluido freddo (convezione) non può essere descritto come uno spostamento di calore^[3].



Tuttavia, l'Autore citato non si ferma all'errore tipico: lancia l'idea della caffettiera a convezione, con ciò costringendo il consumatore a una presa di coscienza, e dando nel contempo concreta dimostrazione di come sia sempre possibile «calare la Fisica nel quotidiano». Il privilegio della citazione secondo me gli spetta.

Naturalmente, non è affatto vero che l'acqua calda sale al piano superiore in conseguenza di un moto di convezione: non c'è acqua fredda che scenda a prendere il posto dell'acqua calda che sale! L'acqua sale solo perché, al di sotto dell'imbuto centrale, alla pressione dell'aria si è aggiunta la pressione del vapor d'acqua, rapidamente crescente con la temperatura: così l'acqua viene spinta verso il basso, e, incompressibile com'è, è costretta a risalire lungo l'imbuto al piano superiore, aprendosi un varco attraverso il sovrastante strato di caffè.

Niente convezione, dunque, per la «caffettiera domestica». E meno che mai per quella del bar, o per la vecchia ‘napoletana’. Ma non è il caso di scandalizzarsi, di criticare. Come si dice? «L'eccesso di rigore può risultare controproducente». O anche: «L'importante è che lo studente capisca».

² L'Autore di un diffusissimo testo universitario per Ingegneria e Fisica si distrae e, dimenticandosi dell'irraggiamento, scrive: «Occorre sempre un mezzo materiale per la trasmissione del calore».

³ Ancora oggi, un'infinità di Autori non mollano, all'idea che il calore si identifichi con l'energia cinetica interna non possono rinunciare. Ne cito alcuni tra i più prestigiosi.

[A] «Il calore è una forma di energia interna dei corpi» (manuale universitario).

[B] «Tale moto interno è spesso chiamato calore» (manuale universitario americano).

[C] «L'energia cinetica dell'elettrone si converte in energia di moto del reticolo, cioè in calore» (manuale universitario americano).

Il bello è che, arrivati al primo principio della termodinamica, gli stessi Autori sono improvvisamente costretti a cambiare idea: quello che hanno continuato a denominare calore diventa improvvisamente energia cinetica interna, mentre il termine calore viene giustamente dirottato a designare quella parte dell'energia scambiata con l'esterno che non è possibile ricondurre ad esecuzione di lavoro. Succede anche questo: Autori che hanno definito il calore in modo corretto cadono poi in contraddizione usando il termine calore in modo improprio. Ad esempio, è comunissimo leggere che, quando un corpo è rallentato dall'attrito, o quando la corrente elettrica percorre un conduttore, si verifica una «dissipazione di energia in calore».

ESERCITAZIONE N.10

CAMBIAMENTI DI STATO

(TRANSIZIONI DI FASE)

ATTENZIONE: discorso riferibile, a rigore, solo a una **ristrettissima categoria di materiali**.

→ **Materiali costituiti da molecole tutte uguali** = sostanze pure, “individui chimici”

→ **Praticamente nessuno** dei materiali di cui abbiamo esperienza quotidiana.

L'**acqua** di cui si parla nelle tabelle (temperatura di fusione ed ebollizione... ecc.) è acqua pura (acqua distillata, vapore d'acqua, acqua di condensa del vapore, pioggia, neve), non l'acqua del rubinetto e tanto meno l'acqua del mare.

Facendo evaporare l'acqua del rubinetto, solo le molecole d'acqua passano allo stato di vapore: i diversi sali disciolti restano in soluzione e, una volta raggiunta la saturazione, «precipitano», separandosi e dando luogo a un residuo solido (spesso impropriamente denominato *calcare*).

Ma soprattutto: nei diagrammi di stato, cambia la posizione delle curve se ci sono sostanze in soluzione. Esempio: per l'acqua, a pari p è minore la temperatura di fusione (vedi acqua marina o acqua con antigelo) e maggiore la temperatura di ebollizione.

L'**aria** non è un individuo chimico: non esiste la molecola di aria, l'aria è una miscela di molecole di ossigeno, azoto, anidride carbonica, acqua. Non esiste per l'aria – come invece esiste per l'acqua – uno stato di vapore saturo in equilibrio con la fase liquida: i suoi componenti condensano separatamente l'uno dall'altro a temperature diverse. E non esiste una temperatura critica dell'aria (per l'acqua, $T_{cr} = 374\text{ K} = 647^\circ\text{C}$).

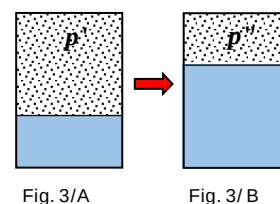
Sotto pressione atmosferica di 1 atm, la temperatura di ebollizione (tensione di vapore = 1 atm) è di 100°C per l'acqua, -80°C per la CO_2 (con passaggio diretto da vapore a solido¹ e viceversa), è di poco sopra i -200°C sia per l'ossigeno che per l'azoto (temperature di ebollizione più alte per pressioni $> 1\text{ atm}$).

Temperature Celsius critiche: acqua 647°C , anidride carbonica 31°C , azoto -147°C , ossigeno -119°C .

*Il discorso del cambiamento di stato può diventare particolarmente complesso se riferito a una **lega metallica** a molti componenti, come ad esempio l'acciaio (lega a base di ferro e carbonio, con aggiunta di silicio, nickel, manganese e altro).*

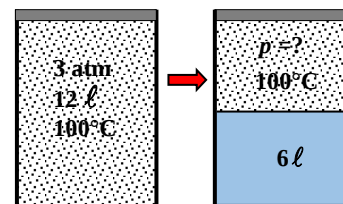
(1) All'interno di un recipiente chiuso di volume costante, contenente aria, viene mantenuta una **temperatura costante**. Se nel recipiente viene introdotta acqua fino a occupare $1/3$ del volume totale (fig. 3/A), la pressione sul liquido è p' ; se viene introdotta altra acqua fino a che il liquido occupa $2/3$ del volume totale (fig. 3/B), la pressione sul liquido diventa p'' . Risulta:

(a) $p'' = p'$, (b) $p'' = 2p'$, (c) $p' < p'' < 2p'$.



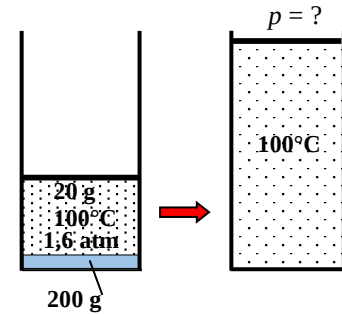
(2) Un recipiente di volume costante 12 l , entro il quale viene **mantenuta la temperatura di 100°C** , contiene aria compressa a 3 atm. Nel recipiente (seconda figura) viene introdotta acqua: a evaporazione ultimata, il volume dell'acqua è 6 l . Determinare:

- (a) la pressione sulla superficie libera del liquido
(b) quanta acqua è stata introdotta nel recipiente.



¹ Per la CO_2 le coordinate del punto triplo sono $\theta = -56^\circ\text{C}$ (minima temperatura possibile per lo stato liquido) e $p = 3880\text{ mmHg} = 5,1\text{ atm}$ (minima pressione possibile per lo stato liquido). Per l'azoto, al punto triplo la pressione è 94 mmHg , la temperatura -210°C . Al punto triplo dell'ossigeno, la temperatura è -119°C , la pressione è $1,14\text{ mmHg}$.

(3) Un recipiente cilindrico, chiuso superiormente mediante un pistone scorrevole di massa trascurabile, contiene **200 g** d'acqua liquida in equilibrio con aria e con **20 g** di vapore d'acqua. La **temperatura è mantenuta al valore di 100 °C**, la pressione esterna sul pistone vale 1,6 atm. A quale valore dovrebbe essere portata la pressione esterna se vogliamo che il cilindro contenga esclusivamente aria e vapore saturo (evaporazione totale del liquido)?



(4) Ogni cambiamento di stato di una determinata sostanza ha luogo a temperature ben determinate (il cui valore dipende dalla pressione). Vero o falso?

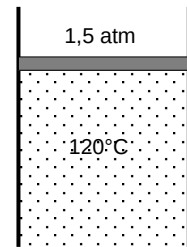
(5) Ogni passaggio di stato è accompagnato da assorbimento o liberazione di calore. Vero o falso?

(6) Ogni cambiamento di stato è accompagnato da una sosta termica: la temperatura cioè si mantiene costante nonostante la somministrazione di calore. Vero o falso?

(7) Se volessimo determinare sperimentalmente il valore del calore di fusione, dovremmo preoccuparci di mantenere costante la pressione (*vero/falso*).

(8) Il concetto di «calore di fusione» non può venire riferito a solidi amorfi come ad esempio il vetro (*vero/falso*).

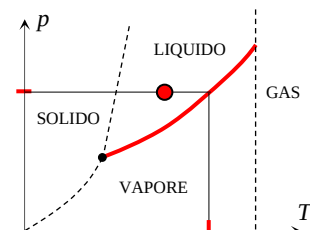
(9) Un cilindro verticale, chiuso superiormente da un pistone scorrevole di massa trascurabile sul quale agisce una pressione esterna di 1,5 atmosfere, contiene aria. La temperatura interna del cilindro viene **mantenuta a 120 °C**. Che cosa succede se nel cilindro viene introdotta acqua allo stato liquido?



(a) si forma vapore saturo, (b) si forma vapore insaturo (surriscaldato), (c) non si forma vapore.

Promemoria: la tensione di vapore dell'acqua a 120 °C è 2 atm.

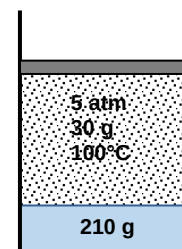
(10) La linea (rossa in figura) che, nel diagramma p, T , separa il campo di esistenza del vapore da quello del liquido fornisce, in funzione del valore della pressione atmosferica,



(a) la temperatura a partire dalla quale, sotto una data pressione atmosferica (asse delle ordinate), è possibile l'evaporazione del liquido (*vero/falso*)

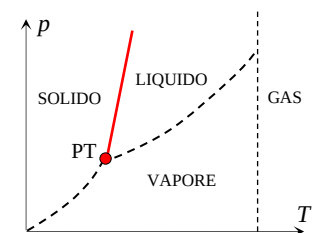
(b) la temperatura oltre la quale, per un dato valore di pressione atmosferica (ordinate), non è possibile scaldare il liquido (*vero/falso*).

(11) All'interno di un recipiente chiuso (figura) si trovano in equilibrio aria + vapore d'acqua (**30 g**) + acqua allo stato liquido (**210 g**): il manometro indica una pressione di **5 atm**, la temperatura è **mantenuta al valore di 100 °C**. Si determini:



(a) il quantitativo di vapore quando il volume viene diminuito fino a che la pressione interna sale a 13 atm;

(b) il quantitativo di vapore se il volume viene fatto aumentare fino a che la pressione interna scende a 1 atm.



(12) In un diagramma pressione - temperatura (figura), il punto triplo individua l'unica coppia di valori di pressione e temperatura per cui la coesistenza in equilibrio dei tre stati di aggregazione è possibile (*vero/falso*).

(13) Citazione: «In particolari condizioni, il passaggio dalla fase liquida a quella aeriforme può anche avvenire senza alcun apporto energetico esterno; in tal caso il processo si svolge a spese dell'energia interna con una macroscopica diminuzione della temperatura» (*testo di fisica per il liceo scientifico*). Dov'è l'errore?

SOLUZIONI

(1) Risposta (c). A seguito dell'ulteriore introduzione di acqua, raddoppia il valore della pressione parziale dell'aria (volume dimezzato a pari temperatura), mentre resta uguale il valore della pressione parziale del vapore. Dei due termini che, sommati, danno la pressione totale, uno è raddoppiato, l'altro è rimasto uguale: la pressione finale ha quindi un valore intermedio tra quella iniziale e il doppio di quella iniziale.

(2) (a) La pressione è la somma della pressione parziale del vapore d'acqua (saturato, visto che l'evaporazione si arresta prima che il liquido sia esaurito) e della pressione parziale dell'aria (raddoppiata rispetto al valore originario, essendo dimezzato il volume a pari temperatura, $pV = nRT$):

$$p = 1 \text{ atm} + 6 \text{ atm} = 7 \text{ atm}.$$

(b) L'acqua introdotta nel recipiente è data dai 6 ℓ rimasti allo stato liquido più quella evaporata. Il numero di moli in fase vapore è determinato dalle apposite tabelle (che danno il peso specifico [peso per unità di volume] del vapore saturo d'acqua alle diverse temperature) oppure anche – ma con minor precisione – dall'equazione di Van der Waals, in cui l'incognita è il numero n di moli d'acqua (ognuna delle quali corrisponde a 18 g):

$$\left(p + \frac{n^2 A}{V^2}\right) (V - nB) = nRT$$

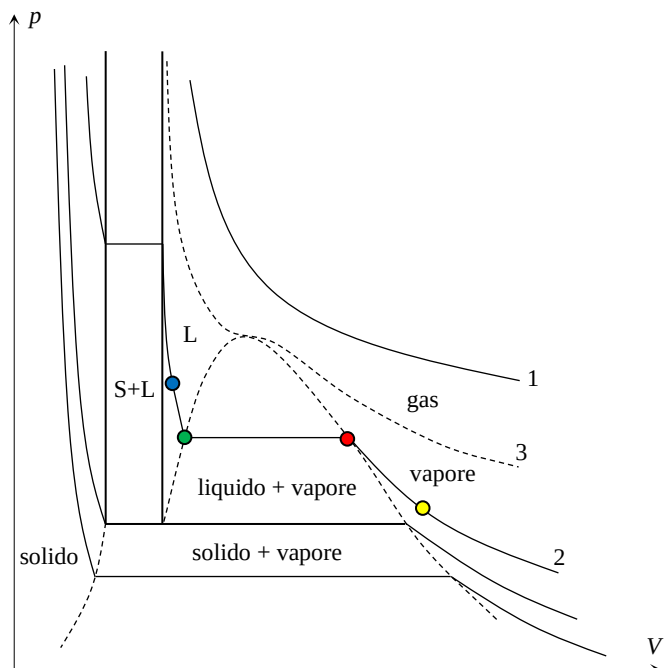
dove (ATTENZIONE!) $p = 1 \text{ atm}$, $V = 6 \text{ ℓ}$, $T = 373 \text{ K}$, $R = 0,082 \text{ ℓ} \cdot \text{atm}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

(3) Se tutta l'acqua è evaporata, il quantitativo di vapore saturo diventa $20 \text{ g} + 200 \text{ g} = 220 \text{ g}$, 11 volte più grande di quello iniziale. A pari temperatura, anche il volume della massa gassosa sarà 11 volte più grande, il che significa che la pressione parziale dell'aria sarà 11 volte più piccola: $(0,6/11) \text{ atm}$ anziché $0,6$. La pressione totale sarà pertanto $(1 + 0,6/11) \text{ atm}$.

(4) Falso. Questo vale solo per la fusione (dei solidi cristallini) e per quel particolare tipo di evaporazione che è rappresentato dall'ebollizione. **L'evaporazione – sia dei liquidi che, eventualmente, dei solidi (sublimazione) – si verifica a tutte le temperature del liquido o del solido:** esistono una temperatura di fusione (e di solidificazione) e una temperatura di ebollizione, ma la temperatura di evaporazione (o di condensazione) non esiste. L'acqua allo stato liquido evapora a qualsiasi temperatura si trovi. La neve (acqua allo stato solido) evapora (sublima) a qualsiasi temperatura si trovi. Al contrario, la fusione del ghiaccio avviene, per un dato valore della pressione ambiente, a un preciso valore della temperatura (0°C se la pressione è 1 atm); e l'ebollizione dell'acqua avviene, per un dato valore della pressione ambiente, a un preciso valore della temperatura: 100°C se la pressione è $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$, 120°C se la pressione è 2 atm , 133°C se $p = 3 \text{ atm}$, 80°C se $p = 355 \text{ mmHg}$, 50°C se $p = 93,0 \text{ mmHg}$, 10°C se $p = 9,28 \text{ mmHg}$, $0,01^\circ\text{C}$ se $p = 4,58 \text{ mmHg}$ (punto triplo dell'acqua).

(5) Falso. Questo vale per il passaggio di stato solido/liquido (fusione e solidificazione) e per l'ebollizione: **l'evaporazione non richiede invece nessun apporto di calore**. Se versiamo acqua in un recipiente chiuso termicamente isolato, l'acqua evapora fino alla saturazione dello spazio disponibile *senza ricevere calore*. Se mettiamo in frigo una bottiglia chiusa, piena a metà d'acqua, l'acqua evapora senza ricevere calore, anzi cedendone all'esterno. **Il calore di evaporazione deve essere fornito non per rendere possibile l'evaporazione, ma per mantenere costante la temperatura del sistema liquido+vapore.**

In figura, il calore di evaporazione è quello che occorre fornire per passare, **tramite aumento di volume**, dal pallino verde a quello rosso (da un estremo all'altro del tratto isobaro delle isoterme). Nota bene: occorre fornire calore anche per passare dal pallino blu a quello verde (dilatazione isoterma di un liquido), o da quello rosso a



quello giallo (espansione isoterma di un vapore).

(6) Falso. Ancora una volta, questo vale, **posto che la pressione si mantenga costante, solo per fusione (dei solidi cristallini, no vetro) ed ebollizione** (e naturalmente stiamo parlando di **processi abbastanza graduali e lenti da poter ritenere che la temperatura sia la stessa in tutti i punti del sistema, altrimenti non ha senso parlare di ‘temperatura del sistema’**).

Esempio: quando scaldiamo l’acqua per portarla all’ebollizione, l’evaporazione procede sempre più rapidamente mentre **la temperatura continua ad aumentare**.

(7) Vero, per definizione di ‘calore di fusione’ (calore fornito durante la fase **isoterma** del processo). Supponiamo che la pressione aumenti – con aumento della temperatura di fusione, come normalmente accade (non per l’acqua) – dopo che una certa parte del solido è già passata allo stato liquido. In tal caso occorrerà fornire non solo il calore necessario a fondere la parte residua, ma anche il calore necessario a scaldare il liquido già ottenuto e il solido ancora da fondere fino alla nuova temperatura di fusione.

Nel caso invece dell’acqua, se la pressione aumenta durante la fusione del ghiaccio, per completare la fusione occorrerà al contrario fornire una minor quantità di calore (il calore che è servito a scaldare il ghiaccio al di sopra della nuova, più bassa temperatura di fusione, viene ‘recuperato’ nel senso che serve adesso a fondere altro ghiaccio).

(8) Vero. Il calore di fusione è quello che, in un processo di riscaldamento sotto pressione costante, viene fornito una volta raggiunta la temperatura di fusione, mentre la temperatura si mantiene inalterata: nel caso dei solidi amorfi tale fase isoterma *non esiste*, la temperatura continua a crescere mentre il materiale si rammolisce sempre più. Si noti peraltro che il vetro non rientra nella categoria degli ‘individui chimici’ (o ‘sostanze pure’), essendo costituito da una miscela di molecole di tipo diverso².

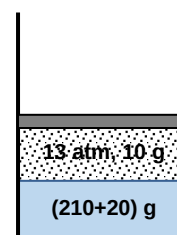
(9) Si forma vapore insaturo. All’equilibrio, la pressione interna deve valere 1,5 atm come la pressione esterna: la pressione parziale del vapore è quindi sicuramente inferiore al valore di saturazione (a 120°C, 2 atm). Il liquido evapora tutto, il vapore formatosi e l’aria si espandono fino a che la pressione interna scende nuovamente a 1,5 atm.

(10) (a) Falso: l’evaporazione si verifica a *qualsiasi* temperatura.

(b) Vero: quando la temperatura del liquido è tale per cui la tensione di vapore (indicata dalla linea in questione) raggiunge il valore della pressione atmosferica, **il liquido entra in ebollizione** e non è possibile riscaldarlo ulteriormente. Per l’acqua, a $p = 1$ atm corrisponde $T = 373,15$ K.

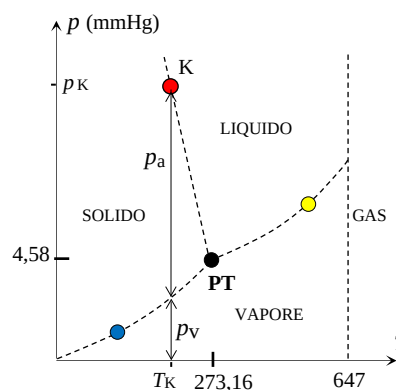
(11) (a) A temperatura costante, anche la pressione parziale del vapore saturo d’acqua si mantiene invariata: 1 atm. Se quindi la pressione totale sale da 5 a 13 atm, la pressione parziale dell’aria sale da (5-1) atm = 4 atm a (13-1) atm = 12 atm, il che significa che il suo volume è diventato tre volte più piccolo: perciò è tre volte più piccolo (10 g) anche il quantitativo di vapore.

(b) Se la pressione scende a 1 atm significa che il vapore dà una sua pressione parziale inferiore a 1 atm, quindi non è più saturo: l’acqua è completamente evaporata, il quantitativo di vapore è (30 + 210) g = 240 g, rispetto alla situazione iniziale il suo volume è più che moltiplicato per 8 (come invece sarebbe se il vapore formatosi fosse saturo).



(12) Vero solo se nella fase gassosa sono presenti solo molecole di un unico tipo (per es. H_2O , oppure CO_2), in completa assenza di altri gas o vapori (in particolare, in assenza d’aria). In caso contrario i tre stati di aggregazione possono coesistere in tutte le infinite combinazioni pressione/temperatura definite dalla curva di fusione (la curva – rossa in figura – che dà la temperatura di fusione per i diversi valori della pressione ambiente).

Facciamo il caso dell’acqua. Il diagramma di stato pressione/temperatura si presenta all’incirca come in figura (per chiarezza di rappresentazione le proporzioni *non* sono rispettate). Le coordinate del punto triplo (PT) sono $p = 4,58$ mmHg, $T = 0,01^\circ C = 273,16$ K). La linea che delimita superiormente il campo di esistenza del



² Ossido di silicio (o silice, SiO_2), carbonato di sodio (soda, Na_2CO_3), carbonato di potassio (potassa, K_2CO_3) ecc.

vapore dà, per i diversi valori della temperatura, il valore della tensione di vapore. La linea che separa il campo di esistenza del solido da quello del liquido è la ‘linea di fusione’, che mostra come si corrispondono pressione atmosferica e temperatura di fusione (temperatura di equilibrio tra ghiaccio e liquido) ^[3].

