Capitolo 2

Dilatazione termica

1. Le dimensioni di un corpo – solido, liquido o gassoso che sia – dipendono sia dalle forze che su di esso agiscono, sia dalla temperatura. A pari temperatura, il volume dei solidi e dei liquidi è molto poco sensibile alle variazioni di pressione (*incomprimibilità delle fasi condensate*), mentre il volume dei gas può ritenersi inversamente proporzionale alla pressione. A parità invece di pressione, accade praticamente sempre che il volume dei corpi aumenti col crescere della temperatura. Le poche eccezioni riguardano intervalli di temperatura molto ristretti, ed esclusivamente materiali solidi e liquidi: l'eccezione più importante è quella del liquido acqua, che riscaldato da 0 °C a 4 °C si contrae, per poi dilatarsi regolarmente se la temperatura aumenta ancora[1].

2. Al crescere della temperatura aumenta quindi, in generale, la distanza media tra le particelle costitutive dei corpi. Per le fasi condensate (solidi e liquidi) ciò può essere spiegato col fatto che aumenta, al crescere della temperatura, l'ampiezza di vibrazione delle particelle[2], e col fatto che la dipendenza delle forze interatomiche (o intermolecolari) dalla distanza è tale per cui *una maggior ampiezza di vibrazione implica necessariamente un aumento della distanza media*. Ciò risulta subito chiaro se ci limitiamo a considerare l'effetto dell'interazione tra due atomi (o due molecole) adiacenti: quando, a partire dalla distanza di equilibrio d_0 (in corrispondenza della quale la forza di interazione è zero e la velocità delle particelle in vibrazione è massima) le particelle si allontanano, la forza di interazione è attrattiva e aumenta con la distanza (fino a un massimo, poi va rapidamente a zero); se invece le particelle si avvicinano, la forza di interazione è repulsiva, e cresce col diminuire della distanza. Si consideri ora la fig. 1: se, attorno alla

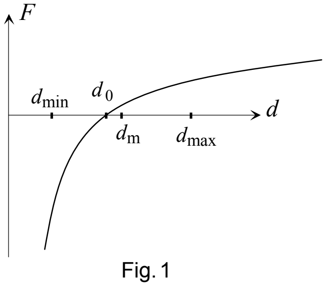

Fig. 1

[1] Se quindi raffreddiamo l'acqua a partire dai 4 °C, l'acqua più fredda – più leggera a parità di volume – andrà a galleggiare sopra l'acqua più calda. Ciò ha importanti conseguenze in natura: nei mari, nei laghi, nei corsi d'acqua, l'acqua che, al sopraggiungere dell'inverno, gela per prima è quella posta in superficie, e il ghiaccio così formatosi «isola», dal punto di vista termico, l'acqua sottostante dall'aria fredda, permettendole di mantenersi allo stato liquido (condizione indispensabile alla sopravvivenza degli organismi vegetali e animali).

[2] Se schematizziamo la forza su una particella come elastica (e quindi il moto della particella come armonico), troviamo che la pulsazione $\omega = \sqrt{(k/m)}$ è indipendente dall'ampiezza, mentre un aumento dell'energia cinetica media di vibrazione ($m\omega^2 A^2/4$) implica un aumento dell'ampiezza A.

distanza di equilibrio d_0, il grafico avesse un andamento lineare (tipo forza elastica), l'azzeramento della velocità richiederebbe, in avvicinamento come in allontanamento, una uguale variazione della distanza. Viceversa, *la forza repulsiva varia con la distanza più rapidamente della forza attrattiva*: e conseguentemente il lavoro resistente di azzeramento della velocità viene compiuto dalla forza repulsiva su uno spostamento più breve[3]. Per tale motivo, la distanza media d_m è *maggiore* della distanza di equilibrio d_0: e si comprende subito, osservando la figura, che la differenza è tanto maggiore quanto più grande è l'ampiezza di vibrazione. Di qui, l'aumento della distanza media con la temperatura.

3. Per i gas invece l'aumento del volume è conseguenza del fatto che, aumentando la velocità quadratica media delle molecole, la pressione $p = \rho v^2_{qm}/3$ del gas (si veda il punto 2 del cap. 4) può restare invariata − come richiede la nostra ipotesi di dilatazione sotto pressione costante − solo se, con l'aumento della distanza media tra molecole adiacenti, diminuisce la densità ρ (e con essa la frequenza degli urti delle molecole contro le pareti del recipiente).