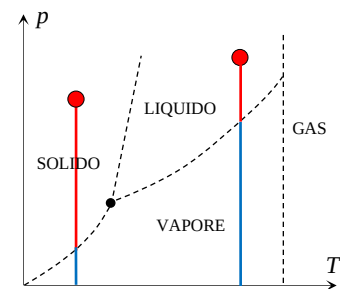
Supponiamo che un **recipiente chiuso** contenga esclusivamente molecole di H_2O (niente aria): in queste condizioni le tre fasi possono coesistere solo alla pressione e alla temperatura del punto triplo. Se la temperatura è inferiore alla temperatura del PT ($0,01^\circ C$), nel recipiente possono coesistere solo ghiaccio e vapore saturo (punto blu), oppure ghiaccio e liquido (punto rosso); se la temperatura è superiore a $0,01^\circ C$, possono coesistere solo liquido e vapore saturo (punto giallo); se la temperatura è proprio $0,01^\circ C$, la fase condensata (se c’è) può essere o solo ghiaccio, o solo acqua, oppure ghiaccio e acqua in tutti i possibili rapporti: il vapore saturo (se c’è, dipende dal volume disponibile) eserciterà sulle fasi condensate una pressione di 4,58 mmHg.

Ma supponiamo adesso che **il recipiente (chiuso) contenga anche aria**: allora un punto come il punto K del diagramma (fig.1) rappresenta una situazione in cui il solido, il liquido e il vapore possono coesistere alla temperatura T_K . La pressione p_K che agisce sulla fase condensata e sulle pareti del recipiente è la somma di due pressioni parziali, la pressione p_v del vapore d’acqua saturo e la pressione p_a dell’aria. Ovviamente lo stesso discorso può essere riferito a qualsiasi altro punto della linea di fusione: solo al punto triplo la pressione parziale dell’aria deve essere zero, deve cioè mancare l’aria.

→ Più in generale: **il fatto che i valori di pressione e temperatura portino (punti rossi in figura) nel campo di esistenza delle fasi condensate (solido e liquido) non esclude la contemporanea presenza della fase vapore**.

Se infatti, come normalmente accade, la pressione viene esercitata sulla fase condensata tramite uno strato d’aria, il solido e il liquido tendono ad evaporare – fino alla saturazione dello spazio disponibile per il vapore – *comunque grande sia la pressione*.

Qualora pertanto, per la limitatezza dello spazio disponibile, l’evaporazione non potesse essere completa (si pensi a una bottiglia chiusa contenente acqua), insieme alla fase condensata residua sarà presente, in equilibrio con la fase condensata, anche il corrispondente vapore. La pressione esercitata sulla fase condensata sarà in tal caso la somma di due pressioni parziali: quella prodotta dal vapore (valore indicato dal diagramma pressione-temperatura, vedi le linee blu in figura) e quella prodotta dall’aria (linee rosse).



(13) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.5 (“Niente calore per l’evaporazione”)]

Non «in particolari condizioni», ma sempre, assolutamente sempre. L’evaporazione di un liquido non richiede calore: il liquido se la cava benissimo da solo. Versiamo in una bacinella un po’ d’acqua bollente, e poniamola sul davanzale della finestra. È chiaro che l’acqua non può ricevere calore dall’ambiente circostante, notevolmente più freddo. Forse allora che l’acqua, non ricevendo calore, non potrà evaporare?

Macché, se solo le diamo tempo evaporerà fino all’ultima goccia. Naturalmente – ma questa è un’altra faccenda – andrà via via raffreddandosi, per effetto sia del contatto con l’ambiente, sia del calore irradiato, sia soprattutto dell’evaporazione stessa: perché sono le molecole più veloci quelle che riescono a ‘disaggregarsi’ più facilmente e che abbandonano per prime il liquido, cosicché l’energia cinetica media delle molecole non ancora evaporate continua ad abbassarsi. [...]

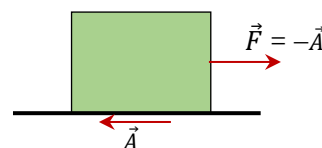
E il «calore latente di vaporizzazione», allora? Non è affatto «il calore necessario per l’evaporazione di 1 g di liquido», come tanti Autori sostengono. Ma è il calore *necessario per ottenere da 1 g di liquido (saturato, cioè sottoposto a una pressione uguale alla sua tensione di vapore) 1 g di vapore saturo alla stessa temperatura*. (continua)

³ Si vede qui una delle numerose anomalie della sostanza ‘acqua’: al crescere della pressione la temperatura di fusione diminuisce anziché aumentare (come in generale succede): un aumento della pressione facilita la fusione. Ciò dipende dal fatto che in questo specifico caso il solido è più voluminoso del liquido (non per nulla il ghiaccio, avendo più volume del liquido a parità di peso e quindi minor peso specifico, galleggia sull’acqua).

ESERCITAZIONE N.11

TERMODINAMICA (1) – PRIMO E SECONDO PRINCIPIO

(1) (a) Un blocco viene trainato lungo una tavola orizzontale, in presenza di attrito, da una forza motrice $\vec{F}$ uguale in modulo alla forza d'attrito $\vec{A}$. Non agiscono sul blocco altre forze orizzontali, cosicché la velocità del blocco si mantiene costante. In relazione a uno spostamento x del blocco, il lavoro della forza motrice è dato da Fx , ma il lavoro della forza d'attrito **NON** ha valore $-Ax$. Chiarire in base al primo principio della termodinamica ($q + L_e = \Delta U$). (Suggerimento: il blocco si riscalda per attrito)



(b) Il lavoro delle forze di attrito su due superfici a contatto è complessivamente zero (vero / falso).

(2) Come mai, nel problema della domanda 1, l'energia cinetica del blocco resta costante se il lavoro complessivo della forza motrice $\vec{F}$ e della forza d'attrito $\vec{A}$ è maggiore di zero?

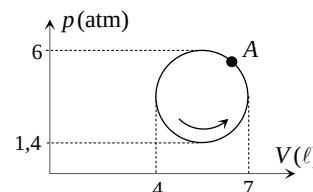
(3) Con riferimento ai cicli termici (o 'cicli motori' = positivo il lavoro compiuto in un ciclo) che coinvolgono due sole sorgenti di calore, il teorema di Carnot assegna un valore privilegiato al rendimento dei cicli del gas perfetto (vero/falso).

(4) Il secondo principio della termodinamica stabilisce che mentre la completa trasformazione di lavoro in calore è sempre possibile, il contrario, e cioè una completa trasformazione di calore in lavoro è impossibile (vero/falso).

(5) È stato calcolato che dal raffreddamento di un solo centesimo di grado Celsius dell'acqua degli oceani (una variazione termica insignificante dal punto di vista degli equilibri biologici) si potrebbe ricavare una quantità di energia molto superiore a quella fornita da tutto il petrolio finora estratto e da quello non ancora estratto. Perché allora non si utilizzano gli oceani come sorgente di energia?

(6) Si discuta la seguente asserzione (anche testi universitari): per convenzione, il lavoro termodinamico è considerato positivo se è il sistema a compierlo sull'esterno, negativo se viene compiuto dall'esterno sul sistema.

(7) Un gas reale, inizialmente nello stato A, subisce poi una trasformazione ciclica rappresentata nel piano pressione/volume da una circonferenza percorsa in senso antiorario. Determinare il lavoro compiuto dal gas.



(8) Il primo principio della termodinamica può essere espresso nella forma $q = L + \Delta U$ (dove q è il calore, fornito al sistema) **solo se** sono verificate alcune particolari condizioni. Chiarire.

(9) In una calda giornata estiva la signora Maria, che sta uscendo di casa per andare a fare la spesa, decide di lasciare in funzione il ventilatore, nella speranza di trovare l'appartamento un po' più fresco al ritorno. È una speranza fondata?

(10) Citazioni: (A) «Un sistema si dice in equilibrio termodinamico quando soddisfa contemporaneamente alle seguenti condizioni: a) equilibrio meccanico: le forze esercitate dal sistema sull'esterno sono equilibrate da forze uguali ed opposte esercitate dall'esterno sul sistema» (testo universitario per ingegneria e fisica). Dov'è l'errore?

(B) «Se la trasformazione non è reversibile, non è detto a priori che la forza esercitata dal pistone sul fluido uguagli quella esercitata dal fluido sul pistone, in quanto ciò avviene solo se la trasformazione attraversa una successione di stati di equilibrio termodinamico» (stesso testo). Dov'è l'errore?

SOLUZIONI

(1) (a) Se il lavoro della forza d'attrito fosse uguale e contrario a quello della forza motrice, il lavoro complessivo L_e delle forze applicate al blocco dall'esterno sarebbe zero: ma allora (primo principio della termodinamica) non si spiegherebbe l'effetto di riscaldamento che il blocco subisce a causa dell'attrito: nella relazione $q + L_e = \Delta U$ (che possiamo applicare in questa forma perché non ci sono variazioni nell'energia cinetica del blocco) sarebbe $\Delta U > 0$ con $L_e = 0$ e $q = 0$ (o addirittura $q < 0$, dato che la base del blocco, riscaldandosi per attrito, si sposta man mano su zone superficiali più fredde in quanto non ancora sottoposte ad attrito). Il lavoro L_e delle forze esterne deve essere quindi > 0 come ΔU , il che significa che il lavoro negativo della forza d'attrito è, in valore assoluto, $< \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

[In caso di simmetria, es. lastra su lastra identica, $L_a = 0$, cfr. Tonzig, *Semplicemente fisica*, pag.52]

Spiegazione: le forze d'attrito agiscono su protuberanze superficiali che momentaneamente 'si attaccano' alle analoghe irregolarità del piano d'appoggio e 'restano indietro' rispetto al blocco (si veda in 'Semplicemente fisica' il capitolo *I modelli della fisica*, modello del corpo rigido).

(b) Vero. Se, con riferimento alla domanda precedente, indichiamo con d lo spostamento del blocco, con L_a il lavoro d'attrito sul blocco, con L'_a il lavoro d'attrito sul piano d'appoggio, con U l'energia interna del blocco, con U' l'energia interna del piano d'appoggio e con q il calore ceduto dal blocco (che si riscalda più del piano) al piano d'appoggio, il primo principio della termodinamica ci dice che per il blocco deve essere

$$[1] \quad Fd + L_a - q = \Delta U$$

e per il piano d'appoggio

$$[2] \quad L'_a + q = \Delta U'$$

Per l'intero sistema (blocco + piano) deve invece essere

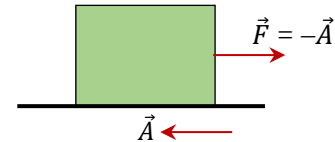
$$[3] \quad Fd = \Delta U + \Delta U'$$

Se adesso sommiamo la [1] con la [2], otteniamo

$$[4] \quad Fd + L_a + L'_a = \Delta U + \Delta U'$$

Confrontando la [4] con la [3] si vede che deve essere $L_a + L'_a = 0$.

IMPORTANTE: si vede qui bene ($L'_a \neq 0$) che **il lavoro delle forze d'attrito radente non è dato da forza per spostamento** (del corpo su cui l'attrito agisce).

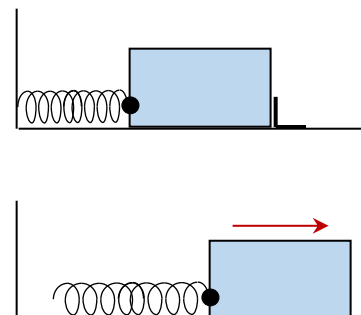


(2) Perché in questo caso il blocco **non può essere schematizzato come un corpo rigido** (la superficie inferiore è soggetta a deformazioni), per cui il teorema dell'energia cinetica dovrebbe essere applicato **tenendo anche conto del lavoro delle forze che agiscono internamente al blocco**.

Delle forze interne ci possiamo dimenticare **solo se** applichiamo il teorema dell'energia cinetica (come siamo sempre autorizzati a fare) **al solo moto del centro di massa** (assumendo che tutte le forze siano applicate in esso, col che le forze interne, la cui somma è zero per la legge di azione e reazione, scompaiono).

Analogia: il sistema blocco + molla (figura a lato) acquista energia cinetica pur essendo zero il lavoro delle forze esterne (esattamente come quando si effettua un salto). **È il lavoro positivo delle forze interne alla molla a produrre l'energia cinetica del sistema** (che comunque può essere qui calcolata applicando al centro di massa la forza elastica di reazione proveniente dalla parete^[1]).

NB!! Il fatto che il lavoro delle forze interne non sia nullo (nonostante che ad ogni forza interna corrisponda una forza interna uguale e contraria) sta ad indicare che in una molla (e IN QUALSIASI CORPO NON RIGIDO) **le forze interne non possono essere considerate forze 'di contatto'** (tipo pistone su gas), perché in tal caso il lavoro complessivo sarebbe zero.



¹ Vedi per esempio in Tonzig, *Fondamenti di Meccanica classica*, pag. 262-263.

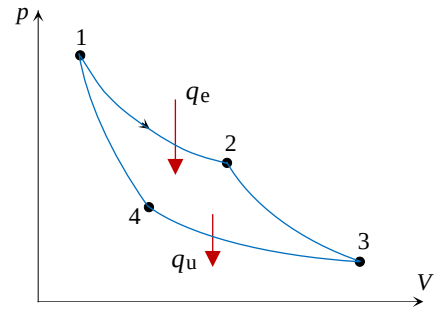
(3) Falso. Il rendimento privilegiato è assegnato **non ai gas perfetti ma ai cicli reversibili** (in questo caso, trattandosi di due sole sorgenti, ai cicli di Carnot, due isoterme + due adiabatiche), **indipendentemente** dal particolare sistema fisico che subisce il ciclo.

Il teorema non menziona in effetti in alcun modo il gas perfetto, stabilisce solo che fra tutti i **cicli termici che utilizzano due sole sorgenti** il rendimento più elevato spetta ai cicli reversibili, che hanno necessariamente tutti, a pari temperatura delle sorgenti, uno stesso rendimento (biunivocamente legato alla temperatura delle sorgenti):

$\eta = L/q_e = (q_e - q_u) / q_e = 1 - q_u/q_e$ (rendimento di un ciclo generico), q_e è il calore scambiato in entrata (espansione isoterma 1 → 2) e q_u quello scambiato in uscita (compressione isoterma 3 → 4).

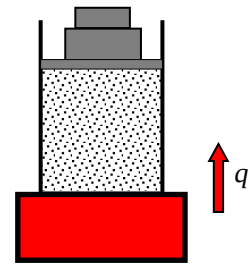
→ $\eta = 1 - T_u/T_e$ (rendimento di un ciclo di Carnot, per il quale $q_u/q_e = T_u/T_e$)

Nel caso particolare di un gas perfetto, il rendimento di un ciclo di Carnot corrisponde al rapporto tra area del ciclo (L) e area sottesa dall'isoterma 1-2 (per la quale, trattandosi di gas perfetto, $\Delta U = 0$ e quindi $L = q_e$).



(4) Falso. Quello che non è possibile è che la completa trasformazione di calore in lavoro sia **l'unico** risultato del processo: il sistema che ha ricevuto x J di calore e ha compiuto x J di lavoro si trova alla fine in uno stato termodinamico **diverso** da quello originario.

Esempio (figura): se, per una diminuzione della pressione a cui è sottoposto, un gas **perfetto** si espande contro un pistone mobile mantenendosi a contatto con una sorgente di calore, e quindi in definitiva senza effetti di raffreddamento (temperatura finale uguale a quella iniziale), la sua energia interna, **dipendente solo dalla temperatura** (gas perfetto, niente energia potenziale), non subisce variazioni: perciò, il primo principio della termodinamica ($q = L + \Delta U$) ci assicura che il calore q fornito al gas dalla sorgente è stato tutto 'trasformato' nel lavoro L compiuto dal gas sul pistone. Tuttavia il gas si trova ora in uno **stato termodinamico diverso** da quello originario (temperatura uguale ma pressione inferiore e volume più grande): perciò la conversione di calore in lavoro *non è stato* l'unico effetto del processo.



Il processo inverso – un processo il cui unico risultato sia la trasformazione di lavoro in calore – è invece possibile: è quanto accadrebbe, ad esempio, se cercassimo di riscaldare un gas per agitazione meccanica (esecuzione di lavoro) mantenendone costanti volume e temperatura (contatto con una sorgente termica alla temperatura iniziale del gas): il gas si manterrebbe nello **stesso** stato termodinamico (dunque $\Delta U = 0$), il calore ceduto dal gas alla sorgente fredda sarebbe, per il primo principio ($q + L = \Delta U$), l'esatto corrispettivo del lavoro da noi compiuto sul gas nella fase di agitazione.

Nota. L'**aggettivo 'unico' può essere un po' fuorviante**: neanche nel precedente esempio di trasformazione integrale di lavoro in calore il risultato è 'unico', perché la cessione di calore al corpo freddo determina una variazione nello stato termodinamico di quest'ultimo. Se per esempio si tratta, come ipotizzato, di una sorgente termica (o termostato, o serbatoio di calore che dir si voglia), la sua entropia subirebbe l'incremento $\Delta S = q/T$, dove T è la temperatura costante del termostato.

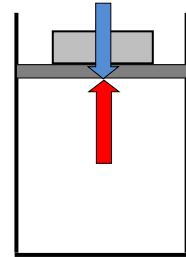
Promemoria: il **termostato** in questione è un sistema termodinamico ideale che può scambiare energia solo in forma termica (niente esecuzione di lavoro), di conducibilità termica infinita (temperatura sempre uguale in ogni punto), di capacità termica infinita (temperatura costante indipendentemente dagli scambi di calore).

→ Anziché 'unico risultato' sarebbe più opportuno (meno ambiguo) dire semplicemente: **senza che si verifichino variazioni nello stato termodinamico del sistema.**

(5) Occorrerebbe disporre di macchine capaci di estrarre calore dall'acqua del mare e di utilizzarlo per la produzione di lavoro. Per il secondo principio (enunciato di Kelvin-Planck), è impossibile che una macchina termica lavori (in modo continuativo, e cioè attraverso una successione di cicli) senza cedere a una sorgente a più bassa temperatura una parte del calore assorbito. Nel caso dell'acqua del mare tale sorgente non esiste (o non è utilizzabile, per esempio perché non accessibile, tipo ambiente polare).

Nota: come sorgente fredda si potrebbero usare le acque profonde (portate in superficie mediante pompe), ma **la spesa di energia sarebbe molto superiore all'energia ottenuta**. Se assumiamo che la temperatura dell'acqua possa essere 20°C in superficie e 0°C (o anche un po' meno di 0°C in profondità, con grandi pressioni²), otteniamo che la nostra ipotetica macchina termica avrebbe un rendimento massimo (quello di un ciclo di Carnot, $1 - T_{\min}/T_{\max}$) di poco superiore al 5%, verosimilmente insufficiente anche solo a fornire l'energia necessaria a portare in superficie l'acqua fredda.

(6) L'affermazione è priva di senso: il lavoro compiuto **dal sistema**, vale a dire dalle forze che il sistema esercita su corpi che non fanno parte del sistema, può essere, a seconda dei casi, sia positivo che negativo (si pensi alla spinta di un gas [freccia rossa] sul pistone di chiusura di un recipiente cilindrico: il lavoro compiuto dal gas è positivo se il pistone si sposta verso l'alto, altrimenti è negativo). Analogamente, può risultare sia positivo che negativo il lavoro compiuto **sul sistema** da parte di forze esterne [freccia azzurra] ad esso applicate.



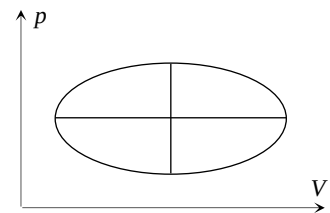
Dire che 'il lavoro termodinamico è positivo se...' ecc. ecc., corrisponde a dire che il lavoro termodinamico è contemporaneamente positivo e negativo, visto che in realtà compiono sempre lavoro **sia il sistema sull'ambiente che l'ambiente sul sistema**.

ATTENZIONE!

Se scrivo $q = L + \Delta U$, L è il lavoro (positivo o negativo a seconda dei casi) compiuto **dal sistema**

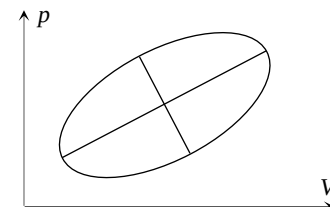
Se scrivo $q + L = \Delta U$, L è il lavoro (positivo o negativo a seconda dei casi) compiuto **sul sistema**.

(7) Si tratta chiaramente di un lavoro negativo (ciclo antiorario). Il valore assoluto corrisponde all'area racchiusa dalla circonferenza: si noti a tale proposito che il fatto che il ciclo risulti rappresentato proprio da una circonferenza, piuttosto che da un'ellisse (con assi paralleli agli assi coordinati, figura), è una circostanza del tutto fortuita, legata alla particolare scala di rappresentazione prescelta. Essendo data l'area dell'ellisse da π moltiplicato per il prodotto dei due semiassi, nel nostro caso l'area corrisponde a un lavoro di valore assoluto



$$\pi \times 1,5 \ell \times 2,3 \text{ atm} = 10,84 \ell \cdot \text{atm} = 10,84 \ell \cdot \text{atm} \times [101,3 \text{ J}/(\ell \cdot \text{atm})] = 1098 \text{ J}.$$

Nota. Si è considerata, come grafico della trasformazione, un'ellisse ad assi rispettivamente paralleli a x e a y . Ma si noti che l'area dell'ellisse (il lavoro quindi compiuto dal sistema) è univocamente determinata dalla lunghezza degli assi, indipendentemente dalla loro particolare direzione.^[3] Dunque, l'area potrebbe essere *in ogni caso* determinata misurando la lunghezza di uno degli assi nella scala dei volumi, e la lunghezza dell'altro asse nella scala delle pressioni.



→ Cambierebbero invece le aree sottese... e quindi efficienza (o rendimento) del ciclo.

(8) (a) L è il lavoro (positivo o negativo a seconda dei casi) compiuto **dal sistema** sull'esterno, altrimenti bisognerebbe scrivere $q + L = \Delta U$.

(b) il lavoro L compiuto dal sistema è dovuto a **forze di contatto** (gas che preme sulle pareti del contenitore, fluido che resiste a un rimescolamento, ecc.), **non** a interazione a distanza (es. attrazione gravitazionale). In tal modo, il lavoro compiuto *sul sistema* da parte di forze esterne e il lavoro compiuto *dal sistema* sull'esterno sono sempre uguali in valore assoluto e opposti in segno. L'esempio tipico è quello del lavoro compiuto da un pistone mobile su un gas, e dal gas sul pistone; ma si tenga presente che questo vale **anche per le forze di attrito**: il lavoro complessivo delle forze d'attrito su due superfici a contatto è sempre zero.^[4]

² Temperatura di fusione: 7,5 millesimi di grado Celsius in meno per ogni atmosfera di pressione in più, 1 °C ogni 133 atm di pressione in più.

³ Ogni nuova posizione dell'ellisse può considerarsi ottenuta da quella sopra considerata disponendo diversamente nel piano p, V i "quadrantini" elementari che la costituiscono.

⁴ Si veda eventualmente per questo in G. Tonzig – *Fondamenti di meccanica classica*, pag. 291

(c) ci si riferisce a trasformazioni che hanno **inizio e termine in uno stato di equilibrio meccanico e termodinamico** (in particolare, no differenze di temperatura all'interno del sistema).

La **forma più generale** del 1° principio è infatti

$$[1] \quad q + L_e = \Delta \frac{mv_{CM}^2}{2} + \Delta EC_i + \Delta EP_i$$

dove L_e è il lavoro complessivamente eseguito dall'esterno sul sistema (**da forze anche non di contatto, per esempio gravitazionali**);

EC_i è l'energia cinetica complessiva 'interna', vista cioè nel riferimento del centro di massa^[5], delle varie parti (macro e microscopiche) del sistema;

EP_i è l'energia potenziale complessiva interna, associata cioè alle interazioni fra le varie parti (macro e microscopiche) del sistema.

[si veda eventualmente per questo in G. Tonzig, *La fisica del calore*, pag.107]

→ Per trasformazioni che hanno inizio e termine in uno stato di equilibrio meccanico e termodinamico, nella [1] il termine $\Delta(mv_{CM}^2/2)$ è zero, e il primo principio della termodinamica assume la forma

$$[2] \quad q + L_e = \Delta U$$

dove è sottinteso che, essendo stati di equilibrio sia quello iniziale che quello finale, l'energia cinetica contenuta nel termine ΔU (dove c'è eventualmente anche l'energia potenziale!) è soltanto l'energia termica (associata al moto disordinato, casuale, statisticamente nullo delle particelle costitutive).

(9) No: la temperatura risulterà semmai lievemente più alta, esattamente come nel caso del mulinello di Joule (agitazione di un liquido). Il refrigerio che si prova in prossimità di un ventilatore è dovuto non a un raffreddamento dell'aria, ma al fatto che il passaggio dell'aria sulla pelle ne attiva i processi di traspirazione e autoregolazione termica. In realtà, un ventilatore in funzione produce sull'aria dell'ambiente un effetto di riscaldamento: l'energia elettrica consumata dall'apparecchio trova in parte riscontro nel lavoro compiuto dalle pale in rotazione sull'aria, con produzione di energia cinetica macroscopica (che immediatamente dopo, per effetto degli attriti interni all'aria, si trasforma in energia cinetica del moto di agitazione termica delle molecole); la parte residua dell'energia assorbita dal ventilatore trova riscontro nel riscaldamento degli avvolgimenti del motore, con cessione di calore all'aria circostante. **In termini di primo principio**, l'aria riceve calore (per conduzione e per irraggiamento) e compie un lavoro esterno negativo (sulle pale del ventilatore): di qui l'incremento della sua energia interna. *Un ventilatore da 60 W produce sull'aria esattamente lo stesso effetto di riscaldamento di una lampada da 60 W.*

(10) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.66 ("L'invenzione dell'equilibrio perpetuo")]

Che cosa rappresenta tutto questo? Da un lato, la negazione del principio di azione e reazione. Dall'altro, lo sconvolgimento della statica del corpo rigido. Nell'insieme, un cataclisma.

A norma del principio di azione e reazione, la forza del pistone sul gas non può che essere identica, in valore, alla forza del gas sul pistone: *equilibrio o non equilibrio*. [...]

Quanto all'equilibrio del pistone, non si vede in che modo possa dipendere dalla forza che il pistone esercita sul gas: in che modo cioè *le forze che agiscono su un corpo A* (il pistone) *possano essere equilibrate da forze che agiscono su un corpo B* (il gas). Quand'anche, a dispetto della legge di azione e reazione, le due forze – quella del pistone sul gas e quella del gas sul pistone – risultassero diverse, il pistone potrebbe nondimeno restare in equilibrio alla condizione (necessaria, non sufficiente) che fosse zero la somma delle forze ad esso applicate: le forze che agiscono *sul pistone* verso l'alto devono essere equilibrate dalle forze che agiscono *sul pistone* verso il basso. Viceversa, se davvero l'equilibrio del pistone dipendesse dall'uguaglianza tra forza del pistone sul gas e forza del gas sul pistone, essendo il valore delle due forze sempre, obbligatoriamente identico, il pistone sarebbe *sempre e comunque in equilibrio*. Talché si potrebbe anche dire che i brani citati rappresentano l'invenzione dell'equilibrio perpetuo.

(continua)

⁵ Promemoria: il riferimento del centro di massa è una terna cartesiana con origine nel centro di massa, animata da moto traslatorio, rettilineo e uniforme (o eventualmente immobile) rispetto ai riferimenti inerziali.

ESERCITAZIONE N.12

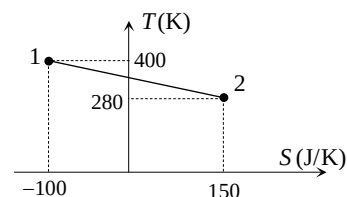
TERMODINAMICA (2) – ENTROPIA

L'ENTROPIA È UNA MISURA DELLA PROBABILITÀ
L'ENTROPIA È UNA MISURA DEL DISORDINE
PIÙ GRANDE È L'ENTROPIA, PIÙ PICCOLA È L'INFORMAZIONE
L'ENTROPIA DELL'UNIVERSO È IN CONTINUO AUMENTO

ARGOMENTO IMPEGNATIVO!

- (1) Che cos'è l'entropia?
- (2) La grandezza fisica entropia può assumere valori solo positivi (*vero/falso*).
- (3) In quale eventualità il calore assorbito da un sistema durante una trasformazione dallo stato 1 allo stato 2 è uguale all'integrale $\int_{S_1}^{S_2} T dS$?
- (4) La temperatura di un generico sistema termodinamico si mantiene costantemente al valore di 25 °C. Quale variazione subisce l'entropia del sistema se gli viene fornita una quantità di calore $q = 10^4$ cal?

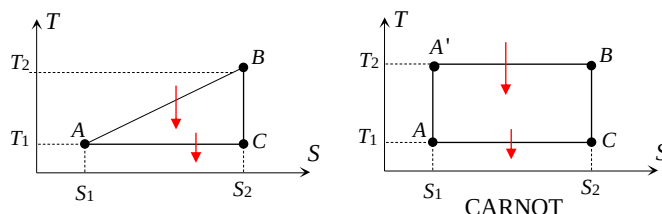
(5) Un generico sistema termodinamico subisce una trasformazione rappresentata nel diagramma temperatura-entropia (piano di Gibbs) da un segmento rettilineo: nello stato iniziale è $T_1 = 400$ K, $S_1 = -100$ J/K; nello stato finale è $T_2 = 280$ K, $S_2 = 150$ J/K. Si calcoli il calore scambiato dal sistema.



- (6) La pressione finale di un gas perfetto è uguale alla pressione iniziale: come si può esprimere la variazione dell'entropia del gas?
- (7) Il volume finale di un gas perfetto è uguale a quello iniziale: come si può esprimere la variazione dell'entropia del gas?
- (8) La temperatura finale di un gas perfetto è uguale a quella iniziale: come si può esprimere la variazione dell'entropia del gas?
- (9) Come si può esprimere la variazione di entropia nella trasformazione generica di un gas perfetto?
- (10) Ogniqualevolta un sistema subisce una trasformazione irreversibile, la sua entropia necessariamente aumenta (*vero/falso*).
- (11) (a) Nel diagramma pV di un gas perfetto i punti posti su una stessa curva adiabatica corrispondono a stati di uguale entropia. Spiegare.
 (b) I punti posti al di sopra della curva rappresentano stati di entropia più grande, quelli posti al di sotto rappresentano stati di entropia più piccola. Spiegare.
- (12) Una mole di gas perfetto subisce prima un'espansione adiabatica libera 1-2 fino al raddoppio del volume, poi una compressione isobara (reversibile) 2-3 che la riporta al volume iniziale. Calcolare la variazione di entropia prodotta dal processo complessivo nell'universo.

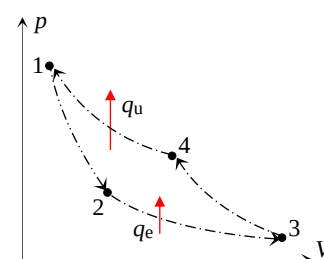
(13) Un gas **perfetto**, in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T , viene lasciato espandere **rapidamente** da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2 . Si trovi una relazione tra lavoro compiuto dal gas e la variazione di entropia dell'universo.

(14) Un imprecisato sistema termodinamico subisce il ciclo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ rappresentato in figura nel piano di Gibbs. Si determini il rendimento η^* del ciclo, e si determini il rapporto tra tale rendimento e quello di un ciclo di Carnot tra le stesse temperature estreme.

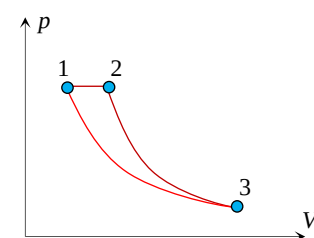


(15) Si vuole che, in un ciclo termodinamico, il sistema evolvente scambi calore con cinque sorgenti: precisamente, si vuole che il sistema riceva il calore $q_1 = 100$ cal a temperatura 20°C , il calore $q_2 = 150$ cal a 200°C , il calore $q_3 = 80$ cal a 400°C , e che ceda il calore $q_4 = 50$ cal a 10°C e il calore $q_5 = 150$ cal a 100°C . Si chiarisca se il ciclo è realizzabile.

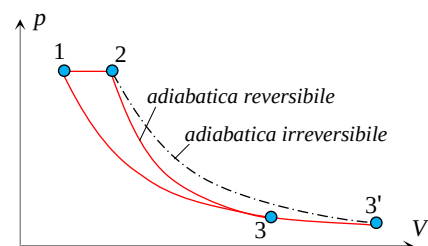
(16) Una macchina frigorifera lavora tra due sorgenti di calore. Si esprima in funzione dell'efficienza del ciclo l'aumento di entropia prodotto nell'universo dal funzionamento della macchina (in figura, le linee a tratteggio si riferiscono a un ipotetico ciclo reversibile, che lascerebbe invariata l'entropia dell'universo).



(17) Un gas perfetto biatomico subisce il ciclo reversibile 1-2-3 mostrato in figura: espansione isobara (con aumento della temperatura) dallo stato 1 fino al raddoppio del volume, espansione adiabatica con raffreddamento fino alla temperatura iniziale, compressione isoterma fino al volume iniziale. Si dimostri che se l'adiabatica 2-3 fosse irreversibile il rendimento L/q_e sarebbe inferiore (sarebbe cioè maggiore, a parità di calore q_e assorbito fra 1 e 2, il calore q_u ceduto nella compressione isoterma, e quindi sarebbe minore il lavoro $q_e - q_u$ compiuto nel ciclo).



(18) (a) Nel precedente problema si è visto che, se l'espansione adiabatica non fosse reversibile, il rendimento del ciclo risulterebbe inferiore. Tutto questo appare in contrasto con la considerazione che il calore assorbito resta invariato, mentre, essendo maggiore il volume raggiunto con una espansione adiabatica irreversibile (linea puramente indicativa tratteggiata in figura), anche l'area delimitata dal ciclo, che rappresenta il lavoro compiuto, risulta più grande. Il rapporto L/q_e , che rappresenta il rendimento, dovrebbe dunque in realtà aumentare, non diminuire... Che cosa, in questo ragionamento, non funziona?



(b) Si spieghi in che modo, nel caso di espansione adiabatica irreversibile, si potrebbe determinare la variazione di entropia subita in un ciclo dall'ambiente.

(19) Citazione: «Occorre però ricordare che i fenomeni di attrito, presenti in tutti i processi naturali o artificiali, costituiscono una causa di dispersione dell'energia e il risultato è una continua lenta diminuzione dell'energia dell'universo» (*testo di fisica per il liceo scientifico*). Dov'è l'errore?

SOLUZIONI

(1) Concetto di entropia: quando un sistema evolve da uno stato termodinamico di equilibrio 1 a uno stato termodinamico di equilibrio 2, l'entropia S del sistema subisce l'incremento

$$[A] \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{dq_R}{T} \quad \rightarrow \quad dq_R = T dS$$

dove dq_R è una quantità infinitesima di calore **fornito reversibilmente** al sistema considerato (se la quantità dq_R corrispondesse a calore sottratto al sistema, dovrebbe considerarsi negativa), e T è la temperatura Kelvin alla quale il calore dq_R viene scambiato (trattandosi di un processo reversibile, T è sia la temperatura del sistema che la temperatura del corpo con cui il sistema scambia calore).

L'integrale che figura nella [A] deve essere calcolato lungo un **qualsiasi percorso reversibile – perciò puramente immaginario – che porti il sistema dallo stato iniziale a quello finale**: anche, per esempio, un percorso che implichi scambi di calore con un numero infinito di sorgenti.

Il pedice R associato nella [A] alla grandezza dq è un utile pro memoria ma è di per sé superfluo: il fatto stesso di parlare di 'temperatura del sistema', significa che si fa riferimento a una successione di stati di equilibrio, e cioè a trasformazioni reversibili.

Chiaramente, la [A] non definisce l'entropia degli stati termodinamici 1 e 2, ma solo la relativa differenza. Se a uno stato di riferimento arbitrariamente scelto viene attribuito un determinato valore dell'entropia, per esempio il valore zero, l'entropia di ogni altro stato rimane definita attraverso una relazione del tipo della [A]. L'entropia è quindi definita da tale relazione a meno di una costante additiva arbitraria, che corrisponde al valore di entropia assegnato allo stato di riferimento.

(2) Falso. In uno **stesso** stato termodinamico l'entropia di un sistema può assumere **qualsiasi** valore, positivo, negativo o nullo, a seconda di quale stato del sistema viene scelto come stato di entropia zero: *solo le differenze* di entropia tra due stati sono univocamente definite. Lo stesso vale, notoriamente, per grandezze (*indici di stato*) come il livello di un oggetto, la temperatura, l'energia potenziale.

(3) Quando lo scambio di calore avviene reversibilmente (cioè per effetto di differenze di temperatura infinitamente piccole). In tal caso, *e solo in tal caso*, è, per definizione di entropia, $dS = dq_R/T$, cioè $dq_R = T dS$, da cui $q_R = \int_{S_1}^{S_2} T dS$.

(4) È chiaramente una trasformazione *quasistatica* (altrimenti la "temperatura del sistema" non esiste)

$$dq = T dS \rightarrow q = \int_{S_1}^{S_2} T dS, \text{ e in questo caso } (T = \text{cost}) \quad q = T (S_2 - S_1)$$

$$S_2 - S_1 = q/T = (10^4 \text{ cal}) / [(25 + 273) \text{ K}] = 33,6 \text{ cal/K} = (33,6 \times 4,19) \text{ J/K} = 141 \text{ J/K}.$$

(5) Trasformazione reversibile (rappresentabile graficamente = successione di punti = successione di stati di equilibrio). Essendo $q_R = \int_{S_1}^{S_2} T dS$, occorre valutare l'area sottesa dalla curva della trasformazione (trapezio): $q = [150 \text{ J/K} - (-100) \text{ J/K}] \times (400 \text{ K} + 280 \text{ K})/2 = 8,5 \times 10^4 \text{ J}$.

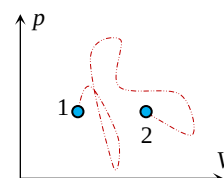
Il segno positivo indica che il calore in questione è scambiato dal sistema in entrata.

(6) Linea a tratteggio: indica che NON conosciamo la trasformazione effettiva, potrebbe anche essere una irreversibile (= non rappresentabile).

Qualunque sia stata la trasformazione tra lo stato 1 e lo stato 2, per il calcolo della variazione di entropia possiamo scegliere una *qualsiasi* trasformazione *reversibile* tra lo stato iniziale e lo stato finale: se, come suggerito dalla domanda, scegliamo una trasformazione isobara, durante la trasformazione è $dS = (dq)/T = (nC_p dT)/T$.

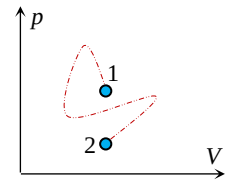
$$\text{Integrando tra lo stato iniziale e lo stato finale} \rightarrow S_2 - S_1 = nC_p \ln(T_2/T_1) = nC_p \ln(V_2/V_1)$$

[Per ipotesi $p_2 = p_1$, dunque per la $pV = nRT$ è $T_2/T_1 = V_2/V_1$]



(7) Qualunque sia stata la trasformazione tra lo stato 1 e lo stato 2, per il calcolo della variazione di entropia possiamo scegliere una *qualsiasi* trasformazione reversibile tra lo stato iniziale e lo stato finale: se scegliamo una trasformazione isocora, durante la trasformazione è $dS = (dq)/T = (nC_V dT)/T$. Integrando tra lo stato iniziale e lo stato finale si ottiene

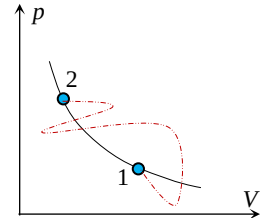
$S_2 - S_1 = nC_V \ln(T_2/T_1) = nC_V \ln(p_2/p_1)$ (dalla $pV = nRT$, essendo per ipotesi $V_2 = V_1$). Nel caso della figura è $p_2/p_1 < 1$, dunque il $\ln$ è < 0 ed è < 0 l'incremento $S_2 - S_1$ (entropia finale minore dell'entropia iniziale)



(8) Per il calcolo della variazione di entropia possiamo scegliere una *qualsiasi* trasformazione reversibile tra lo stato iniziale e lo stato finale: se, come suggerito dalla domanda, scegliamo una trasformazione isoterma, durante la trasformazione è $dS = (dq)/T$ con T costante, per cui integrando tra lo stato iniziale e lo stato finale si ottiene $S_2 - S_1 = q/T$, dove q è il calore complessivamente fornito al sistema durante l'isoterma. Dato che, non variando la temperatura, nemmeno l'energia interna del gas (perfetto) subisce variazioni, q è uguale al lavoro compiuto dal gas: $q = L = nRT \ln(V_2/V_1)$.

Pertanto, $S_2 - S_1 [=q/T] = nR \ln(V_2/V_1) = nR \ln(p_1/p_2)$.

Essendo qui $p_1/p_2 < 1$, sarà $S_2 - S_1 < 0$.



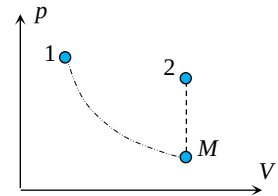
(9) Per il calcolo di ΔS (funzione di stato) possiamo scegliere un percorso qualsiasi. Scegliamo una isoterma (sempre reversibile) da 1 a M più una isovolumica reversibile da M a 2: allora

$$S_2 - S_1 = nR \ln(V_2/V_1) + nC_V \ln(T_2/T_1).$$

Di qui, raccogliendo C_V a fattor comune e tenuto conto che è $C_p - C_V = R$ (costante dei gas) e $C_p/C_V = \gamma$ (coefficiente adiabatico), si ottiene

$$S_2 - S_1 = nC_V \ln[(T_2 V_2^{\gamma-1}) / (T_1 V_1^{\gamma-1})] \text{ oppure anche, essendo } pV = nRT,$$

$$S_2 - S_1 = nC_V \ln[(p_2 V_2^{\gamma}) / (p_1 V_1^{\gamma})] = nC_V \ln[(p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma}) / (p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma})].$$



(10) Falso in linea generale: l'entropia è una funzione di stato, le variazioni di entropia dipendono SOLO dallo stato iniziale e dallo stato finale, **non dalle particolari modalità** della trasformazione.

Sarebbe però **vero nel caso particolare di un sistema che non scambia calore** (per es. un sistema termicamente isolato), per il quale trasformazioni **REV** non darebbero luogo a variazioni di entropia, per la definizione stessa di entropia (integrale, lungo una trasformazione reversibile, tra stato iniziale e stato finale del rapporto $(dq)/T$), e quelle **IRR** darebbero luogo ad aumenti di entropia (**principio di aumento dell'entropia**). Per cui:

1. Se l'entropia finale di un sistema è **minore di quella iniziale**, si sono certamente verificati scambi di calore, in entrata o in uscita, con altri sistemi.

2. Mentre, in generale, un sistema fisico può passare da uno stato A a uno stato B sia in modo REV che in modo IRR, **questo non è possibile per un sistema che non scambia calore** (trasformazioni adiabatiche): per una qualsiasi trasformazione adiabatica REV l'entropia resta uguale, per una qualsiasi trasformazione adiabatica IRR l'entropia aumenta $\rightarrow$ Se un sistema non scambia calore, per una qualsiasi trasformazione che parta da uno stato A, nello stato finale l'entropia è, nel caso IRR, sicuramente maggiore che nel caso REV ($\rightarrow$ **gli stati finali non possono coincidere**).

(11) (a) Le curve (come la *a* di fig.1) che rappresentano trasformazioni adiabatiche (ovviamente reversibili, $pV^\gamma = \text{cost.}$, per il fatto stesso di poter essere rappresentate in un diagramma) **sono anche isoentropiche** perché l'incremento di entropia $S_2 - S_1$ è per definizione uguale all'integrale tra lo stato 1 e lo stato 2 della grandezza, qui per ipotesi nulla, $(dq)/T$ (dove il fatto stesso di indicare il valore della temperatura sta ad indicare che si fa riferimento a una successione di stati di equilibrio, e cioè a trasformazioni REV).

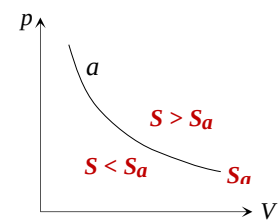


Fig.1

(b) Dalla definizione di entropia deriva che per una **generica** trasformazione di un **gas perfetto** è $S_2 - S_1 = nC_V \ln(p_2 V_2^\gamma / p_1 V_1^\gamma)$ dove $\gamma = C_p / C_V$ sempre > 1 . In una adiabatica REV è, per il fatto che $dS = (dq)/T$ e per il fatto che è $dq = 0$, $S_2 - S_1 = 0$, e cioè $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma = \text{cost.}$ **Dire $S_2 - S_1 > 0$ significa dire $p_2 V_2^\gamma > p_1 V_1^\gamma$** , per esempio volume finale maggiore a pari pressione (fig.2, punto A rispetto a punto B) oppure pressione finale maggiore a pari volume (fig.2, punto A rispetto a punto C).
 → A maggior ragione sarà $S_2 - S_1 > 0$ se aumentano sia la pressione che il volume.