4. Mentre per i solidi la dilatazione termica può essere studiata sia come dilatazione «lineare» (aumento delle lunghezze), sia come dilatazione di superficie, sia come dilatazione di volume, per i fluidi le dilatazioni lineari e di superficie sono condizionate dalla dilatazione subita dal contenitore, per cui la dilatazione termica può essere studiata solo come dilatazione di volume.[4]

5. In ogni caso, le variazioni della temperatura possono produrre effetti di dilatazione o contrazione *molto superiori* a quelli normalmente ottenibili per via meccanica: cosicché, contrastare per via meccanica le deformazioni dovute a variazioni di temperatura può in pratica risultare impossibile.[5] Per tale motivo, *nelle strutture soggette a variazioni di temperatura possono prodursi stati di grande sforzo meccanico*, con effetti di deformazione permanente o anche di rottura.[6]

---

[3] In fig. 1 l'uguaglianza dei due lavori (quello della forza repulsiva e quello della forza attrattiva) è espressa dal fatto che l'area compresa tra il grafico e l'asse delle distanze è uguale nell'intervallo tra d_{min} e d_0 e nell'intervallo tra d_0 e d_{max}.

[4] Per un gas, anche le variazioni di volume sono di per sé legate alla dilatazione del contenitore (necessariamente chiuso). Ma noi qui ci stiamo riferendo al caso in cui il gas si dilati *sotto pressione costante*: possiamo immaginare ad esempio che il contenitore sia un cilindro ad asse verticale, chiuso superiormente da un pistone scorrevole sul quale grava un carico di valore costante.

[5] Ad esempio, l'acqua può restare liquida fino a 374 °C purché venga esercitata su di essa una pressione di almeno 218 atm. In tali condizioni il volume dell'acqua risulta, nonostante l'enorme valore della pressione, *più che triplo* rispetto al volume normale (1 cm^3 a grammo).

[6] Se riscaldato o raffreddato bruscamente e in modo non omogeneo, un bicchiere di cristallo va in frantumi. Le rotaie devono potersi liberamente allungare, altrimenti nelle giornate di grande caldo (o semplicemente al passaggio del treno) subirebbero deformazioni tali da mettere fuori uso la linea ferroviaria. Lo stesso dicasi per la struttura metallica di un ponte. La cerchiatura delle botti e delle ruote dei carretti viene fatta a caldo: raffreddandosi, il cerchio metallico «si ritira» esercitando una forte compressione sul legno sottostante.

6. Per i solidi, le variazioni $L-L_0$ subite da una lunghezza L_0 quando la temperatura varia da zero a θ sono ovviamente proporzionali a L_0 (una lunghezza iniziale tripla subirà un allungamento triplo), e possono ritenersi proporzionali a θ (e cioè alla variazione subita dalla temperatura) *purché tale variazione non sia troppo grande*. Risulterà cioè, con approssimazione tanto migliore quanto più piccolo è θ,

[A] $$L-L_0 = \lambda L_0\theta \quad\rightarrow\quad L = L_0(1+\lambda\theta) \quad\rightarrow\quad L''-L' = \lambda L_0(\theta''-\theta')$$

dove il valore della costante λ (**coefficiente di dilatazione lineare**) dipende dal particolare materiale considerato: le dimensioni di λ sono quelle del reciproco di una temperatura. Si noti che, strettamente parlando, L non è in realtà funzione lineare di θ (come indicato dalle relazioni [A]), ma cresce più rapidamente di θ: a norma delle [A] l'allungamento $L''-L'$ dovrebbe essere sempre uguale, a pari variazione di temperatura, qualunque sia la temperatura iniziale θ', ma in realtà cresce lentamente al crescere di θ'. L'errore che in tal modo si introduce è però quasi sempre trascurabile.