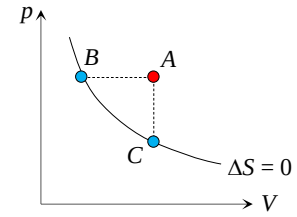


Fig.2

Pertanto, può accadere che, con un aumento della pressione, risulti $\Delta S > 0$ ($p_2 V_2^\gamma > p_1 V_1^\gamma$) anche se il volume è diminuito (trasformazione 1→2 in fig.3).

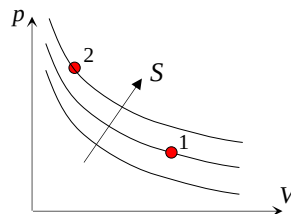


Fig.3 - Adiabatiche reversibili

Nel caso invece della trasformazione 1-2 della fig.4 la diminuzione del volume non è compensata, ai fini dell'aumento di S, dall'aumento della pressione: $S_2 < S_1$.

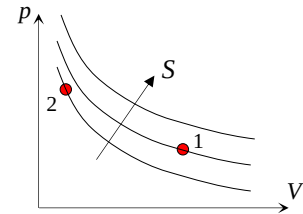
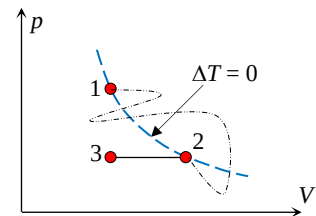


Fig.4 - Adiabatiche reversibili

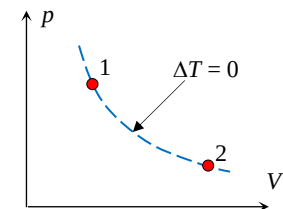
(12) La trasformazione 1-2 (espansione libera) lascia invariata la temperatura del gas (in quanto perfetto, e quindi privo di interazioni attrattive tra molecole) producendo (come se fosse un'isoterma) l'aumento $S_2 - S_1 = nR \ln[(V_2/V_1)] = nR \ln 2 = 5,76 \text{ J/K}$ nella sua entropia, mentre l'entropia dell'ambiente non subisce variazioni. La trasformazione 2-3, in quanto reversibile, lascia invariata l'entropia dell'universo. Complessivamente, l'entropia dell'universo è pertanto aumentata di $5,76 \text{ J/K}$.



ISOTERMA: $\Delta U = 0 \rightarrow q = L = nRT \ln(V_2/V_1)$

$$\rightarrow S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dq = \frac{q}{T} = \frac{L}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

(13) Dato che, negli stati di equilibrio iniziale e finale, il gas si trova alla stessa temperatura (la temperatura della sorgente), e dato che si tratta di gas perfetto, l'energia interna finale (solo cinetica) è uguale a quella iniziale: pertanto, per il primo principio ($q = L + \Delta U$), il calore q fornito dalla sorgente e il lavoro L compiuto dal gas sono uguali. La diminuzione dell'entropia q/T della sorgente è allora anche uguale a L/T (dove q e L restano indeterminati).



L'aumento di entropia del gas può essere calcolato con riferimento a una espansione isoterma reversibile da V_1 a V_2 , quindi è $\Delta S_{\text{gas}} = R \ln(V_2/V_1)$ (vedi precedente quesito 12).

Nell'insieme, $\Delta S_{\text{univ}} = -L/T + nR \ln(V_2/V_1)$, vale a dire $L = nRT \ln(V_2/V_1) - T \Delta S_{\text{univ}}$.

→ Il **massimo lavoro ottenibile** (col massimo valore del calore assorbito dal gas) corrisponde a un'espansione reversibile ($\Delta S_{\text{univ}} = 0$) → $L_{\text{max}} = nRT \ln(V_2/V_1) = q_{\text{max}}$.

→ Nel caso di **espansione libera**, sarebbe $L = 0$ e dunque si verificherebbe il massimo possibile valore di aumento ΔS_{univ} dell'entropia complessiva.

(14) $dS = dq_R/T \rightarrow q_R = \int_{S_1}^{S_2} T dS \rightarrow$ L'area racchiusa dal ciclo rappresenta il calore complessivamente scambiato nel ciclo, e quindi anche (primo principio, con $\Delta U = 0$) il lavoro L compiuto nel ciclo.

(a) Ciclo a triangolo - Il calore q_e scambiato in entrata corrisponde ($dq_R = T dS$) all'area sottesa dal segmento AB. Sarà pertanto

$$\eta^* = L/q_e = (1/2)(S_2 - S_1)(T_2 - T_1) / [(1/2)(T_2 + T_1)(S_2 - S_1)] = (T_2 - T_1) / (T_2 + T_1).$$

(b) Il rendimento del ciclo di Carnot è invece

$$\eta_C = 1 - q_u/q_e = 1 - [T_1(S_2 - S_1) / [T_2(S_2 - S_1)] = (T_2 - T_1)/T_2.$$

Il rapporto tra i due rendimenti è quindi $\eta^*/\eta_C = T_2/(T_2 + T_1)$.

Es. per $T_1 = 300 \text{ K}$ e $T_2 = 400 \text{ K}$, $\eta_G = 100/700 = 0,14$, $\eta_C = 100/400 = 0,25$, $\eta_G/\eta_C = 400/700 = 0,57$.

(15) In corrispondenza ad un ciclo l'entropia del sistema evolvente ritorna al valore iniziale, perciò, per il principio di aumento dell'entropia (riferito qui all'universo), l'entropia delle sorgenti o resta invariata (ciclo reversibile), o deve aumentare. Nel caso del ciclo in questione l'entropia delle sorgenti subirebbe l'incremento $\Delta S = -(q_1/T_1) - (q_2/T_2) - (q_3/T_3) + q_4/T_4 + q_5/T_5 =$
 $= -(100 \text{ cal})/(293 \text{ K}) - (150 \text{ cal})/(473 \text{ K}) - (80 \text{ cal})/(673 \text{ K}) + (50 \text{ cal})/(283 \text{ K}) + (150 \text{ cal})/(373 \text{ K}) =$
 $= -0,198 \text{ cal/K} < 0.$

→ L'entropia dell'universo diminuirebbe, pertanto il ciclo non è realizzabile.

(16) L'aumento di entropia dell'universo coincide qui (trasformazione ciclica) con l'aumento di entropia complessivo delle sorgenti:

[a] $\Delta S_{\text{univ}} = (q_u/T_u) - (q_e/T_e)$. Essendo l'efficienza $\epsilon = q_e/L$ (rapporto fra calore q_e assorbito dal sistema a bassa temperatura e lavoro motore L compiuto sul sistema nel ciclo = energia fornita al sistema = energia assorbita dalla macchina), ed essendo quindi

$q_u (= q_e + L) = q_e + q_e/\epsilon = q_e(1 + 1/\epsilon)$, risulta dalla [a]

[b] $\Delta S_{\text{univ}} = q_e [(1 + 1/\epsilon)]/T_u - q_e/T_e.$

Dunque, più piccola è l'efficienza ϵ (più grande è l'energia L consumata in un ciclo a parità di calore q_e assorbito) più grande, a parità di temperatura delle sorgenti e di calore estratto, è l'aumento di entropia prodotto.

In caso di ciclo reversibile (macchina frigorifera di Carnot), $\Delta S_{\text{univ}} = 0$ (la minima possibile) e dalla [a] → $q_e/q_u = T_e/T_u$. L'efficienza è qui la massima possibile per cicli frigoriferi che operano fra due temperature assegnate:

$\epsilon_c [= q_e/L = q_e/(q_u - q_e)] = T_e/(T_u - T_e).$

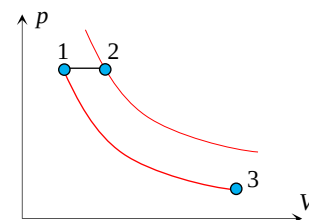
Se l'efficienza diminuisce, aumenta, a parità di calore q_e assorbito (lo scopo del ciclo), il lavoro $L = q_e/\epsilon$ compiuto sul (l'energia assorbita dal) sistema termodinamico evolvente, e diventano di conseguenza più grandi sia il calore $q_u = q_e + L$ scambiato dal sistema in uscita ad alta temperatura che l'aumento di entropia dell'universo (vedi [a] e [b]).

Nota 1. Il valore dell'efficienza può anche essere maggiore di 1 (nei frigoriferi reali vale 5 o 6). Nel caso di ciclo reversibile di un gas perfetto, l'area sottesa dalla curva 2-3 potrebbe essere 5 o 6 volte più grande dell'area del ciclo.

Nota 2. L'efficienza dei cicli reversibili costituiti da due isoterme e due politropiche ($pV^\alpha = \text{cost}$) dello stesso indice ($\alpha = [(C - C_p)/(C - C_v)]$) **coincide** con quella di un ciclo frigorifero di Carnot fra le due isoterme. In particolare, questo vale quando le politropiche sono isobare ($\alpha = 0$) oppure isocore ($\alpha = \infty$). Promemoria: un discorso analogo valeva per il rendimento dei cicli motore.

(17) Se l'espansione adiabatica **non** fosse reversibile, il volume raggiunto con l'espansione fino alla temperatura iniziale sarebbe maggiore: l'espansione produrrebbe infatti (principio di aumento dell'entropia dei sistemi termicamente isolati) un aumento dell'entropia del gas (rimasta invariata in caso di adiabatica reversibile); ed essendo per la trasformazione 2→3 $\Delta S = nC_v \ln(T_3 V_3^{\gamma-1}/T_2 V_2^{\gamma-1})$, il fatto che per l'adiabatica irreversibile sia $\Delta S > 0$ significa che rispetto al caso di adiabatica reversibile ($\Delta S = 0$) è aumentato, a pari temperatura finale, il volume finale V_3 . Sarebbe dunque più grande anche il calore $q_u (= L_{3 \rightarrow 1}) = nRT_1 \ln(V_3/V_1) = p_1 V_1 \ln(V_3/V_1)$ scambiato in uscita durante la compressione isoterma che chiude il ciclo, e dato che il calore scambiato in entrata (espansione isobara 1-2) rimarrebbe lo stesso, risulterebbe inferiore il rendimento $L/q_e = (q_e - q_u)/q_e = 1 - q_u/q_e$.

→ Si pensi al caso limite di un'espansione adiabatica nel vuoto (**irreversibile, non rappresentabile**): il calore q_e assorbito nel ciclo resterebbe uguale, mentre andrebbe completamente perduto il lavoro nel caso precedente compiuto dal gas durante l'espansione reversibile. *Il lavoro totale potrebbe anche risultare nullo o negativo.*



(18) (a) *Non è vero* che, in caso di irreversibilità dell'espansione adiabatica l'area del ciclo risulta più grande: in tal caso l'area del ciclo semplicemente *non esiste*, perché non esiste, nel diagramma, una linea che rappresenti una trasformazione irreversibile come è, in questo caso, l'espansione adiabatica: come precisato nella domanda, la linea a tratti della fig. 11 ha un valore puramente indicativo.

(b) Durante l'espansione adiabatica 2-3', l'ambiente (che schematizziamo come un insieme di sorgenti di calore) è termicamente isolato dal gas che si espande, perciò la sua entropia non subisce variazioni (quella del gas aumenta, principio di aumento dell'entropia). Promemoria: per una sorgente a temperatura T che riceve il calore q , l'aumento dell'entropia è q/T .

Le altre due trasformazioni del gas (la 1-2 e la 3'-1) sono reversibili, perciò non comportano variazioni nell'entropia dell'universo: ciò significa che durante tali trasformazioni la variazione complessiva di entropia dell'ambiente è uguale e contraria a quella subita dal gas. E precisamente: durante l'espansione isobara 1-2 l'entropia del gas aumenta di $nC_p \ln(T_2/T_1) = nC_p \ln(V_2/V_1)$, durante la compressione isoterma 3'-1 l'entropia del gas subisce l'incremento negativo $nR \ln(V_1/V_{3'})$ [V_1 è il volume finale, $V_{3'}$ è il volume iniziale]. Tale incremento negativo è in modulo più grande dell'incremento positivo da 1 a 2, dovendo essere uguale all'incremento positivo complessivo da 1 a 3' (l'incremento complessivo nel ciclo è infatti zero).

L'entropia dell'ambiente, invariata durante l'adiabatica, subisce nel ciclo un incremento pari al modulo dell'incremento negativo complessivamente subito dal gas nelle reversibili 1-2 e 3'-1.

(19) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.70 ("L'energia preferisce il disordine")]

Visto? È una persecuzione: ogni occasione è buona (cfr. capitoli 49 e 50) per sparare dei «fenomeni di attrito». I quali, tanto per cominciare, non sono affatto «presenti in tutti i processi naturali o artificiali». Dov'è l'attrito nel movimento dei pianeti attorno al Sole, o nella caduta di un meteorite sulla Luna? Dov'è l'attrito in una reazione chimica? Dov'è l'attrito nell'emissione, nella propagazione, nell'assorbimento di un'onda elettromagnetica? Dov'è l'attrito in un processo di fissione o fusione nucleare? Dov'è l'attrito in una qualsiasi interazione a livello di singole particelle?

Ma, quand'anche l'attrito fosse davvero onnipresente, perché mai questo fatto dovrebbe produrre una «continua, lenta diminuzione dell'energia dell'universo»? L'energia cinetica perduta per attrito da un mattone che scivola sul pavimento non la ritroviamo forse a livello del moto di agitazione termica delle molecole?

Forse era meglio dire – è la sostanza del secondo principio della termodinamica – che l'energia tende a spostarsi da stati più ordinati (e meno probabili) a stati meno ordinati (e più probabili), cosicché utilizzarla diventa per noi sempre più difficile. Quello che subisce una «lenta diminuzione» è il grado di ordine, o di utilizzabilità, o se vogliamo di informazione¹. L'energia non diminuisce, né per l'attrito, né per nessuna altra ragione: *si conserva*. Come del resto, solo poche righe più avanti, l'Autore stesso perentoriamente dichiara.

¹ Corrispondentemente aumenta il valore dell'entropia.

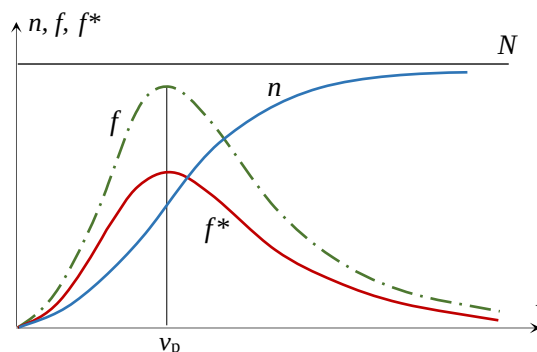
ESERCITAZIONE N.13

TEORIA CINETICA MOLECOLARE

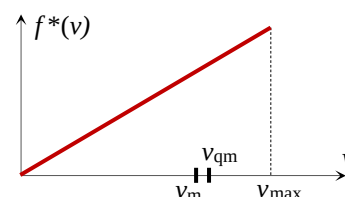
- (1) Il valore quadratico medio è diverso da zero anche per un insieme di valori numerici a valore medio zero (*vero/falso*).
- (2) In una serie di valori numerici tutti positivi, il quadrato della media è sempre inferiore alla media dei quadrati (ovvero, il valore medio è sempre inferiore al valore quadratico medio) (*vero/falso*).
- (3) Secondo la teoria cinetica molecolare, una molecola di NH_3 e una molecola di O_2 hanno in media, a parità di temperatura, la stessa energia cinetica (*vero/falso*).
- (4) La velocità quadratica media delle molecole di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura.
- (5) Sulla base della teoria cinetica dei gas, si determini il calore specifico del vapore d'acqua a volume costante e a pressione costante.
 Promemoria calori molari: $C_V =$ tante volte $R/2$ quanti i gradi di libertà della molecola;
 $C_p = C_V + R$ con $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 1,99 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 0,082 \text{ litri} \cdot \text{atm}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

(6) DISTRIBUZIONE DI MAXWELL DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI

In condizioni di **equilibrio** termodinamico (variabili termodinamiche 'locali', tipicamente temperatura e pressione, uguali in ogni punto), i valori di velocità sono distribuiti tra le **molecole** di un gas **perfetto** nel modo descritto dal diagramma a lato.



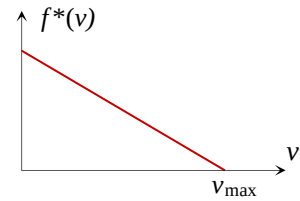
- (a) Qual è, in figura, il significato dei simboli n e N ?
- (b) Qual è il significato della curva f ?
- (c) Quale significato ha l'area sottesa fra tale curva e l'asse delle velocità tra v_1 e v_2 ?
- (d) Qual è il significato della curva f^* ?
- (e) Quale significato ha l'area sottesa tra tale curva e l'asse delle velocità tra v_1 e v_2 ?
- (7) Supponiamo che, relativamente a un insieme di N palline, sia nota la velocità che ogni pallina possiede a un dato istante. Come si calcolerebbero la velocità media e le velocità quadratiche medie?
- (8) Come si potrebbe ottenere, una volta nota l'espressione matematica della funzione di distribuzione $f^*(v) = (dn/dv)/N$, il valore medio della velocità e del quadrato della velocità?
- (9) (a) Supponiamo che le velocità di un insieme di molte molecole biatomiche identiche, di massa m , siano uniformemente distribuite tra 0 e $v_{\max}$, siano cioè **tutte ugualmente probabili**: il numero n di molecole con velocità fra 0 e v è dunque proporzionale a v . Quali sarebbero in tal caso il valore medio della velocità e quello dell'energia cinetica di traslazione?
- (b) Qual è, in questo specifico caso, il valore v' della velocità per il quale un valore compreso tra 0 e v' è, per la velocità, altrettanto probabile di un valore compreso tra v' e $v_{\max}$?
- (10) (a) Si determini il rapporto tra velocità quadratiche medie e velocità media nel caso di DISTRIBUZIONE 'A TRIANGOLO' **come in figura** (densità di probabilità $f^*(v)$ proporzionale a v). La probabilità f^*dv di una velocità fra v e $v+dv$ è qui proporzionale a v . La velocità più probabile è la $v_{\max}$.
- (b) Che andamento presenta, nel caso qui considerato, la curva $n = n(v)$?



(c) Si determini il valore v' della velocità per il quale una velocità compresa fra 0 e v' è altrettanto probabile di una velocità compresa fra v' e $v_{\max}$ (nota: nel caso della domanda 9, in cui $f^*(v) = \text{costante}$, la risposta era stata $v' = 0,5 v_{\max}$.)

(d) Si determini il valore v'' per il quale una velocità inferiore a v'' ha probabilità $1/3$ di quella di una velocità superiore.

(11) Determinare valore medio e valore quadratico medio della velocità nel caso della distribuzione lineare rappresentata in figura.



(12) FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI MAXWELL

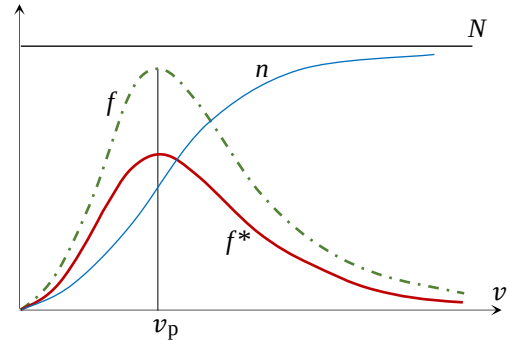
Richiamo: per un gas **perfetto**, l'espressione matematica (determinata da Maxwell) della funzione di distribuzione $f^*(v) = (dn/dv)/N$, è

$$f^*(v) = A v^2 e^{-B v^2}$$

con A e B funzioni crescenti di m e decrescenti di T :

$$B = \frac{m}{2kT} \quad \text{e} \quad A = \frac{4B^{3/2}}{\sqrt{\pi}}.$$

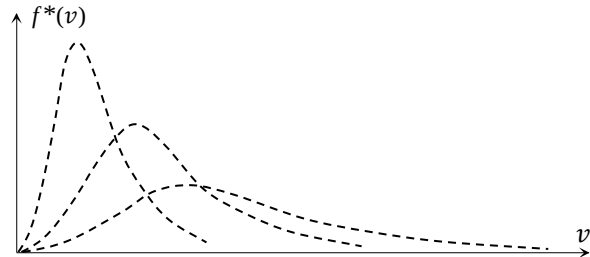
→ Si spieghi in che modo velocità media, velocità quadratica media e velocità più probabile dipendono, in tale distribuzione, dalla temperatura.



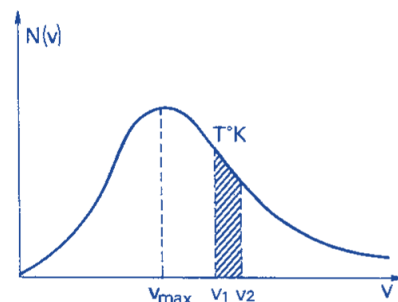
(13) Il grafico qui a lato rappresenta tre distribuzioni di Maxwell delle velocità molecolari di un gas perfetto.

(a) È possibile che le tre curve si riferiscano tutte a un unico tipo di gas a diversa temperatura?

(b) È possibile che si riferiscano a tre gas diversi alla stessa temperatura?



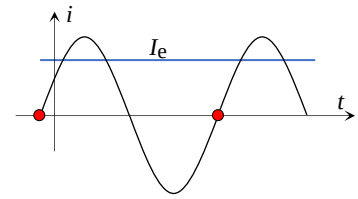
(14) «Distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari per una data temperatura. Sull'asse delle ascisse è riportata la velocità e su quello delle ordinate il numero di molecole che posseggono una specifica velocità» (testo di fisica per il liceo scientifico). Qual è l'errore?



La figura del testo

SOLUZIONI

(1) Vero. Il fatto che il valore medio sia zero implica che alcuni numeri siano negativi. Si pensi ad esempio ai valori di una corrente alternata (e cioè sinusoidale) durante un periodo: il valore medio è zero, la media dei quadrati è la metà del quadrato del valore max (vedi più sotto), il valore quadratico medio (o ‘**valore efficace**’), che elevato al quadrato dà la media dei quadrati, è il 71% del valore massimo $I_{\max}$. Idem per la tensione: i 220 V della tensione di alimentazione degli apparecchi domestici (televisore, phon, ferro da stiro, forno a microonde) sono il valore efficace di una tensione sinusoidale di valore massimo 311 V).



$$[A] \quad I_e^2 = (i^2)_{\text{med}} = \frac{\int_t^{t+T} i^2 dt}{T} = \frac{\int_t^{t+T} I_{\max}^2 \sin^2 \omega t dt}{T} = (I_{\max})^2 / 2 \rightarrow I_e = I_{\max} / \sqrt{2} = 0,707 I_{\max}$$

Promemoria: $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$.

(2) VERO (salvo ovviamente il caso limite di valori tutti uguali). Nel caso, ad esempio, dei numeri interi da 1 a 5 il valore medio è $(1+2+3+4+5) / 5 = 3$, dunque il quadrato della media è 9. Il valore medio dei quadrati è invece $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) / 5 = 55/5 = 11 \rightarrow v_{\text{qm}} = \sqrt{11} = 3,31$.

→ Es. Nella distribuzione di Maxwell (distribuzione delle velocità molecolari in un gas perfetto in equilibrio) la v_{qm} è dell'8% superiore alla v_m (vedere domanda 12).

(3) Falso, hanno in media la stessa energia cinetica **per ogni grado di libertà** ($kT/2$, con T temperatura kelvin e $k = R/N_0 = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, costante di Boltzmann; dove $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ costante dei gas, $pV = nRT$; N_0 numero di Avogadro = $6,02 \text{ mol}^{-1}$, numero di individui in una “mole” di materia, quantità la cui massa in grammi è espressa dal rapporto fra massa di un individuo e massa atomo idrogeno (più esattamente, non massa di un atomo di H, un protone + un elettrone, bensì 1/12 della massa dell'atomo di carbonio 12, sei protoni, sei neutroni, sei elettroni).

→ Hanno la **stessa energia cinetica di traslazione** (tre gradi di libertà) che compete, a pari T , a qualsiasi altra molecola, ma l'energia cinetica complessiva della molecola di NH_3 (tre gradi di libertà anche nella rotazione) è più grande nel rapporto 6/5 (solo due gradi di libertà nella rotazione per la molecola di O_2).

(4) Falso. Per un gas perfetto (in pratica, per un qualsiasi gas reale, purché sufficientemente rarefatto) la velocità quadratica media delle molecole è legata alla temperatura Kelvin dalla relazione

$v_{\text{qm}} = \sqrt{3kT/m}$ ^[1], dove $k = R/N_0$ (R costante dei gas, $8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ e N_0 numero di Avogadro, $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, numero di molecole a mole) è la costante di Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$): la velocità quadratica media dipende quindi anche dalla massa m delle molecole (è inversamente proporzionale a $\sqrt{m}$: a pari temperatura, velocità dimezzata se massa quadruplicata).

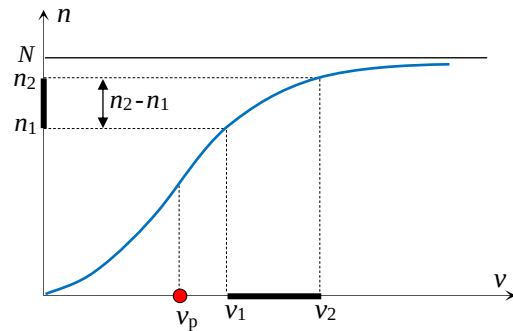
→ È l'**energia cinetica media di traslazione** delle molecole (**$3kT/2$** per qualsiasi gas perfetto) che dipende **esclusivamente** dalla temperatura (oppure, il valore medio dell'**energia cinetica ‘a grado di libertà’, $kT/2$**). Es. nell'aria, l'energia cinetica di traslazione media è uguale per tutte le molecole, la velocità quadratica media diminuisce passando dalle molecole meno pesanti alle più pesanti: dalle molecole di H_2O (peso molecolare 18), a quelle di azoto (p.m. 28), di ossigeno (p.m. 32), di anidride carbonica (p.m. 44).

(5) Essendo la molecola d'acqua (H_2O) triatomica (sei gradi di libertà), il calore **molare** a volume costante è **$6R/2 = 3 \times 1,99 \text{ cal/(mol} \cdot \text{K)} = 5,97 \text{ cal/(mol} \cdot \text{K)}$** , e a pressione costante **$8R/2 = 4 \times 1,99 \text{ cal/(mol} \cdot \text{K)} = 7,96 \text{ cal/(mol} \cdot \text{K)}$** a pressione costante. Dividendo per il numero di grammi (18) contenuti in una mole d'acqua, si ottiene $c = 0,332 \text{ cal/(g} \cdot \text{K)}$ a volume costante, e $c = 0,442 \text{ cal/(g} \cdot \text{K)}$ a pressione costante. Tali valori teorici risultano di circa il 10 % inferiori ai valori sperimentali.

¹ L'energia di traslazione media è $EC_{\text{tr}/m} = (1/2) m(v^2)_m = (1/2) m(v_{\text{qm}})^2 = 3kT/2 \rightarrow (v_{\text{qm}})^2 = 3kT/m$.

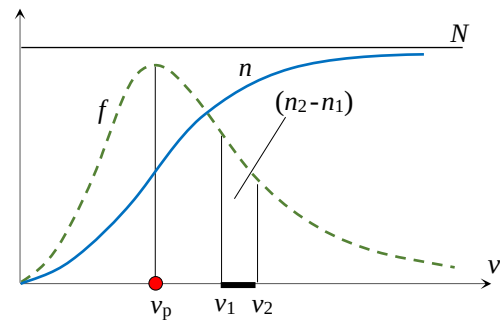
(6)(a) N è il numero totale di molecole, n è il numero di molecole che hanno velocità compresa tra 0 e v (ascisse).

→ Il numero di molecole aventi velocità compresa tra v_1 e v_2 è $n_2 - n_1$ (grafico a lato).



(b) La curva $f = dn/dv$ rappresenta la **densità di presenza**: mostra, in funzione della velocità v , il valore della pendenza della curva $n = n(v)$, dunque la rapidità di crescita della funzione n (massima in corrispondenza di v_p , velocità di massima probabilità); dv è un incremento molto piccolo subito da v (ascisse), $dn [= f(v) dv]$ è il numero di molecole aventi velocità compresa fra v e $v + dv$.

La densità di presenza f non è un puro numero, ha le dimensioni del reciproco di una velocità.

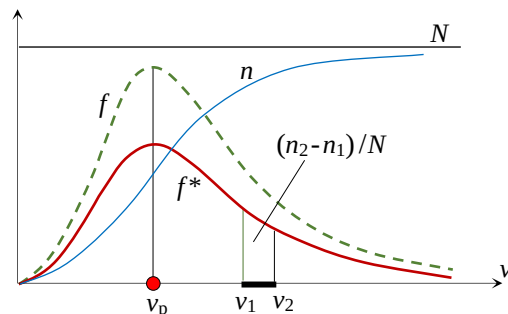


(c) L'area sottesa da tale curva tra due valori v_1 e v_2 di v (integrale in dv tra v_1 e v_2 della derivata dn/dv) corrisponde al numero $n_2 - n_1$ (vedi figura in alto, asse delle ordinate), e cioè al numero di molecole aventi velocità compresa entro tale intervallo.

→ L'**area complessivamente sottesa** dalla curva f corrisponde al numero totale N delle molecole.

(d) La curva f^* rappresenta la **densità di probabilità** (o 'di frequenza'): mostra, in funzione della velocità v , il valore della **funzione di distribuzione** $f^* = f/N = (dn/dv)/N$ (dimensioni del reciproco di una velocità).

(e) L'area sottesa da tale curva tra due valori v_1 e v_2 di v corrisponde alla **frequenza relativa** $(n_2 - n_1) / N$, dice cioè quante sono, in rapporto al numero complessivo N , le molecole aventi velocità compresa tra v_1 e v_2 . Ovvero, **quale frazione del totale** ($1/7 \dots 3/5 \dots 4/7 \dots$ ecc.) rappresentano le molecole aventi velocità entro tale intervallo, o ancora **quante probabilità** ha una molecola di avere a un dato istante una velocità compresa entro tale intervallo.



In particolare, **la probabilità che la velocità di una molecola sia compresa tra un dato valore v_0 e il valore $v_0 + dv$ è $f^*(v_0) dv$** (incremento dell'area sottesa dalla curva f^* quando v aumenta di dv).

→ L'**area complessivamente sottesa dalla funzione di distribuzione ha valore 1** (probabilità che una molecola abbia velocità compresa tra zero e infinito).

(7) La velocità media è la somma della velocità di tutte le palline diviso il numero di palline:

$$[A] \quad v_m = \frac{\sum_i v_i n_i}{N} = \sum_i v_i \frac{n_i}{N} \quad \text{dove } n_i \text{ è il numero di palline aventi la particolare velocità } v_i$$

(numero di "occorrenze" di v_i). Il numero n_i / N è la **frequenza relativa f** delle palline aventi velocità v_i , cioè il rapporto tra il numero di palline aventi velocità v_i e il numero totale delle palline: ovvero, n_i / N è la **probabilità** che una pallina scelta a caso abbia la particolare velocità v_i (se sappiamo che 18 palline su 540 hanno, a un dato istante, velocità 5, la probabilità che una pallina scelta a caso abbia in quell'istante velocità 5 è $18/540 = 1/30$). **La media v_m delle velocità** (relazione [A]) **è pertanto la somma di tutte le velocità, ognuna moltiplicata per la corrispondente frequenza relativa**.

La media dei quadrati (e cioè il quadrato della velocità quadratica media) sarebbe data da un'analogha espressione, salvo che nella sommatoria comparirebbero non, come nella [A], i valori della velocità, bensì

i valori dei quadrati delle velocità:

$$[B] \quad (v^2)_m = (v_{qm})^2 = \sum_i (v_i^2 n_i) / N = \sum_i v_i^2 (n_i / N).$$

→ **Media di v e media di v^2 sono note se si conosce la “distribuzione” delle velocità, e cioè il numero n_i di molecole che hanno velocità v_i , e dunque la probabilità n_i / N che una molecola scelta a caso abbia la particolare velocità v_i .**

(8) In modo analogo a quanto visto al punto precedente, la media delle velocità in un insieme di infinite velocità (tutte possibili, ma solo N possibili contemporaneamente) distribuite in modo continuo (e cioè con incrementi di valore infinitesimi) tra 0 e ∞ corrisponde alla somma (l'integrale) di tutte le infinite possibili velocità, ognuna moltiplicata per la **probabilità** $(dn)/N = f^*(v) dv$ che la **velocità di una molecola abbia un valore compreso tra v e $v + dv$**

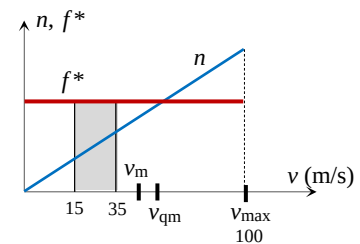
$$v_m = \int_0^\infty v f^*(v) dv.$$

E analogamente, la media dei quadrati delle velocità (= il quadrato della velocità quadratica media) sarà l'integrale di tutti i possibili valori del quadrato delle velocità v , ognuna moltiplicata per la probabilità che la velocità di una pallina sia compresa nell'intervallo fra v e $v + dv$:

$$(v^2)_m = v_{qm}^2 = \int_0^\infty v^2 f^*(v) dv.$$

Media di v e media di v^2 sono note se ci conosce la funzione di distribuzione f^* , e dunque la probabilità $f^* dv = (dn)/N$ che la velocità di una molecola sia compresa tra il generico valore v e il valore $v + dv$.

(9) (a) Dato che, per ipotesi, le molecole sono molte, possiamo schematizzare la situazione dicendo che la velocità delle molecole varia in modo continuo tra 0 e $v_{\max}$: il grafico che rappresenta, in funzione di v , il numero n di molecole aventi velocità comprese tra zero e v ha dunque l'andamento lineare mostrato. Dato che, per ipotesi, le molecole sono molte, possiamo schematizzare la situazione dicendo che la velocità delle molecole varia in modo continuo tra 0 e $v_{\max}$: il grafico che rappresenta, in funzione di v , il numero n di molecole aventi velocità comprese tra zero e v ha dunque l'andamento lineare mostrato della figura (dn/dv uguale per qualsiasi valore di v). La densità di probabilità $f^*(v) = (dn/dv)/N$ è una **costante** (linea rossa): il suo valore è lo stesso per tutte le velocità. Dato che **l'area totale sotto il grafico della densità di probabilità ha in ogni caso valore 1, e in questo specifico caso valore $f^* \cdot v_{\max}$** , deve essere $f^* = 1/v_{\max}$.



Esempio numerico: se è $v_{\max} = 100$ m/s, la probabilità che la velocità sia compresa tra 15 e 35 m/s (area sottesa dalla curva della densità di probabilità f^* fra i due valori di v) è $f^* \Delta v = (1/v_{\max}) \Delta v = (1/100) (35 - 15) = 1/5$ (prevedibile a priori).

Il **valore medio di v** è

$$v_m = \int_0^{v_{\max}} v f^*(v) dv = \int_0^{v_{\max}} \frac{v}{v_{\max}} dv = \frac{1}{v_{\max}} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{v_{\max}} = v_{\max} / 2 = \mathbf{0,5 v_{\max}} \quad (50 \text{ m/s, prevedi-})$$

bile) e il **valore medio di v^2** è $(v^2)_m = \int_0^{v_{\max}} v^2 f^*(v) dv = \int_0^{v_{\max}} \frac{v^2}{v_{\max}} dv = (v_{\max})^2 / 3$ (nell'esempio,

$$(v^2)_m = [100^2 / 3] \text{ m}^2/\text{s}^2 = 3333 \text{ m}^2/\text{s}^2, \text{ da cui}$$

$$\text{velocità quadratica media } v_{qm} = \sqrt{(v^2)_m} = v_{\max} / \sqrt{3} = \mathbf{0,577 v_{\max}} \quad (= 100 \text{ m/s} / \sqrt{3} = 57,7 \text{ m/s}).$$

L'energia cinetica di traslazione media è $EC_m = (m/2) (v^2)_m = (m/2) [(v_{\max})^2 / 3] = m(v_{\max})^2 / 6$.

L'energia cinetica media complessiva si ottiene tenendo conto che a ogni grado di libertà compete la stessa energia cinetica media $[(1/3) \text{ dell'energia cinetica media di traslazione, dunque } (1/3) m(v_{\max})^2 / 6 = m(v_{\max})^2 / 18]$, e tenendo conto che per molecole biatomiche i gradi di libertà rotazionali sono due (cinque gradi di libertà in totale).

Esempio numerico: se è $v_{\max} = 100$ m/s, la probabilità che la velocità sia compresa tra 15 e 35 m/s (area sottesa dalla curva della densità di probabilità f^* fra i due valori di v) è

$$f^* \Delta v = (1/v_{\max}) \Delta v = (1/100) (35 - 15) = 1/5 \text{ (prevedibile a priori).}$$

Il **valore medio di v** è

$$v_m = \int_0^{v_{\max}} v f^*(v) dv = \int_0^{v_{\max}} \frac{v}{v_{\max}} dv = \frac{1}{v_{\max}} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{v_{\max}} = v_{\max}/2 = \mathbf{0,5 v_{\max}} \text{ (50 m/s, prevedibile)}$$

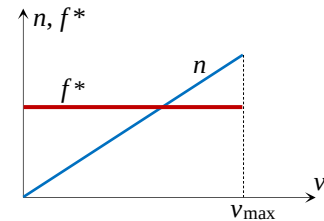
e il **valore medio di v²** è $(v^2)_m = \int_0^{v_{\max}} v^2 f^*(v) dv = \int_0^{v_{\max}} \frac{v^2}{v_{\max}} dv = (v_{\max})^2/3$ (nell'esempio,

$$(v^2)_m = [100^2/3] \text{ m}^2/\text{s}^2 = 3333 \text{ m}^2/\text{s}^2 \rightarrow \text{velocità quadratica media } v_{qm} = \sqrt{(v^2)_m} = v_{\max}/\sqrt{3} = \mathbf{0,577 v_{\max}} \text{ (= 100 m/s / } \sqrt{3} = 57,7 \text{ m/s).}$$

L'energia cinetica di traslazione media è $EC_m = (m/2) (v^2)_m = (m/2) [(v_{\max})^2/3] = m(v_{\max})^2/6$.

L'energia cinetica media complessiva si ottiene tenendo conto che a ogni grado di libertà compete la stessa energia cinetica media [(1/3) dell'energia cinetica media di traslazione, dunque $(1/3) m(v_{\max})^2/6 = m(v_{\max})^2/18$], e tenendo conto che per molecole biatomiche i gradi di libertà rotazionali sono due (cinque gradi di libertà in totale).

(b) Devono essere uguali le due aree sotto la curva (linea rossa in figura) della densità di frequenza $f^*(v)$. Dunque, $v' = v_{\max}/2$.



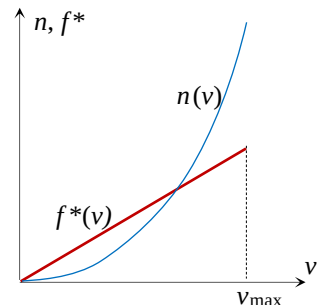
(10) (a) È per ipotesi $f^*(v) = kv$, con area A sottesa = 1. Ma è $A = (v_{\max} \cdot k v_{\max}) / 2 = 1$, da cui $k = 2/(v_{\max})^2$ e quindi $f^*(v) = 2v / (v_{\max})^2$. Allora:

$$v_m = \int_0^{v_{\max}} v f^*(v) dv = \frac{2}{(v_{\max})^2} \int_0^{v_{\max}} v^2 dv = (2/3) v_{\max} = 0,667 v_{\max}$$

$$(v^2)_m = \int_0^{v_{\max}} v^2 f^*(v) dv = \frac{2}{(v_{\max})^2} \int_0^{v_{\max}} v^3 dv = (v_{\max})^2/2 \rightarrow v_{qm} = \sqrt{(v^2)_m} = v_{\max}/\sqrt{2} = 0,707 v_{\max}.$$

Perciò $v_{qm} / v_m = (v_{\max}/\sqrt{2}) / (2v_{\max}/3) = 3/(2\sqrt{2}) = 1,06$.

(b) I valori della funzione di distribuzione $f^* = (dn/dv)/N$ sono proporzionali ai valori della funzione dn/dv , pendenza della curva $n = n(v)$. Pertanto tale curva presenta una pendenza continuamente crescente da zero a un massimo. Più precisamente: dato che la densità di frequenza f^* è qui funzione di primo grado di v (andamento lineare), la grandezza $n(v)$ è funzione di secondo grado di v (andamento parabolico in figura).



(c) Dato che l'area complessivamente sottesa dalla curva f^* , rappresentativa della probabilità, vale 1, occorre che l'area triangolare sottesa fra $v = 0$ e $v = v'$ [area = 1/2 del prodotto base v' del triangolo per altezza $f^*(v') = 2v' / (v_{\max})^2$ (vedi risposta 10)] abbia valore 1/2 :

$$(1/2) v' \cdot 2v' / (v_{\max})^2 = 1/2 \rightarrow v' = \sqrt{1/2} v_{\max} = 0,707 v_{\max}.$$

Si noti che questo è anche il valore della velocità quadratica media (risposta a): dunque, in questo particolare caso le velocità inferiori e le velocità superiori alla velocità quadratica media sono ugualmente probabili.

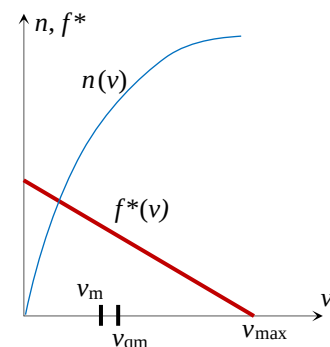
(d) L'area sottesa dalla linea della densità f^* fra $v = 0$ e $v = v''$ deve essere 1/4 dell'area totale (che ha valore 1). Dunque $(1/2) v'' \cdot 2v'' / (v_{\max})^2 = 1/4 \rightarrow v'' = v_{\max}/2$.

(11) In questo caso la velocità più probabile è la velocità nulla. Dovendo l'area del triangolo essere uguale a 1, l'altezza sarà $2/v_{\max}$. Allora $f^* = (2/v_{\max}) - kv$, dove k è determinato dalla circostanza che per $v = v_{\max}$ è $f^* = 0 \rightarrow k = 2/(v_{\max})^2 \rightarrow f^* = (2/v_{\max}) - 2v/(v_{\max})^2$.

Integrando $v f^* dv$ fra 0 e $v_{\max}$ si ottiene $v_m = v_{\max}/3 = \mathbf{0,333 v_{\max}}$.

Integrando $v^2 f^* dv$ fra 0 e $v_{\max}$ si ottiene $(v^2)_m = (v^2)_{\max}/6$

da cui $v_{qm} = \sqrt{(v^2)_m} = v_{\max}/\sqrt{6} = \mathbf{0,408 v_{\max}}$.



Dunque $v_{qm} = 0,408 \cdot 3v_m = 1,22 v_m$.

(12) Il valore di velocità più probabile (massimo della funzione f^* , derivata rispetto a v uguale a zero) è

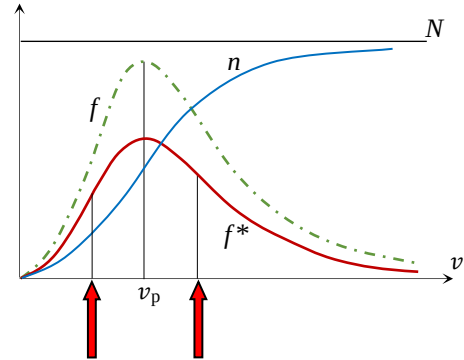
$$v_p = \sqrt{2kT/m}.$$

Essendo poi $(v^2)_m = v_{qm}^2 = \int_0^\infty v^2 f^* dv$, risulta

$v_{qm} = \sqrt{3kT/m}$ (in accordo con la teoria cinetica molecolare, nota 1 a pag.3) $= v_p \sqrt{3}/\sqrt{2} = 1,22 v_p$.

Per la velocità media si ottiene, da $v_m = \int_0^\infty v f^* dv$,

$v_m = 1,13 v_p$. Dunque, nella distribuzione di Maxwell è $v_{qm}/v_m = 1,22 v_p / 1,13 v_p = 1,08$.



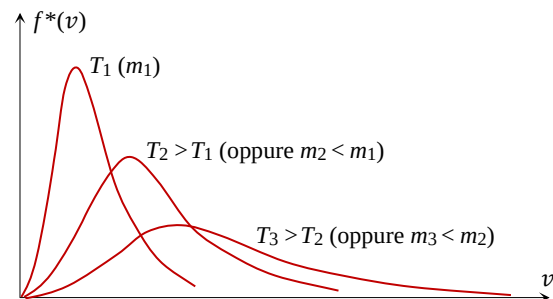
Chiaramente, **il valore della velocità media è superiore a quella della velocità più probabile** per effetto della particolare asimmetria della distribuzione (vedi frecce rosse in figura):

$$f^*(v_p + \Delta v) > f^*(v - \Delta v).$$

In particolare, per $v = v_p - v_p (= 0)$ è $f^* = 0$, mentre per $v = v_p + v_p$ è $f^* > 0$.