Si vede subito che $\lambda = (L-L_0)/L_0\theta$ rappresenta l'*allungamento specifico*, vale a dire l'allungamento per unità di lunghezza e per unità di variazione di temperatura (ad esempio, i metri di lunghezza – in più o in meno – per ogni metro di lunghezza iniziale e per ogni grado Celsius di variazione della temperatura). Nel Sistema Internazionale, il valore di λ è in genere dell'ordine dei centomillesimi (il che corrisponde a 1 mm di allungamento a metro quando la temperatura sale da 0 a 100 °C)

7. Normalmente i materiali a struttura cristallina non sono isotropi rispetto alla dilatazione termica, il che significa che il coefficiente λ ha, per uno stesso materiale, valori diversi nelle diverse direzioni: così, una sfera d'acciaio fortemente raffreddata o riscaldata non è più esattamente una sfera. Una sfera di vetro manterrebbe invece la sua forma, essendo il vetro privo di struttura cristallina (materiale «amorfo»).

8. In modo del tutto analogo possiamo descrivere le variazioni subite, per effetto di una variazione di temperatura, dall'area S della superficie di un solido isotropo in questi termini:

[B] $$S-S_0 = 2\lambda S_0\theta \quad\rightarrow\quad S = S_0(1+2\lambda\theta)$$

dove 2λ rappresenta il **coefficiente di dilatazione di superficie**. Si consideri infatti un quadrato il cui lato è L_0 a temperatura zero. Quando la temperatura è θ, il lato è $L = L_0\,(1+\lambda\theta)$, e quindi l'area è $S = L^2 = L_0^2\,(1+\lambda\theta)^2 = L_0^2\,(1+2\lambda\theta+\lambda^2\theta^2) \approx$ $\approx S_0\,(1+2\lambda\theta)$, avendo trascurato il termine $\lambda^2\theta^2$ in rapporto agli altri due termini entro la parentesi: ciò è giustificato dal fatto che il valore di $\lambda\theta$ è normalmente molto inferiore all'unità, cosicché il quadrato di $\lambda\theta$ è molto piccolo in rapporto a $\lambda\theta$ (ad esempio, con $\lambda = 10^{-5}$ °C^{-1} e $\theta = 1000$ °C, risulta $\lambda\theta = 1/100$, $\lambda^2\theta^2 =$ $= 1/10000$).

9. Per la dilatazione termica di un solido in tre dimensioni scriveremo analogamente, con errore del tutto trascurabile,

[C] $V - V_0 = 3\lambda V_0 \theta \quad \rightarrow \quad V = V_0 (1 + 3\lambda\theta)$

dove 3λ è il **coefficiente di dilatazione di volume**.

10. Il volume dei liquidi varia di solito, al variare della temperatura, molto più rapidamente di quello dei solidi: il valore del coefficiente di dilatazione (di volume) è infatti normalmente dell'ordine dei decimillesimi anziché dei centomillesimi (il che significa che, a parità di ogni altra condizione, l'aumento di volume di un liquido è orientativamente dieci volte superiore a quello di un solido). Il fatto che, in un normale termometro domestico, la colonnina di mercurio nel capillare di vetro si allunghi al crescere della temperatura, indica chiaramente che il volume del mercurio cresce più rapidamente di quello del contenitore di vetro.

11. La dilatazione termica dei gas viene studiata nel prossimo capitolo. Come si vedrà, i diversi gas hanno tutti, dal punto di vista della dilatazione termica, un comportamento assai simile: si può infatti ritenere che per tutti i gas − purché non troppo compressi e non troppo freddi − il coefficiente di dilatazione termica di volume abbia uno stesso valore: $1/273{,}15 \approx 3{,}66 \times 10^{-3}$. È un valore il cui ordine di grandezza (millesimi) è circa 10 volte superiore a quello che riguarda i liquidi, e circa 100 volte superiore a quello che riguarda i solidi.

QUESITI E PROBLEMI

1 Il coefficiente termico di dilatazione lineare viene definito per i solidi, ma non per i fluidi (liquidi e gas). Per quale ragione?

2 Se, in un termometro a mercurio, il mercurio e il vetro si comportassero, rispetto alla dilatazione termica, esattamente nello stesso modo, il termometro non potrebbe funzionare (*vero/falso*).

3 Il coefficiente termico λ di dilatazione lineare dell'acciaio vale $1{,}2 \times 10^{-5}$ °C^{-1}. Di quanto deve aumentare la temperatura di un filo d'acciaio, avente a 0 °C lunghezza $L_0 = 1$ m, per allungarsi di 1 mm?

4 Due sbarre dello stesso materiale hanno uguale lunghezza ma diversa temperatura. Se subiscono entrambe una stessa variazione di temperatura, quale delle due subirà un allungamento maggiore? La più fredda o la più calda?