(13) (a) Sì. Dato che il picco di probabilità si verifica in corrispondenza della velocità $v_p = \sqrt{2kT/m}$, potrebbe trattarsi di un unico tipo di gas a temperature crescenti: al crescere della temperatura T , la curva si allarga verso le alte velocità, ma l'area sottesa si schiaccia perché in ogni caso vale 1.

(b) Sì. A pari temperatura, la velocità di picco aumenta se diminuisce la massa m : la curva si allarga cioè verso le alte velocità, al tempo stesso schiacciandosi.



(19) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.65 (“Indovina chi abbiamo in ordinate”)]

Notoriamente, è un discorso di probabilità, e quindi anche di frequenza statistica. Se teniamo presente che il numero complessivo delle molecole prese in considerazione è finito, e che invece è infinito il numero delle possibili velocità, è chiaro che la probabilità che «una specifica velocità» (per esempio la velocità di 381,80942507 m/s) sia, a un dato istante, la velocità di una o più molecole è esattamente zero. Del resto, se ad ognuna delle infinite possibili velocità corrispondesse un valore finito del numero di molecole, il numero totale di molecole risulterebbe infinitamente grande. Perciò, non è affatto vero che in ordinate figura il «numero di molecole che posseggono una specifica velocità».

Qual è allora il significato della variabile in ordinate? È il rapporto (denominato a volte ‘densità di presenza’) dn/dv , dove dv è un intervallo molto piccolo di valori di velocità e dn è il numero molto piccolo di molecole la cui velocità rientra nell'intervallo dv considerato. La curva è cioè costruita in modo che l'integrale tra v_1 e v_2 di tale funzione (ovvero, l'area sottesa dalla curva entro tale intervallo di valori della velocità) corrisponda al numero di molecole che, a un dato istante, hanno velocità comprese tra v_1 e v_2 . Così, l'area totale sotto la curva corrisponde al numero totale di molecole.

(continua)

ESERCITAZIONE N.14

ELETTROMAGNETISMO

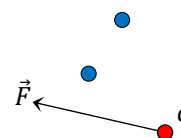
(1) Tutti gli osservatori inerziali sono d'accordo sul fatto che la quantità di moto (la velocità quindi del centro di massa) di un sistema isolato si conserva, ma ognuno di essi vede una quantità di moto diversa (in valore e/o direzione). Si può dire la stessa cosa per la carica elettrica?

(2) Supponiamo che due automobili cariche di elettricità si trovino fianco a fianco in un parcheggio. Potremmo pensare di calcolare la forza di interazione elettrostatica tra di loro mediante la legge di Coulomb, una volta noto il valore delle due cariche e la posizione delle macchine?



(3) Supponiamo di dover esplorare una regione dello spazio per verificare l'eventuale presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico. Lo strumento di cui si dispone è rudimentale: una sferetta metallica appesa a un filo: la sferetta può essere caricata di elettricità e scaricata a piacere. Come occorrerebbe procedere?

(4) Una carica puntiforme q (figura, pallino rosso) interagisce con altre due cariche (pallini blu). Se la forza su q è data dall'espressione $\vec{F} = q\vec{E}$, quante sono le cariche che producono il campo $\vec{E}$?



(a) una (b) due (c) tre

(5) In un vecchio testo di fisica per la scuola secondaria è scritto che le linee di forza del campo elettrico sono in pratica le traiettorie che verrebbero percorse da un corpuscolo carico di elettricità, soggetto solo alle forze del campo e abbandonato alle forze del campo con velocità iniziale zero. Si spieghi se tale affermazione può essere accettata.

(6) Supponiamo che una particella dotata di carica elettrica sia in movimento sotto l'azione solo di forze gravitazionali e di forze elettrostatiche, e che nel passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2 il lavoro delle forze gravitazionali sia 100 J e quello delle forze elettrostatiche sia -15 J.

- (a) Quale variazione ha subito l'energia totale della particella?
- (b) Quale variazione ha subito la sua energia cinetica?
- (c) Quale variazione ha subito la sua energia potenziale gravitazionale?
- (d) Quale variazione ha subito la sua energia potenziale elettrostatica?

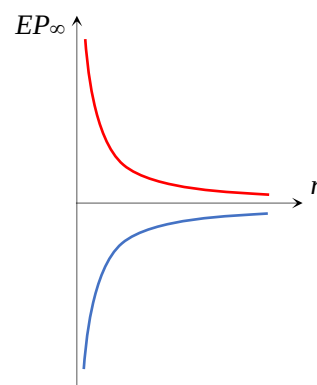
(7) L'energia elettrica prodotta nelle centrali (idroelettriche, termiche, eoliche, nucleari...) e da noi quotidianamente consumata (vedi bolletta di fine mese) non è altro che energia potenziale elettrostatica (*vero/falso*).

(8) Stabilire la validità delle seguenti affermazioni:

- (a) L'energia potenziale di una carica q in un dato campo elettrico dipende non solo dalla posizione di q nel campo, ma anche dalla scelta di una posizione di riferimento.
- (b) Ci sono campi elettrici in cui l'energia potenziale di una carica non può essere definita.
- (c) In un campo elettrico uniforme, l'energia potenziale di una carica q rispetto a un dato riferimento prefissato ha ovunque, per l'uniformità del campo, lo stesso valore.
- (d) Se un elettrone venisse spostato lungo una linea di forza nel senso stesso della linea di forza, la sua energia potenziale elettrostatica continuerebbe ad aumentare.
- (e) Il fatto che, in un dato campo elettrico, l'energia potenziale di una carica q risulti maggiore nella posizione A che nella posizione B sta ad indicare che in A l'intensità del campo è maggiore.

(9) Se, rispetto a un dato riferimento R , la carica q possiede energia potenziale 15 J quando si trova in A e -45 J quando si trova in B, allora l'energia potenziale di q nella posizione B rispetto al riferimento A è uguale a 30 J (*vero/falso*).

(10) a) Nel campo prodotto da una carica puntiforme q , l'energia potenziale rispetto all'infinito di una carica puntiforme q' **dello stesso segno** varia in funzione della distanza r tra le due cariche nel modo indicato nel grafico dalla linea rossa (*vero/falso*).



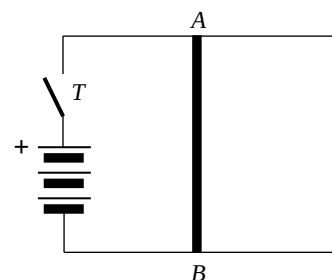
(b) Una formula analoga varrebbe per l'energia potenziale gravitazionale (cambiando la costante di proporzionalità e ponendo m al posto di q), ma entro parentesi i due termini verrebbero invertiti: prima la distanza finale e poi quella iniziale, cosicché l'energia potenziale rispetto all'infinito è sempre negativa: come mai questa differenza?

(11) Si spieghi il significato della seguente proposizione: il potenziale elettrostatico nel punto A rispetto al riferimento R è uguale a 72 V.

(12) È possibile fare in modo che una carica elettrica puntiforme si sposti all'interno di un campo magnetico senza essere soggetta ad alcuna forza? E se si trattasse invece di un campo elettrico?

(13) Attorno a un protone (carica positiva) che procede per inerzia viene a un dato istante prodotto un campo magnetico uniforme. Come viene modificato il moto, originariamente rettilineo e uniforme, del protone?

(14) Un campo magnetico uniforme è diretto perpendicolarmente alla pagina dal lettore verso la pagina. La bacchetta metallica AB è ferma ma è libera di traslare orizzontalmente mantenendo in A e B il contatto con i due conduttori rettilinei paralleli della figura.



(a) Che cosa accade se viene chiuso l'interruttore T ?

(b) Come si spiega l'aumento dell'energia cinetica della bacchetta, tenuto conto del fatto che la forza del campo magnetico **non può compiere lavoro**?

(15) Citazioni: [A] «Sappiamo dalla meccanica che un corpo sotto l'azione del campo gravitazionale si muove sempre verso punti nei quali possiede minore energia gravitazionale [...]» (*testo di fisica per il liceo scientifico*).

[B] «[...] se una carica q si muove sollecitata solo dal campo elettrico da un punto P ad un punto Q è sempre $U(P) > U(Q)$ [...] come nel caso gravitazionale» (*stesso testo*)

[C] «Cioè le cariche positive si muovono verso i punti a minore potenziale, quelle negative verso i punti a maggiore potenziale» (*stesso testo*).

Dov'è l'errore in queste affermazioni?

SOLUZIONI

(1) No: gli osservatori inerziali sono tutti d'accordo sul fatto che la carica di un sistema isolato ha un valore costante ("conservazione della carica elettrica") **ma sono anche tutti d'accordo sul valore della carica**. La carica elettrica è un "invariante relativistico".

(2) No, non sapremmo quale valore attribuire alla distanza r (valore minimo? massimo? medio aritmetico? medio geometrico? altro?). Se però le due macchine distassero 100 m, l'incertezza sul valore della distanza influirebbe molto poco sul risultato del calcolo, e a maggior ragione se le due macchine distassero 1000 metri. La legge di Coulomb è valida per cariche "puntiformi", cioè localizzate su oggetti le cui dimensioni lineari sono **piccole in rapporto alla distanza** che li separa.

Può anche essere sempre applicata a cariche elettriche distribuite nello spazio con **simmetria sferica** (cariche distribuite entro un volume sferico con densità di carica $\rho = dq/dV$ uguale, per ognuna delle due cariche, in tutti i punti equidistanti dal centro della sfera).

➡ Ma solo agli effetti esterni, esattamente come nel caso gravitazionale.

(3) Siamo in un campo elettrico se la sferetta **carica** appare soggetta a una forza che non si manifestava sulla sferetta scarica, e che agisce sulla sferetta **in modo indipendente dal suo stato di moto**.

Siamo in un campo magnetico se la sferetta **carica** appare soggetta a una forza diversa da zero solo quando la sferetta **ha velocità diversa da zero** (con esclusione di una direzione di moto ben precisa, e della direzione opposta).

Siamo in un campo elettrico e in un campo magnetico se la sferetta carica è soggetta a una forza che è diversa a seconda che la sferetta sia o non sia in movimento, ma in ogni caso diversa da zero

(4) Due. Nella formula $\vec{F} = q\vec{E}$, q è la carica su cui agisce la forza $\vec{F}$, mentre $\vec{E}$ è il campo prodotto nel punto in cui q si trova da tutte le cariche che interagiscono con q .

(5) Solo nel caso di linee di forza ad andamento rettilineo. In caso contrario, se il corpuscolo carico si spostasse lungo una linea di forza del campo elettrostatico la forza del campo (per ipotesi l'unica agente sul corpuscolo) non avrebbe componenti perpendicolari alla velocità: assurdo, visto che il corpuscolo possiede un'accelerazione centripeta v^2/r .

Detto in altro modo: in una qualsiasi posizione P del corpuscolo il vettore velocità (fig.1) è tangente alla traiettoria, il vettore forza invece ha, oltre a un eventuale componente tangenziale (che determina le variazioni del modulo della velocità), ha anche un componente trasversale, diretto in senso centripeto, che determina il cambiamento di direzione della velocità, e cioè l'incurvarsi della traiettoria. La fig.2 mostra quale potrebbe per esempio essere l'andamento della linea di forza (a tratteggio) per il punto P nel caso della fig.1. Si consideri anche qui l'analogia con le linee di forza del campo gravitazionale: **le linee di forza del campo terrestre non hanno nulla a che vedere con la traiettoria ellittica (o al limite circolare) di un satellite artificiale** (soggetto solo alla forza gravitazionale)

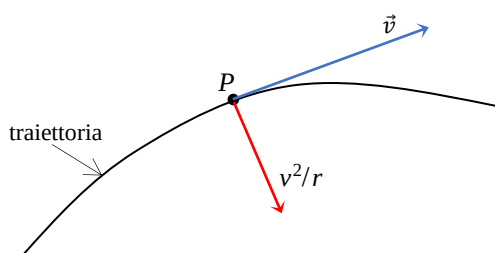


Fig. 1

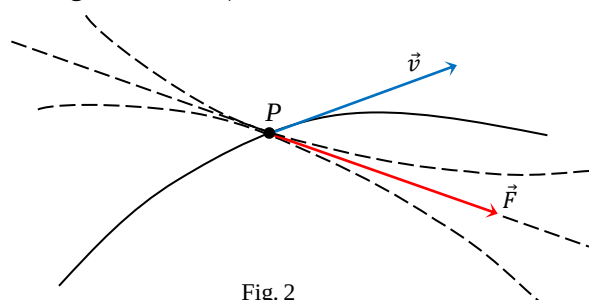


Fig. 2

(6) (a) Agiscono solo forze conservative, perciò l'energia totale (incremento uguale al lavoro delle forze non conservative) si conserva (variazione uguale a zero).

(b) L'energia cinetica è aumentata di $(100 - 15) \text{ J} = 85 \text{ J}$

(c) L'energia potenziale gravitazionale è diminuita di 100 J

(d) L'energia potenziale elettrostatica è diminuita -15 J (è aumentata di 15 J).

Più in generale. L'aumento dell'energia cinetica (valore finale meno valore iniziale) è uguale al lavoro compiuto da *tutte* le forze, conservative (C) e non conservative (NC):

$$[A] \quad \Delta EC = EC_2 - EC_1 = L_C + L_{NC}.$$

La diminuzione dell'energia potenziale è uguale al lavoro compiuto dalle forze conservative:

$$[B] \quad -\Delta EP = EP_1 - EP_2 = L_C.$$

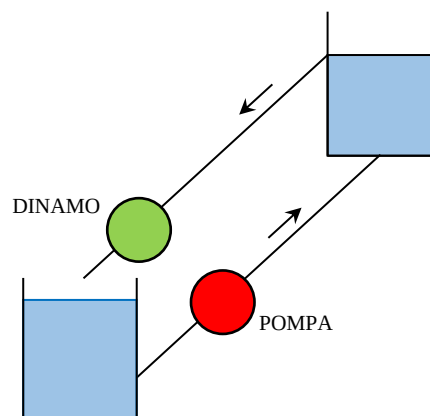
Sottraendo la [B] dalla [A] si ottiene che l'aumento dell'energia totale è uguale al lavoro compiuto dalle sole forze non conservative:

$$\Delta EC + \Delta EP = \Delta E_{\text{tot}} = L_{NC}.$$

(7) Vero. In un generatore di energia elettrica l'energia potenziale elettrostatica delle cariche mobili (nelle dinamo e negli alternatori, elettroni di conduzione) aumenta per effetto del lavoro negativo delle forze elettrostatiche ad essi applicate (movimento degli elettroni da potenziali più elevati a meno elevati): $L = q(V_1 - V_2)$.

Il contrario avviene in un utilizzatore (motore a corrente alternata o continua).

ANALOGIA IDRAULICA: in un circuito idraulico (figura), la pompa che sposta l'acqua dal basso in alto è un generatore di energia potenziale gravitazionale (lavoro resistente della forza peso); nella condotta di ritorno l'energia potenziale gravitazionale diventa energia cinetica (lavoro motore della forza peso), utilizzabile per esempio per tenere in rotazione il rotore di un generatore elettrico.



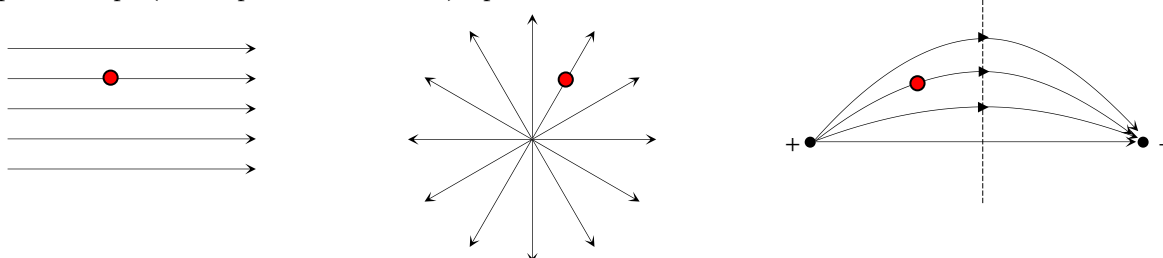
(8) (a) Vero: l'energia potenziale di q nella posizione A rispetto al riferimento R è il lavoro che le forze applicate a q compirebbero nel caso q si trasferisse da A a R . Se cambia la posizione del riferimento, cambia (in generale) anche tale lavoro.

(b) Vero. L'energia potenziale può essere definita solo per forze conservative. Il campo elettrico **coulombiano** (prodotto da cariche elettriche) è conservativo, il campo elettrico **indotto** (prodotto dalle variazioni di un campo magnetico) *non* è conservativo. Nota bene: il campo elettrico con cui abbiamo maggiore familiarità, quello contenuto nella luce e nel calore che giungono sulla Terra dal Sole (come in qualsiasi altra radiazione elettromagnetica) è proprio un campo elettrico indotto.

(c) Falso. Quello che è uguale dappertutto è il campo $\vec{E}$. L'energia potenziale ha lo stesso valore nei punti di una superficie equipotenziale, perpendicolare in ogni punto al campo $\vec{E}$.

(d) Vero, per effetto del lavoro resistente compiuto dalle forze del campo.

(e) Falso. Dove è maggiore l'intensità $\vec{E}$, è più grande non l'energia potenziale qV ma la sua rapidità di variazione nella direzione di $\vec{E}$ (promemoria: $\vec{E} = -\text{grad}V$). Nel caso ad esempio delle tre figure sottostanti, se un elettrone percorre nel senso della freccia una linea di forza la sua energia potenziale continua sempre ad aumentare (lavoro *negativo* della forza elettrica); l'intensità del campo invece è dappertutto uguale nel primo caso (campo uniforme), continua a diminuire lungo le linee di forza nel secondo, diminuisce in un primo tempo (fino al piano di simmetria) e poi aumenta nel terzo.

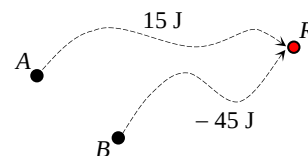


Nota. Il fatto che sia $\vec{E} = -\text{grad} V$, che cioè il campo $\vec{E}$ sia, a meno del segno, il “gradiente” del potenziale elettrostatico V , corrisponde a dire che:

- $E_x = -\partial V / \partial x$, cioè la componente di $\vec{E}$ in una generica direzione x è data, a meno del segno, dalla derivata parziale del potenziale V rispetto a x ;
- la direzione di $\vec{E}$ (quella quindi della tangente alle linee di campo) è quella in cui si verifica la più rapida diminuzione del potenziale;
- il modulo di $\vec{E}$ (volt a metro) misura la rapidità con cui V diminuisce in tale direzione;

- per un generico spostamento infinitesimo $\vec{ds}$ la variazione del potenziale è $dV = -\vec{E} \cdot \vec{ds}$ (lavoro della forza elettrostatica per unità di carica: cfr. $L = q(V_1 - V_2) = -q \Delta V$).

9) Falso, non 30 J bensì -60 J. L'energia potenziale di q in B rispetto ad A è il lavoro che verrebbe compiuto delle forze elettrostatiche nel caso q si dovesse spostare, *lungo un qualsiasi percorso*, da B ad A . Se q si sposta da B a R il lavoro delle forze elettrostatiche è -45 J, se poi si sposta da R ad A il lavoro è -15 J. In tutto quindi -60 J.

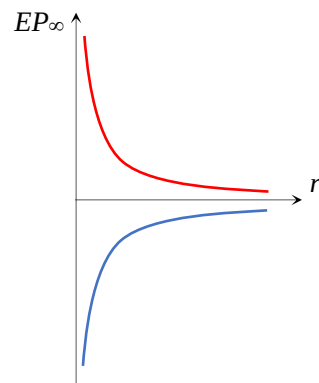


0) (a) Vero, a distanza r da q l'energia potenziale di q' rispetto a un riferimento infinitamente lontano è

$$EP_{\infty} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}. \text{ Se le due cariche avessero segno}$$

opposto, la curva si ribalterebbe rispetto all'asse delle distanze r (linea blu).

(b) Due masse hanno sempre lo stesso segno e si attraggono (lavoro quindi positivo se la distanza finale è minore di quella iniziale), viceversa due cariche dello stesso segno si respingono (lavoro positivo se la distanza finale è maggiore di quella iniziale).

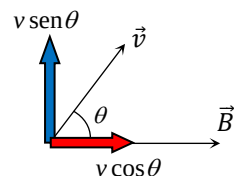


(11) L'eventuale trasferimento di una carica puntiforme q da A a R comporterebbe, da parte delle forze del campo elettrostatico, un lavoro di 72 J/C (joule a coulomb, joule di lavoro per ogni coulomb di carica):

$$L_{A \rightarrow R} = qV_{A(R)} = q(V_A - V_R).$$

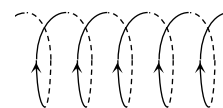
(12) Se la carica viene sempre spostata nel campo magnetico parallelamente al vettore induzione magnetica $\vec{B}$, la forza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ del campo magnetico è sempre zero. Viceversa, la forza del campo elettrico è in ogni caso diversa da zero.

(13) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$ Se θ è l'angolo tra la velocità iniziale $\vec{v}$ del protone e la direzione del campo $\vec{B}$, $\vec{v}$ ammette sia un componente parallelo a $\vec{B}$, di modulo $v \cos \theta$, che un componente ortogonale a $\vec{B}$, di modulo $v \sin \theta$. Il primo dei due componenti non subisce nel campo magnetico variazione alcuna, mentre il secondo dà luogo a un moto uniforme lungo una circonferenza posta in un piano ortogonale a $\vec{B}$, con raggio costante proporzionale alla velocità $v \sin \theta$ con cui la circonferenza viene percorsa:



$$[1] R = mv (\sin \theta) / qB$$

È infatti $m(v \sin \theta)^2 / R = q(v \sin \theta)B$, forza centripeta uguale forza di Lorentz. Ne risulta in definitiva (figura) un moto uniforme con velocità di modulo v (lo stesso della velocità iniziale) lungo una spirale cilindrica avente asse x parallelo a $\vec{B}$.



Il *passo* della spirale è lo spostamento subito dalla particella nella direzione dell'asse nel tempo T che la particella impiega a fare un giro attorno all'asse della spirale. Perciò il passo è

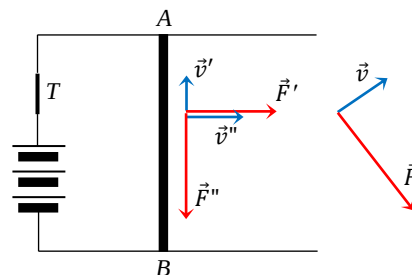
$$p = (v \cos \theta)T \text{ con } T = 2\pi / \omega, \text{ ed essendo } \omega = v (\sin \theta) / R = qB/m \text{ (si veda la [1])} \rightarrow T = 2\pi m / qB$$

Si noti che T **non dipende** dalla velocità $v \sin \theta$ con cui la particella si sposta perpendicolarmente al campo magnetico. Se dunque, per qualche ragione esterna, tale velocità dovesse aumentare (per esempio per l'impulso di una forza elettrostatica, come negli acceleratori tipo ciclotrone), aumenterebbe in proporzione il raggio della circonferenza ma non il relativo tempo di percorrenza.

(14) (a) La bacchetta è percorsa da corrente elettrica dall'alto verso il basso, entra in movimento verso destra ($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$) acquistando, se la forza magnetica è l'unica forza agente, un'energia cinetica sempre più grande (fintanto che è $i \neq 0$).

(b) In questo caso il campo magnetico compie sia un lavoro positivo che un lavoro negativo, con somma zero:

- per il fatto che gli elettroni si spostano verso l'alto con velocità $\vec{v}'$, il campo agisce su essi con una forza $\vec{F}'$ di modulo $qv'B$, proporzionale a v' diretta verso destra;
- per il fatto che gli elettroni si spostano verso destra con velocità $\vec{v}''$, il campo agisce su di essi con una forza $\vec{F}''$ di modulo $qv''B$, proporzionale a v'' e diretta verso il basso.



La forza risultante è perpendicolare alla velocità risultante, **lavoro zero**.

La forza verticale compie un lavoro negativo (lo spostamento degli elettroni verso l'alto viene contrastato), la forza orizzontale un lavoro positivo (la bacchetta acquista velocità).

Al crescere della velocità $\vec{v}''$ della bacchetta, aumenta in proporzione la forza verticale $\vec{F}''$ sugli elettroni di conduzione in essa contenuti, diminuisce quindi la differenza fra tale forza e la forza del campo elettrico, diminuisce v' (diminuisce l'intensità di corrente) e diminuisce in proporzione la forza orizzontale $\vec{F}'$: quando l'intensità di corrente si annulla, si annulla insieme la $\vec{F}'$ e la bacchetta (attriti permettendo) prosegue per pura inerzia. La velocità risultante $\vec{v}$ degli elettroni di conduzione ha nel frattempo ruotato in senso orario fino a diventare orizzontale, la forza $\vec{F}$ sugli elettroni di conduzione della bacchetta ha analogamente ruotato in senso orario (mantenendosi perpendicolare a $\vec{v}$) fino a diventare verticale (uguale in valore e opposta in direzione alla forza elettrostatica).

(15) [Da Tonzig, *100 errori di fisica*, cap.78 (“Sappiamo dalla meccanica”)]

Ecco dunque codificate alcune regole del tipo che lo studente predilige. Brevi nella formulazione, limpide nel significato, facili da ricordare, rientrano a buon diritto nella categoria delle cosiddette «regole pratiche»: merito anche dell'avverbio «sempre» che, sgombrando il campo dal sospetto di possibili varianti e complicazioni, incoraggia lo studente alla fede cieca, con ciò portando la praticità del discorso ai massimi livelli. Purtroppo, le tre regole in questione non hanno altro fondamento che la fantasia dell'Autore: e sarà bene dimenticarsene al più presto.

Che una forza tenda a spostare il punto su cui agisce nella direzione stessa della forza, è pacifico. Che però il punto in questione si sposti effettivamente nella direzione della forza, che cioè sia zero l'angolo tra forza e velocità, è tutto da vedere, *anche nel caso la forza in questione sia la sola forza agente*. Può naturalmente succedere, ma è un'eventualità del tutto particolare: più in generale, l'angolo tra forza e velocità potrà assumere qualsiasi valore.

Quando l'angolo è acuto la forza compie un lavoro positivo, e allora – posto che la forza sia conservativa – l'energia potenziale ad essa associata diminuisce: $U(P) > U(Q)$, come prescrive la regola [B]^[1]. Ma se l'angolo è ottuso il lavoro della forza è negativo, e l'energia potenziale aumenta.

Un esempio immediato è quello di un oggetto K lanciato verticalmente verso l'alto nel vuoto (assenza d'aria). A partire dall'istante in cui K si stacca dalla mano, l'unica forza agente su K, la forza peso, è diretta verso il basso. Ciò nonostante, K si sposta in un primo tempo verso l'alto: dal punto di lancio fino al punto più alto della traiettoria il lavoro della forza peso è negativo, e l'energia potenziale gravitazionale di K continua ad aumentare.

Del resto, il moto di un pianeta attorno al Sole è fondamentalmente governato dalla sola forza attrattiva gravitazionale proveniente dal Sole: e siccome l'orbita è ellittica, la distanza del pianeta dal Sole varia alternativamente in diminuzione e in aumento, e lo stesso succede della sua energia potenziale.

(continua).

¹ Dalla definizione stessa di energia potenziale (lavoro eventuale delle forze conservative) discende che l'energia potenziale finale è uguale all'energia potenziale iniziale meno il lavoro effettuato dalle forze conservative.

15. LETTURA AMENA n.1

Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.1 (“Le parole della fisica”)

Le parole della fisica sono per lo più le stesse che usiamo nel linguaggio di ogni giorno, ma hanno a volte un significato un po' diverso, e in certi casi del tutto diverso: un significato che, se, nel contesto della fisica, vogliamo capire e farci capire, occorre rispettare scrupolosamente. Ciò vale ad esempio per termini come peso, accelerazione, massa, densità, calore, pressione, lavoro, potenza, energia... Questo non significa assolutamente che il linguaggio comune sia scorretto, e che si debba cercare di riformarlo (come qualcuno pretende) solo perché in ambito strettamente scientifico qualcuno ha assegnato a certe parole un certo significato.

Tanto più che esistono casi in cui la stessa terminologia della fisica si potrebbe prestare a qualche riserva. Personalmente, per esempio, rimpiango che non si possa più parlare di calore ‘contenuto in un corpo’, ma solo di calore fornito o ricevuto (vedere più avanti in questo capitolo): era bella l'analogia tra calore contenuto in un corpo e liquido contenuto in un recipiente: come uno stesso quantitativo di liquido può raggiungere diversi livelli a seconda delle dimensioni del recipiente, così, a parità di calore contenuto, la temperatura di corpi diversi può risultare diversa. E, si aggiungeva, come il liquido si sposta da un recipiente ad un altro in base al livello che nei due recipienti raggiunge, e non in base alla quantità di liquido che i due recipienti contengono, così, al contatto tra due corpi, il calore si sposta solo in dipendenza dal valore delle rispettive temperature. Ora questo discorso è da considerarsi scorretto. Peccato.

Non parliamo poi di quei casi in cui la terminologia della fisica si dimostra decisamente infelice: la cosiddetta ‘forza elettromotrice’, per esempio, tutto è fuorché una forza: è, come il potenziale elettrostatico, un lavoro diviso una carica e si misura quindi in volt (e non, come le forze, in newton). E le cosiddette ‘linee di forza’ di un campo magnetico non mostrano affatto la direzione della forza del campo su una carica elettrica che lo attraversa: al contrario, la forza è sempre perpendicolare alla linea di forza (che converrà quindi chiamare semplicemente ‘linea di campo’). Ma limitiamoci qui ad alcuni casi di ordinaria ambiguità.

1 – Consideriamo la parola ‘peso’. Nel linguaggio corrente, il peso di un corpo è la forza che un corpo esercita su ciò che lo sostiene: il peso di un libro appoggiato sul tavolo è la forza esercitata dal libro sul tavolo, il peso di una persona in piedi sul pavimento è la forza esercitata dalla persona sul pavimento, il peso di una valigia è la forza con cui la valigia tira la mano verso il basso. In fisica invece il peso del libro è la forza attrattiva che il pianeta Terra esercita sul libro: il tavolo non c'entra! Il peso di una persona è la forza attrattiva che la Terra esercita sulla persona: il pavimento non c'entra! Il peso di una valigia è la forza attrattiva che la Terra esercita sulla valigia: la mano non c'entra! C'è una bella differenza tra i due significati della parola ‘peso’. Se la forza attrattiva della Terra su una persona è 72 kg, non è detto che la forza che la persona esercita sul pavimento (la forza che viene misurata da una bilancia) sia proprio 72 kg. Se la persona ‘si pesa’ all'interno di un ascensore, la bilancia potrebbe segnare 72 kg, ma anche un po' di più oppure un po' di meno, a seconda di quello che l'ascensore sta facendo (vedi ad esempio la nostra sensazione di pesare di più quando l'ascensore parte verso l'alto, di pesare di meno quando l'ascensore parte verso il basso). E se, disgraziatamente, l'ascensore stesse precipitando nel vuoto, la bilancia segnerebbe zero anche se il peso di tutto quello che c'è nell'ascensore (la forza attrattiva proveniente dalla Terra) sarebbe ovviamente sempre uguale. Di solito gli ascensori non precipitano, ma queste strane cose (la cosiddetta «assenza di peso») succedono normalmente in una capsula spaziale che viaggia a motori spenti, anche se la forza attrattiva proveniente dalla Terra è in realtà ridotta solo di pochi punti percentuali (del 3% a 100 km dalla superficie terrestre).

2 – La parola ‘forza’ ha fortunatamente, in fisica, un significato molto vicino a quello del linguaggio corrente: forza è ciò che può produrre effetti di deformazione: per allungare o comprimere una molla, per flettere una bacchetta, per torcere qualcosa occorre applicare, far agire delle forze. È chiaro peraltro che, con la stessa forza muscolare con cui posso deformare un corpo, posso anche mettere in moto un carrello del supermercato, o frenarlo, o costringerlo a cambiare direzione: posso insomma modificare il suo modo di muoversi, il suo ‘stato di moto’. Una volta messo in moto, se non ci fosse nessun attrito e non ci fosse nemmeno l'aria, se non ci fosse nessuna forza, il carrello andrebbe avanti all'infinito in linea retta con velocità sempre uguale: è la legge d'inerzia, la più semplice, la più fondamentale legge dell'intera fisica: se non c'è forza, il moto è rettilineo con velocità sempre uguale.

3 – Nel linguaggio corrente, ‘accelerazione’ vuol dire velocità in aumento. In fisica vuole invece dire, più genericamente, velocità in variazione: o perché il valore aumenta, o perché il valore diminuisce, o perché

cambia la direzione, o perché valore e direzione cambiano entrambi. Del resto, c'è la legge ben nota «forza uguale a massa per accelerazione»: dunque, 'accelerazione' è, in fisica, quello che succede a un punto materiale tutte le volte che la forza ad esso applicata (la somma delle forze applicate) è diversa da zero. Supponiamo per esempio che un **sasso** sia soggetto solo al proprio peso (assenza d'aria): che cosa succede della sua velocità? Dipende dal-

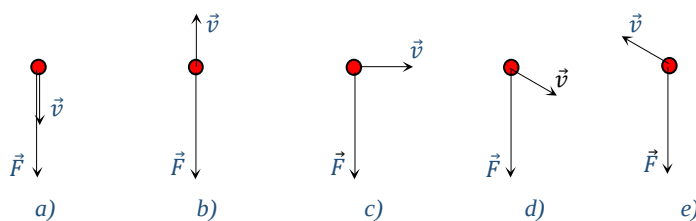


Fig.1 - Significato del termine 'accelerazione' in fisica: a) modulo del vettore $\vec{v}$ in aumento; b) modulo del vettore $\vec{v}$ in diminuzione; c) il vettore $\vec{v}$ sta ruotando in senso orario; d) rotazione di $\vec{v}$ in senso orario e modulo in aumento; e) rotazione di $\vec{v}$ in senso antiorario e modulo in diminuzione.

l'angolo α tra forza peso (diretta verticalmente verso il basso) e velocità (diretta tangenzialmente alla traiettoria nel senso di marcia): se il sasso è stato lanciato verticalmente verso il basso ($\alpha = 0^\circ$, fig. 1a) la sua velocità è in aumento (il vettore $\vec{v}$ si sta allungando); se il sasso sta viaggiando verticalmente verso l'alto ($\alpha = 180^\circ$, fig. 1b), la sua velocità è in diminuzione (il vettore $\vec{v}$ si sta accorciando). Se è stato lanciato verso l'alto ma in direzione obliqua, il sasso descrive una parabola con velocità che prima, dal punto di lancio fino al vertice della parabola, diminuisce, poi aumenta: e contemporaneamente continua a cambiare direzione. Nel vertice della parabola (fig. 1c) la forza peso è verticale e la velocità orizzontale: dato che stiamo trascurando la resistenza dell'aria, la velocità del sasso è in variazione solo per quanto riguarda la direzione.

Il termine 'decelerazione' viene usato nel linguaggio corrente come sinonimo di rallentamento, ma in fisica è una parolaccia che, per quanto espressiva, non dovrebbe essere usata: in fisica, gli effetti prodotti da una forza sul moto di un punto si chiamano in ogni caso 'accelerazione': un punto che nel linguaggio corrente decelera, in fisica, piaccia o no, accelera.

Ma soprattutto, 'decelerazione' non deve essere usato in fisica come sinonimo di accelerazione negativa, sarebbe un errore vero e proprio. Se si parla di accelerazione negativa ci si riferisce ovviamente all'accelerazione scalare (un vettore non è mai negativo). E allora accelerazione negativa significa semplicemente pendenza negativa nel diagramma che dà la velocità scalare^[1] in funzione del tempo: quindi velocità positiva in diminuzione (ecco la 'decelerazione'), come nell'istante t_1 in fig. 2, ma anche (istante t_2) velocità zero, subito prima positiva e subito dopo negativa (il punto mobile sta invertendo senso di marcia), oppure ancora (istante t_3) velocità negativa con valore assoluto in aumento (e qui proprio la decelerazione c'entra poco).

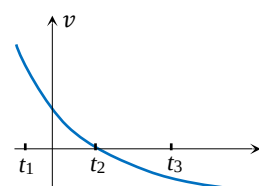


Fig. 2

4 – La parola 'massa' ha per lo più, nel linguaggio corrente, il significato di 'grande quantità': una massa d'acqua... mezzi di comunicazione di massa... correre in massa... siete una massa di... In fisica ha un significato particolare e molto preciso: la massa *inerziale*, definita attraverso la legge «forza uguale a massa per accelerazione» (oppure, in alternativa, attraverso la legge di conservazione della quantità di moto), sta ad indicare la più o meno grande 'inerzia' di un corpo, cioè la più o meno grande tendenza a conservare la propria velocità (più massa, più inerzia, meno accelerazione a parità di forza); la massa *gravitazionale* misura invece la più o meno grande capacità di un corpo di esercitare su altri corpi – e di subire da altri corpi – l'attrazione gravitazionale: l'attrazione gravitazionale tra due corpi (ad esempio il Sole e la Terra, o la Terra e la Luna) è infatti direttamente proporzionale a entrambe le masse gravitazionali interagenti, e in definitiva al loro prodotto (*non* alla loro somma: se fosse proporzionale alla somma $m_1 + m_2$, non sarebbe vero che aumentando in un certo rapporto una qualsiasi delle due masse aumenta nello stesso rapporto la forza con cui le due masse si attraggono).

La massa di un corpo è, per eccellenza, la sua caratteristica fisica. Il fatto che un corpo A pesi, nello stesso punto dello spazio, il triplo di un corpo B, sta ad indicare che la sua massa gravitazionale è tripla rispetto a quella di B: se A cambia posizione nello spazio, per esempio dal livello del mare lo portiamo in

¹ Promemoria: la velocità scalare è la derivata temporale dell'ascissa curvilinea s (lunghezza, positiva o negativa a seconda di come la traiettoria è stata orientata, dell'arco di traiettoria compreso tra la posizione di riferimento e la posizione occupata dal punto mobile) e corrisponde alla pendenza della curva oraria (curva del diagramma s, t). Analogamente, l'accelerazione scalare è la derivata temporale della velocità scalare.

alta montagna, cambia il suo peso – in questo caso diminuisce – ma resta invariata la massa (per dargli la stessa accelerazione occorre far agire la stessa forza).

È di enorme portata concettuale il fatto che massa inerziale e massa gravitazionale sono tra loro proporzionali ('principio di equivalenza'): se un corpo ha massa inerziale n volte più grande di un altro corpo, anche la sua massa gravitazionale è n volte più grande. Questo ci autorizza a semplificarci la vita esprimendo con uno stesso numero la massa inerziale e la massa gravitazionale di un corpo, e a dire semplicemente 'massa' senza dover ogni volta specificare a quale delle due masse ci riferiamo.

Si noti per inciso che la relazione «forza uguale a massa per accelerazione» non può essere utilizzata per definire sia la forza che la massa: definire la forza come prodotto massa per accelerazione presuppone che il concetto di massa sia già stato definito attraverso la legge di conservazione della quantità di moto. In alternativa, la massa può essere definita come rapporto forza su accelerazione se la forza è già stata definita in funzione dei suoi effetti di deformazione.

5 – Un liquido molto 'denso' è, nel linguaggio comune, un liquido che scorre con difficoltà, che si lascia rimescolare con difficoltà: in fisica invece la densità è la massa per unità di volume (1 g/cm^3 per l'acqua, $13,6 \text{ g/cm}^3$ per il mercurio). Quella che nel linguaggio comune si chiama densità, in fisica si chiama *viscosità*.

6 – La parola 'calore' ha assunto gradualmente in fisica un significato stranissimo e diciamo pure abbastanza artificioso: calore significa *energia (cinetica) che si sposta in dipendenza dal valore della temperatura*. La conseguenza di questa definizione è che non si può (non si può più) parlare di calore 'contenuto in un corpo', mentre si può parlare di calore fornito o sottratto ad un corpo. Se diciamo che l'acqua del mare mitiga il clima invernale grazie alla grande quantità di calore che ha accumulato durante l'estate, sbagliamo: il mare ha *ricevuto* calore (e durante l'inverno *irradia* calore), ma ciò che ha *accumulato* si chiama, ebbene sì, energia termica (energia cinetica associata al moto disordinato, individuale, senza riscontro macroscopico, delle molecole costitutive).

7 – 'Pressione' è, nel linguaggio comune, sinonimo di forza («esercitare una forte pressione»). Nel linguaggio della fisica pressione significa *forza diviso area* (della superficie sulla quale la forza agisce perpendicolarmente), ovvero *forza per unità di area*. Ad esempio, la pressione atmosferica sulla superficie della Terra vale mediamente 1 kg (o kgf , kilogrammo forza) su ogni cm^2 .

8 – Se il termine calore ha in fisica un significato strano, il termine 'lavoro' non è da meno: lavoro è ciò che compie una forza quando il punto su cui agisce si sposta, in un senso o nell'altro, parallelamente alla forza. Se la forza ha valore costante, il lavoro compiuto è il prodotto della forza per lo spostamento subito dal suo punto di applicazione parallelamente alla forza. Se non c'è spostamento parallelamente alla forza, niente da fare: la forza può essere grande quanto si vuole ma il lavoro da essa compiuto è zero.

Si noti che non solo nella vita corrente ma perfino nella fisica applicata (ingegneria) il termine lavoro viene a volte anche usato con un significato diverso: si dice, per esempio, che in una certa struttura una certa trave 'lavora' a flessione piuttosto che a trazione o torsione, quando invece, dal punto di vista della fisica, di lavoro, nel caso statico, non è il caso di parlare. È un errore? Assolutamente no, ogni ambito ha il suo linguaggio, ogni linguaggio ha la sua ragion d'essere e la sua dignità. L'importante è che ci sia coerenza linguistica internamente a ciascun ambito.

9 – Nel linguaggio corrente, 'potenza' è una parola utile a molti usi: può corrispondere, a seconda del contesto, a *potere* (la potenza politica di un personaggio, di un quotidiano), a *intensità* (la potenza di un suono), a *efficacia* (la potenza espressiva di un quadro), a *forza* (la potenza muscolare), a *energia* (la potenza delle onde)... In fisica il significato è uno solo, ed è del tutto diverso: potenza è la rapidità di esecuzione del lavoro (o di produzione dell'energia)^[2]. L'unità internazionale di potenza, il watt, corrisponde al lavoro di un joule nell'intervallo di tempo di un secondo, $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

10 – Per il termine 'energia' dovrei ripetere un discorso che ho già fatto in molte sedi, in particolare nel libro *100 errori di fisica*^[3]. Mi limito qui ad affermare per l'ennesima volta che, contrariamente a quanto si trova scritto in una moltitudine di testi scolastici, l'energia di un corpo non è affatto, in fisica, «il lavoro che il corpo può compiere», la sua «capacità di esecuzione di lavoro». Questo può andar bene nel linguaggio corrente, ma in fisica assolutamente no: in fisica, tra energia di un corpo e lavoro che il corpo può compiere *non c'è nessuna relazione di carattere generale*.

Nessuna parentela, dunque, in fisica, tra energia e lavoro? Al contrario, una parentela strettissima, purché si parli del lavoro 'giusto', non quello *compiuto* da un corpo ma quello da esso *subito*: l'energia cinetica

² Qualche Autore designa ancora con l'arcaico termine 'potenza' anche la forza che, in una leva, occorre applicare per fare equilibrio alla 'resistenza'.

³ Vedi per esempio il capitolo 40, «Il comune senso dell'energia».

di un corpo K misura infatti, a meno del segno, il lavoro che dovrebbe essere compiuto dalle forze applicate a K per azzerarne la velocità; e l'energia potenziale di K , nella posizione A e rispetto alla posizione di riferimento R , è il lavoro che le forze conservative applicate a K compirebbero nel caso K si spostasse, lungo una qualsiasi traiettoria, da A fino a R .

Di passaggio, non mi lascio sfuggire l'occasione di ribadire che le tante 'forme di energia' di cui si parla nei testi scolastici si riducono in definitiva a una sola, l'energia cinetica: $mv^2/2$ per le particelle di materia (m è la massa, v la velocità), hf per le particelle della radiazione elettromagnetica (h è la costante di Planck, f la frequenza dell'onda elettromagnetica)^[4]. L'energia potenziale (gravitazionale, elastica, elettrostatica...), in quanto 'lavoro eventuale delle forze conservative' corrisponde a un potenziale incremento (eventualmente negativo) dell'energia cinetica^[5].

11 – Ci possono essere discrepanze di linguaggio (e quindi, occasionalmente, problemi di comunicazione) non solo tra la fisica e la vita comune, ma perfino all'interno della fisica.

Un esempio è quello del moto 'uniformemente accelerato': che cos'è, esattamente? Allo studente viene per lo più insegnato che è il moto in cui il valore della velocità scalare è funzione di primo grado del tempo: $v = v_0 + at$, dove a è l'accelerazione scalare. Se, nel grafico, la curva si riduce a una retta (come in fig.3), la pendenza – l'accelerazione scalare – è costante e il moto si chiama uniformemente accelerato: così c'è scritto nei testi (quasi tutti).