5 Se una piastra forata viene riscaldata, il diametro del foro aumenta o diminuisce?

6 Alla temperatura di 0 °C un rettangolo ha base b_0 e altezza h_0. Con riferimento a un processo di riscaldamento fino a temperatura θ, e alla conseguente dilatazione termica, si chiarisca che cosa rappresentano le grandezze $2\lambda b_0 h_0 \theta$ e $b_0 h_0 \lambda^2 \theta^2$.

7 Una piastra metallica isotropa, per la quale il coefficiente di dilatazione termica lineare è $\lambda = 10^{-5}$ °C^{-1}, ha la forma di un quadrato, con lato $L_0 = 1$ m a 0 °C. Quale sarà, per un aumento di temperatura di 100°C, l'aumento *effettivo* dell'area della piastra? A quanto ammonta l'errore che si commette calcolando l'aumento dell'area del quadrato con la formula $S - S_0 = 2\lambda S_0 \theta$?

8 Alla temperatura di 0 °C un cubo metallico isotropo, per il quale il coefficiente di dilatazione termica lineare è $\lambda = 10^{-5}$ °C^{-1}, ha lato $L_0 = 1$ m. Quale sarà, per un aumento di temperatura di 100 °C, l'aumento *effettivo* del volume? A quanto ammonta l'errore che si commette calcolando l'aumento del volume con la formula $V - V_0 = 3\lambda V_0 \theta$?

9 Il volume di un solido isotropo K aumenta da 8000 a 8360 cm^3 a seguito di un riscaldamento da 0 a 150 °C. Indicati con A, B, C tre punti non allineati del solido in questione, si determini quanto valeva l'area del triangolo ABC a 0 °C, sapendo che a 150 °C il valore di tale area è 52 cm^2.

RISPOSTE

1 Le dilatazioni lineari e di superficie dei fluidi sono condizionate dalla dilatazione subita dal contenitore entro il quale i fluidi sono necessariamente confinati. Per una massa liquida, ad esempio, possiamo supporre che le variazioni del volume avvengano liberamente, ma è chiaro che, per un dato aumento del volume, l'aumento dell'altezza è tanto maggiore quanto meno il contenitore si

dilata in direzione orizzontale: e in ogni caso l'aumento percentuale delle lunghezze sarà *diverso* nelle diverse direzioni. Per un gas, anche le variazioni di volume, oltre a quelle lineari e di superficie, sono legate alla dilatazione del contenitore, essendo questo necessariamente chiuso e completamente riempito dal gas: ma se vogliamo studiare le variazioni di volume di origine puramente termica, dobbiamo considerare processi di riscaldamento *sotto pressione costante* (il contenitore dovrà perciò essere chiuso da un pistone mobile sul quale grava un carico costante, in modo che le variazioni di volume dal gas dipendano solo dalle variazioni della temperatura, non da variazioni della pressione).

2 Vero. Il mercurio non sarebbe costretto a risalire nel capillare di vetro per potersi dilatare: al variare della temperatura, l'indicazione del termometro resterebbe pertanto sempre la stessa.

3 L'allungamento ΔL subìto dal filo quando la sua temperatura subisce l'incremento $\Delta\theta$ è $\Delta L = \lambda L_0 \Delta\theta$. Posto $\Delta L = 10^{-3}$ m, $\lambda = 1{,}2\times10^{-5}$ °C^{-1}, $L_0 = 1$ m, si ottiene $\Delta\theta = 83{,}3$ °C.

4 La più fredda. A pari temperatura questa sbarra avrebbe lunghezza maggiore dell'altra, in particolare avrebbe lunghezza maggiore allo zero Celsius: essendo allora, per la sbarra più fredda, L_0 maggiore e λ uguale, per una stessa variazione $\Delta\theta$ della temperatura sarà più grande l'allungamento $\Delta L = \lambda L_0 \Delta\theta$.

5 Aumenta, esattamente nello stesso rapporto in cui aumenta (se il materiale è isotropo) ogni altra lunghezza nell'ambito della piastra: lo spessore, i lati, la distanza tra due punti, la circonferenza del foro, ecc. In caso contrario la forma della piastra risulterebbe alterata, cosa che invece non si verifica: la dilatazione termica di un solido isotropo è come un ingrandimento fotografico.

6 La grandezza $2\lambda b_0 h_0 \theta$ corrisponde all'area complessiva di due rettangoli: il rettangolo A (fig.2), di base b_0 e altezza $h-h_0 = h_0\lambda\theta$, rappresenta la variazione che subirebbe il rettangolo di partenza se, col riscaldamento da 0 a θ, aumentasse solo l'altezza; il rettangolo B, di base $b-b_0 = b_0\lambda\theta$ e altezza h, rappresenta analogamente la variazione che subirebbe il rettangolo di partenza se aumentasse solo la base. Il termine $b_0 h_0 \lambda^2\theta^2$ è l'area di un rettangolo C di base $b-b_0$ e altezza $h-h_0$. L'area complessiva dei rettangoli A, B e C, sommata all'area del rettangolo di partenza, dà l'area del rettangolo finale (base b e altezza h).

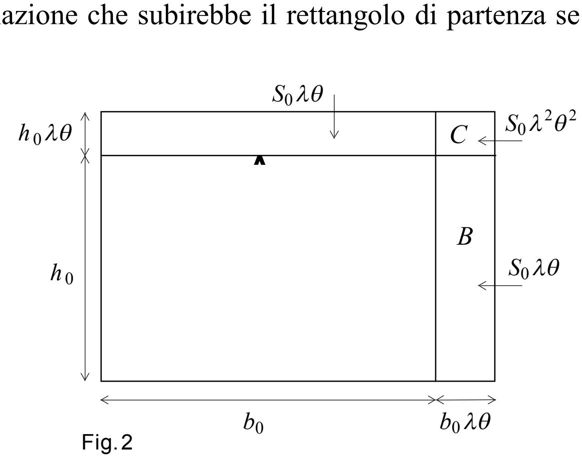

Fig. 2

7 Il quadrato finale è costituito dal quadrato iniziale + una striscia rettangolare di base 1

m e altezza 1 mm + una striscia rettangolare di base 1 mm e altezza 1 m + un quadratino di lato 1 mm. L'area effettiva del quadrato finale è pertanto 1 m^2 + 1000 mm^2 + 1000 mm^2 + 1 mm^2 = 1 002 001 mm^2 . Scrivendo $S - S_0 =$ $= 2\lambda S_0 \theta$, cioè $S = S_0(1+2\lambda\theta)$, si trascura l'area del quadratino, si trascura quindi 1 mm^2 su oltre un milione.

8 Il cubo finale sarà costituito (fig. 3, dove chiaramente le proporzioni non sono rispettate) da un cubo di lato 1 m (il cubo iniziale) + tre «lastre» quadrate (di lato 1 m e spessore 1 mm) + 3 «sbarre» (di lunghezza 1 m e sezione quadrata di lato 1 mm) + un cubetto di lato 1 mm. Il volume del cubo finale sarà pertanto
$V = (10^9 + 3\times 10^6 + 3\times 10^3 + 1)\,mm^3$.
Se scriviamo $V - V_0 = 3\lambda V_0 \theta$ trascuriamo il volume delle tre sbarre e del cubetto, quindi si trascurano 3001 mm^3 su un totale di 1 003 003 001, con un errore inferiore a 3 su un milione.

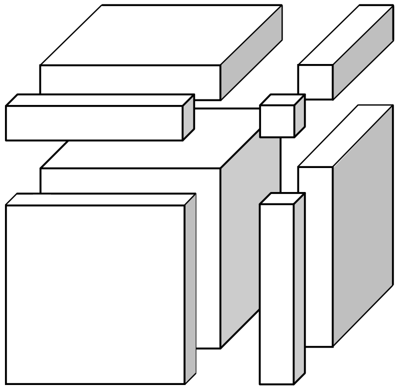

Fig. 3

9 Il coefficiente di dilatazione è
$3\lambda = (V - V_0)/V_0\theta = (8360 - 8000)\,mm^3\ /\ (8000\ mm^3 \times 150\ °C) =$
$3\times 10^{-4}\ °C^{-1}$. Perciò $\lambda = 10^{-4}\ °C^{-1}$, e quindi dalla $S = = S_0(1+2\lambda\theta)$ si trae 52 $cm^2 = S_0(1 + 2\times 10^{-4} \times 150) = 1{,}03\, S_0$. Risulta in definitiva $S_0 = (52/1{,}03)$ $cm^2 = 50{,}5\ cm^2$.