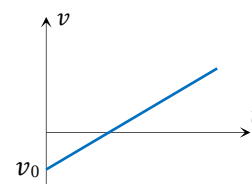


Fig. 3

E andrebbe anche bene, se non fosse che lo studente si imbatte ben presto in un altro tipo di moto, se possibile più importante: il moto in cui ciò che si mantiene costante non è l'accelerazione scalare, ma il *vettore* accelerazione. Se, in assenza d'aria, lanciassimo un sasso in una qualsiasi direzione non verticale, il sasso percorrerebbe un arco di parabola sotto l'azione di una forza costante in direzione e valore, la forza peso: la sua accelerazione sarebbe l'accelerazione di gravità $\vec{g}$, un vettore costante in direzione e valore, diretto verticalmente verso il basso con valore $9,81 \text{ m/s}^2$. Se accettiamo la precedente definizione, questo *non* è un moto uniformemente accelerato (l'angolo del vettore accelerazione con la tangente alla traiettoria non è costante, la componente tangenziale del vettore accelerazione – l'accelerazione scalare – non è costante, la pendenza del diagramma v, t non è costante). Come chiamarlo, allora? Dobbiamo arrampicarci sugli specchi, chiamarlo per esempio, un po' goffamente, «moto ad accelerazione vettoriale costante». Tutto si può fare, naturalmente, basta intendersi. Ma mi chiedo: non sarebbe tanto più semplice, e tanto più coerente col senso delle parole, riservare la denominazione di 'uniformemente accelerato' al moto ad accelerazione vettoriale costante, e ripescare per il moto ad accelerazione *scalare* costante la vecchia denominazione di 'uniformemente vario'? Io nei miei testi lo faccio, ma chiaramente lo studente vede anche altri testi e sente altre campane, per cui mi trovo continuamente costretto a ricordargli, a scanso di equivoci, il senso esatto di ciò di cui si sta parlando.

Le possibili differenze di terminologia tra Autori non sono pochissime. Alcuni non distinguono tra 'i componenti' e 'le componenti' di un vettore: per altri (e io mi schiero con loro) *le* componenti di un vettore sono grandezze scalari dotate di segno, mentre *i* componenti sono vettori. Così, anziché dire «il componente x del vettore velocità è controverso all'asse x » possiamo dire «la componente x del vettore velocità è negativa». Se per il moto di un punto scrivo $x = x_0 + v_x t$, con v_x è chiaramente indicata *la* componente x (positiva o negativa a seconda dei casi) del vettore velocità.

(continua)

⁴ Se vogliamo che il teorema dell'energia cinetica sia sempre valido, alle alte velocità la formulazione classica dell'energia cinetica della materia, $mv^2/2$, va sostituita con la formulazione relativistica $(\gamma - 1)mc^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto e dove $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

⁵ Promemoria: il teorema dell'energia cinetica stabilisce che l'energia cinetica finale di un corpo K è uguale a quella iniziale più il lavoro compiuto dalle forze applicate a K .

16. LETTURA AMENA n.2

Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.5 (“Le leggi della fisica”)

Non occorre dirlo ma lo dico: conoscere una legge fisica significa non solo conoscerne l’enunciato o l’eventuale formulazione matematica (la formula), ma *anche il preciso significato*, e gli eventuali limiti di validità. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, questo lo sa dire anche lo studente più disamorato della fisica. Ma si renderà conto di quanto sta dicendo? Forse no, se è vero che quasi mai trova da ridire sul seguente ragionamento: quando un libro è appoggiato sul tavolo, la forza che il tavolo esercita verso l’alto sul libro è uguale in valore al peso del libro «per il principio di azione e reazione». Che corrisponde a dire: per il principio di azione e reazione, la forza che A (il tavolo) esercita su B (il libro) è uguale in valore alla forza che C (la Terra) esercita su B.

Il discorso da fare è un po’ diverso: per il principio di azione e reazione, il peso del libro (la forza che la Terra esercita sul libro) è uguale in valore alla forza che il libro esercita sulla Terra, e la forza che il tavolo esercita sul libro è uguale in valore alla forza che il libro esercita sul tavolo. Se tutto è in equilibrio, la forza complessiva sul libro deve essere zero, perciò il peso del libro è uguale in valore alla forza che il libro riceve dal tavolo, e allora, *per il principio di azione e reazione*, anche la forza del libro sul tavolo è uguale al suo peso. Ma attenzione: se, per qualche strana ragione, il libro si trovasse sul pavimento di un ascensore che sta prendendo o perdendo velocità (accelerazione diversa da zero), la forza complessiva sul libro non sarebbe più zero e non sarebbe più vero che la forza esercitata dal libro sul pavimento, e dal pavimento sul libro, corrisponde al peso del libro.

Errori da studenti, verrebbe da dire. Se non fosse che il principio di azione e reazione colpisce a volte anche a livelli ben più autorevoli, perfino autori di testi scientifici sembrano a volte non averlo capito: ne ho parlato nel libro *100 errori di fisica*, qui ricordo solo che in un testo universitario di termodinamica si leggeva (voglio credere che non si legga più) che l’equilibrio del pistone di chiusura di un recipiente cilindrico contenente del gas (fig.2) richiede che la spinta esercitata verso l’alto dal gas sul pistone (freccia in figura) «sia esattamente compensata dalla forza che il pistone esercita verso il basso sul gas»... quasi che le due forze, quella del gas sul pistone e quella del pistone sul gas, potessero mai avere, equilibrio o non equilibrio, valore diverso!

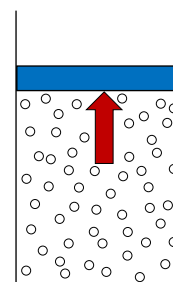


Fig. 2

Ma non si creda che questo sfondone del testo di termodinamica sia un infortunio isolato: incredibilmente, sono molti gli Autori che, alle prese col principio di azione e reazione – una delle leggi, si direbbe, più innocue di tutta la fisica – si confondono, pasticciano, perdono la testa (e la fanno perdere a chi legge).

Per esempio, l’Autore di un testo per i licei scientifici nutre, chissà perché, nei confronti del principio di azione e reazione una diffidenza totale, tant’è che pone limiti severissimi alla sua applicabilità: «i due corpi devono costituire, affinché valga questo principio, un sistema isolato ossia non devono esistere forze, derivanti da oggetti estranei, e agenti su A o su B, a meno che non siano sistemi di forze a risultante nulla». Dunque, se io (A) spingo una cassa (B) lungo un piano orizzontale, la forza da me esercitata sulla cassa sarebbe diversa in valore da quella che la cassa esercita su di me: su di me e sulla cassa agiscono infatti anche forze esterne, il peso e la reazione del piano d’appoggio, con una forza risultante – la forza d’attrito radente – diversa da zero. Ma non basta: non pago dello sfracello già prodotto, l’Autore aggiunge che «il principio di azione e reazione si realizza quando due soli corpi interagiscono partendo da velocità iniziali nulle». Insomma, non vale praticamente mai^[1].

Un altro Autore scrive che se un corpo è in equilibrio sotto l’azione di due sole forze, le due forze devono avere modulo uguale e direzioni opposte: più che giusto, ma il fatto è che l’Autore riesce a vedere in questo una riprova della validità del principio di azione e reazione. Ecco il testo preciso: «Se su un corpo agisce una forza $\vec{F}$ e questo è in equilibrio, deve necessariamente agire sul corpo una forza $-\vec{F}$ uguale in modulo e direzione e contraria in verso. Rivediamo cioè in azione il terzo principio della dinamica». Decisamente, conoscere (e insegnare) l’enunciato delle leggi fisiche non significa ancora averne capito il

¹ Il principio d’azione e reazione, sempre valido in caso di interazioni macroscopiche ‘a contatto’, cade in difetto in presenza di effetti relativistici come le forze magnetiche o come la velocità di propagazione non infinita delle variazioni dei campi di forza (si veda al cap.14 del libro).

significato!

Considerata l'importanza dell'argomento e i fraintendimenti cui può dar luogo, io credo che possa valere la pena di un piccolo supplemento di riflessione. Domanda: ho ragione di dire che, a norma del principio di azione e reazione, l'interazione tra due oggetti può essere solo attrattiva o repulsiva? Per esempio: nel caso di due oggetti A e B disposti lungo una linea orizzontale, ho ragione di dire che la forza di A su B e quella di B su A non possono avere direzione verticale? No, non ho ragione: ho torto. La regola varrebbe, ad esempio, per l'interazione elettrostatica fra due elettroni (che possono in effetti solo respingersi) o fra un elettrone e un protone (che possono solo attirarsi). Ma si consideri l'interazione elettrostatica tra un elettrone e una molecola d'acqua (o una qualsiasi altra molecola di tipo 'polare'). L'elettrone è un oggetto puntiforme elettricamente carico di segno meno, la molecola è schematizzabile, agli effetti dell'interazione elettrostatica, come un 'dipolo' elettrico elementare, un sistema costituito da due cariche puntiformi strettamente legate tra loro, una positiva e una negativa, uguali in valore assoluto. Chiaramente, la carica dell'elettrone interagisce in senso repulsivo con la parte negativa della molecola e in senso attrattivo con la parte positiva. Nella particolare situazione mostrata in fig.3 (elettrone posto nel 'piano equatoriale' del dipolo), si vede chiaramente che l'interazione complessiva non tende a produrre né l'avvicinamento né l'allontanamento dei due oggetti: le componenti di forza verticali (fig.4) danno collettivamente luogo a una coppia² che tende a far ruotare l'intero sistema in senso orario, le componenti orizzontali costituiscono una coppia che tende a far ruotare la molecola in senso antiorario (in modo tale che, se il sistema è isolato, rispetto al centro di massa il momento angolare complessivo si mantenga costante, per esempio si mantenga nullo se è inizialmente nullo).

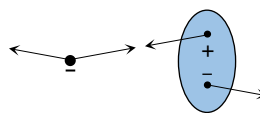


Fig.3

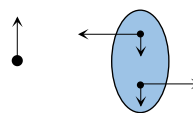


Fig.4

(continua)

² Promemoria: si chiama 'coppia' il sistema di due forze uguali in modulo e opposte in direzione. Se applicata a un corpo rigido, una coppia tende a far ruotare il corpo attorno a un asse passante per il suo centro di massa. Si veda sull'argomento anche a pag. 172.

17. LETTURA AMENA n.3

Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.9 (“Energia potenziale”)

Lo studente – anche lo studente universitario – non ha un buon rapporto con l’energia potenziale. Nella sua testa l’energia potenziale va giusto bene per aggiustare i conti e arrivare alla fatidica affermazione «l’energia totale si conserva», ma al di là di questo non è ben chiaro che cosa veramente sia. Rispetto all’energia cinetica che, anche per merito della simpatica formuletta $(1/2)mv^2$, ha un significato così concreto, l’energia potenziale appare allo studente come qualcosa di vago, di artificioso, di astratto^[1].

Circa l’astrattezza, lo studente non avrebbe difficoltà a ricredersi se il suo libro, o chi per esso, gli spiegasse che l’energia potenziale è nient’altro che una potenziale energia cinetica; che l’energia elettrica prodotta in una centrale è nient’altro che energia potenziale; che un motore elettrico e un motore a benzina «vanno a energia potenziale», rispettivamente elettrica o chimica; che quando paghiamo la bolletta della luce o del gas paghiamo l’energia potenziale – elettrica e chimica rispettivamente – che abbiamo consumato. Altro che concetto astratto!

Ma c’è sempre un perché, qui il problema nasce con la definizione. Mi sono sempre chiesto come mai un concetto tanto semplice debba venire introdotto nei libri di testo in modo così contorto. Il discorso che viene fatto è tipicamente questo: l’energia potenziale di un corpo K è il lavoro che dobbiamo compiere contro le forze del campo per spostare K da una posizione di riferimento arbitraria (poi però si precisa che è meglio scegliere una posizione infinitamente lontana) fino alla posizione in cui K si trova.

Dire che è una definizione contorta è dire niente: il fatto è che è una definizione sbagliata. Come minimo si dovrebbe specificare «senza variazione dell’energia cinetica del corpo in questione», altrimenti il lavoro «che dobbiamo fare per spostarlo» è totalmente indeterminato. E resta ancora indeterminato se non aggiungiamo «in assenza di ogni altra forza», se cioè non specifichiamo che su K agiscono solo le forze del campo conservativo (gravitazionale, elettrico, elastico...) relativamente al quale stiamo definendo l’energia potenziale di K .

Ma, anche con tali precisazioni, perché dovremmo necessariamente compiere del lavoro su K «per spostarlo» dalla posizione R di riferimento alla posizione A in cui di fatto si trova? Forse non è necessario alcun lavoro: forse K , se lo abbandoniamo alle forze del campo, da R ad A ci va da solo. Fermiamoci un attimo su questo esempio: un sasso si trova sul terreno in una certa posizione A . Che cos’è la sua energia potenziale gravitazionale rispetto al riferimento R posto sulla verticale per A a 30 m d’altezza? Secondo la definizione di cui sopra, è il lavoro «che dobbiamo compiere contro la forza peso per spostarlo da R ad A ». Se non precisiamo «senza variazione dell’energia cinetica» diciamo una cosa ben strana, perché è chiaro che, se lo lasciamo fare, il sasso da R ad A ci va per conto suo. Dicendo «senza variazione dell’energia cinetica» diciamo invece una cosa giusta, perché se nello spostamento da R ad A il lavoro della forza peso è, in una data opportuna unità, 100, allora, per portarlo da R in A senza variazione dell’energia cinetica noi dovremmo compiere un lavoro -100 , che è effettivamente l’energia potenziale del sasso in A rispetto a R . Ma -100 non è forse il lavoro compiuto dal peso se il sasso si sposta da A , dove si trova, a R ? E allora non era tanto più semplice dire che l’energia potenziale gravitazionale del sasso in A rispetto a R è il lavoro che la forza peso compirebbe se il sasso si spostasse (venisse spostato) da A fino a R ?

Alcuni anni fa, nel libro *100 errori di Fisica*, mi sono accalorato a proporre le seguenti definizioni di energia potenziale. Definizione estesa (introduttiva, per principianti): l’energia potenziale (gravitazionale, elettrica, ecc.) di un corpo K nella posizione A rispetto al riferimento R è il lavoro che le forze del campo (gravitazionale, elettrico, ecc.) compirebbero in relazione a un eventuale spostamento di K , lungo un

¹ In data 19 luglio 2010 uno studente che non conosco (o forse un ‘amatore’, ce n’è uno stuolo) mi scrive per email: «Prendo in considerazione due cariche puntiformi uguali e di segno contrario e, per semplicità, lontane da 'tutto'. È noto che se esse orbitano attorno al loro comune centro di massa, l’energia meccanica sarà negativa, crescente con dimensione dell’orbita e massima ($= 0$) all’infinito. Il segno meno e lo zero all’infinito sono legati solo alla convenzione di far assumere il valore zero alla costante di integrazione che definisce l’energia potenziale; il fatto oggettivo è che l’energia meccanica dello stato legato è crescente con le dimensioni dell’orbita e proporzionale a $-1/r$. La domanda è: ma perché il sistema formato dalle due cariche quando si trovano all’infinito dove l’energia cinetica è nulla e la potenziale pure (a meno della costante) dovrebbe avere maggiore energia meccanica che in un qualunque altro stato legato dove l’energia cinetica e potenziale sono non nulle? Spero di essermi spiegato».

percorso qualsiasi, da A a R . Definizione breve (professionale): l'energia potenziale è il lavoro eventuale delle forze conservative. Perché chiamare «energia» tale lavoro? Perché se il lavoro viene effettivamente compiuto, compare la relativa variazione dell'energia cinetica: in più se il lavoro è positivo, in meno se il lavoro è negativo. Dunque, l'energia potenziale, positiva o negativa, altro non è che una potenziale variazione, in più o in meno rispettivamente, dell'energia cinetica. Ci può essere un discorso più semplice e, al tempo stesso, più rigoroso?

Ancora un'osservazione. Il termine «variazione», che qui sopra credo di aver usato in modo non ambiguo, può risultare molto ambiguo in altri contesti. Il teorema dell'energia cinetica viene in genere enunciato in questi termini: la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze. E il teorema dell'energia potenziale viene così enunciato: la variazione dell'energia potenziale è uguale al lavoro delle forze conservative. «Variazione» in che senso? Valore iniziale meno valore finale, oppure valore finale meno valore iniziale?

Meglio sarebbe esprimersi così: l'*aumento* dell'energia cinetica è uguale al lavoro di tutte le forze applicate (dove «aumento» non significa che l'energia cinetica sia necessariamente aumentata, ma che la variazione è valutata come differenza tra valore finale e valore iniziale: in tal modo, se tale differenza è positiva l'aumento è positivo, cioè è effettivamente un aumento); la *diminuzione* dell'energia potenziale è uguale al lavoro delle forze conservative (dove «diminuzione» significa differenza tra valore iniziale e valore finale).

Tutto ciò porta immediatamente a una ben nota conclusione: se per caso il lavoro è compiuto solo da forze conservative, allora l'aumento dell'energia cinetica è uguale alla diminuzione dell'energia potenziale: di tanto aumenta (o diminuisce) l'una, di altrettanto diminuisce (o aumenta) l'altra. E la somma delle due, l'energia totale, resta immutata.

Si noti che questa 'regola' di conservazione (che non chiamo 'legge' per quanto spiegato al capitolo 5) *non richiede affatto che tutte le forze applicate siano conservative*. Se noi lasciamo scendere a valle una sfera rigida lungo un piano inclinato, in assenza di attrito radente la sfera scivolerebbe senza ruotare. L'attrito invece contrasta lo scivolamento della sfera costringendola a ruotare (si veda la relativa discussione alla pag.128): se la pendenza non è troppo forte, o se c'è abbastanza attrito in relazione alla pendenza, la sfera rotola senza strisciare. Ciò significa che il 'punto' della sfera che si trova a contatto del piano d'appoggio – e sul quale agisce la forza d'attrito – ha velocità zero, cosicché la forza d'attrito radente *non compie lavoro* e l'energia totale si conserva.

(continua)

18. LETTURA AMENA n.4

Da Tonzig, *Semplicemente fisica*, cap.10 (“Reazioni vincolari”)

...Ed ora un problemino intrigante, che chiameremo il problema dell’armadio: vogliamo spostare un armadio tirandolo verso di noi con una forza $\vec{F}$ orizzontale come in fig.5. Sfortunatamente, a causa del grande peso dell’armadio c’è molto attrito, e l’attrito statico massimo è più grande della forza che noi siamo in grado di applicare^[1]: l’equilibrio alla traslazione è dunque assicurato (niente spostamento dell’armadio). Ma c’è sempre il pericolo che l’armadio si ribalti dal lato da cui lo stiamo tirando (con qualche pericolo per la nostra incolumità): a quali condizioni deve soddisfare la forza applicata $\vec{F}$ se vogliamo che ciò non accada?

Chiaramente, devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio alla rotazione attorno al possibile asse di rotazione (in fig.5 l’asse per C perpendicolare alla pagina): dunque $\vec{F}$ non deve essere troppo grande, e non deve essere applicata troppo in alto. Se vogliamo essere più precisi, siamo costretti a schematizzare, l’armadio è una cosa troppo complicata: sostituiamolo (fig.5) con un blocco rigido omogeneo a forma di parallelepipedo.

Le forze in gioco sono la forza $\vec{F}$, il peso $\vec{P}$ e la reazione vincolare $\vec{R}$ proveniente dal pavimento, col suo componente verticale $\vec{V}$ (che in condizioni di equilibrio neutralizza il peso) e col suo componente orizzontale $\vec{A}$ (forza d’attrito che contrasta, e in questo caso impedisce, lo strisciamento del blocco). Prima che la forza $\vec{F}$ venga applicata, la forza d’attrito è zero e la reazione verticale $\vec{V}$ (risultante di tutta una distribuzione di forze applicate alla base del blocco) agisce lungo la retta d’azione del peso (che qui siamo autorizzati a pensare, vedi cap.7, come una forza applicata al baricentro).

Quando applichiamo la forza $\vec{F}$ compare la reazione orizzontale d’attrito e se, come nel disegno, $\vec{F}$ è applicata più in alto del baricentro (ad altezza cioè $h > H$), la reazione verticale $\vec{V}$ si sposta in avanti (in fig.5 verso destra) quanto occorre perché la somma dei tre momenti (quello di $\vec{P}$, quello di $\vec{F}$ e quello di $\vec{V}$) rispetto all’asse per C resti uguale a zero: il momento di $\vec{F}$ è aumentato ma quello di $\vec{V}$ diminuisce di altrettanto. Se ora applichiamo la $\vec{F}$ più in alto o se, a pari posizione, ne aumentiamo il valore, la reazione $\vec{V}$ si avvicina ulteriormente a C e l’equilibrio alla rotazione è ancora salvo. La situazione limite è quando $\vec{V}$ è applicata proprio in C , quando cioè il suo momento è zero e quindi risulta $Fh = PR$. Se il prodotto Fh aumenta ulteriormente il blocco si ribalta.

Tutto qui, il problemino? No, la domanda perfida arriva adesso. Se il blocco entra in rotazione il suo centro di massa abbandona lo stato di quiete prendendo velocità verso l’alto e verso destra: chi lo accelera verso l’alto, se la reazione verticale $\vec{V}$ fa equilibrio al peso? Chi lo accelera verso destra se, per ipotesi, la reazione orizzontale d’attrito fa equilibrio a $\vec{F}$? Il lettore non si privi della soddisfazione di trovare la soluzione: potrà poi confrontare la sua risposta con quella qui messa in nota^[2].

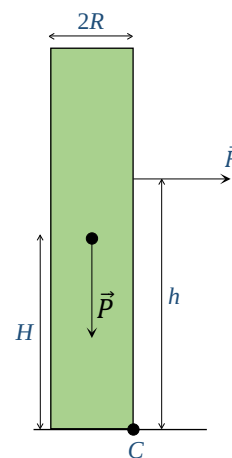


Fig.5

¹ Promemoria: la forza d’attrito radente statico può variare da zero fino a un valore massimo proporzionale alla forza premente (la forza con la quale ognuna delle due superfici a contatto preme sull’altra). Il coefficiente di proporzionalità dipende dalle caratteristiche delle due superfici (tipo di materiale, grado di levigatezza).

² Dall’istante in cui Fh supera il valore limite, lo spigolo per C diventa a tutti gli effetti una cerniera: al blocco viene impedito di strisciare in avanti ma viene imposto di ruotare attorno allo spigolo, cosicché dal vincolo provengono le forze che tale movimento consentono. Se il blocco deve ruotare, il centro di massa deve accelerare verso l’alto e verso destra: ciò è possibile solo se aumenta il valore della reazione verticale $\vec{V}$ (così la forza verticale risultante è diretta verso l’alto) e diminuisce quello della reazione d’attrito statico $\vec{A}$ (così la forza orizzontale risultante è diretta verso destra).