

f) Sappiamo (pag. 47) che una trasformazione **politropica** è una trasformazione reversibile nel corso della quale il calore molare C si mantiene costante^[4]. Si vedrà in seguito (pag. 111) che per un gas perfetto l'equazione di una politropica in coordinate p, V è $pV^\alpha = k$, dove k è una costante positiva e dove il numero α corrisponde al rapporto $(C - C_p)/(C - C_v)$.

Il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione politropica è quindi

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V^\alpha} dV. \text{ Se } \alpha = 1, \text{ la trasformazione è un'isoterma e il lavoro}$$

è espresso dalla [C]. Se $\alpha \neq 1$ il calcolo dell'integrale dà $L = \left[\frac{kV^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{V_1}^{V_2}$, ed es-

sendo $k = pV^\alpha$ possiamo scrivere

$$[E] \quad L = \left[\frac{pV^\alpha V^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{V_1}^{V_2} = \left[\frac{pV}{-\alpha+1} \right]_1^2 = \frac{\Delta(pV)}{1-\alpha} = \frac{nR\Delta T}{1-\alpha}.$$

Si osservi che un'isobara non è altro che una politropica di indice $\alpha = 0$, e un'isocora reversibile è una politropica di indice ∞ (infatti elevando alla $1/\alpha$ nella $pV^\alpha = k$ si ottiene $p^{1/\alpha}V = \text{cost}$, relazione che per $\alpha = \infty$ diventa $V = \text{cost}$).

4. Prima osservazione. L'espressione $\delta L = p dV$, che noi riferiremo sempre a trasformazioni reversibili, o a trasformazioni reali di tipo quasistatico, potrebbe di per sé riferirsi anche a trasformazioni non quasistatiche: il simbolo p dovrebbe allora indicare la pressione *media* del gas (rapporto tra la forza esercitata dal gas sulla parete mobile perpendicolarmente alla parete e l'area della parete). Tale espressione non potrebbe essere di alcuna utilità nel calcolo del lavoro del gas, non esistendo in questo caso alcuna precisa correlazione matematica tra pressione (media) e volume.

5. Seconda osservazione. Contrariamente a quanto l'espressione $\delta L = p dV$ potrebbe suggerire, un gas può compiere lavoro *anche indipendentemente da variazioni del suo volume*: si pensi ad esempio al lavoro resistente compiuto dall'aria sulle pale di un ventilatore, oppure al lavoro motore del vento sulle pale di un mulino o di una centrale eolica, oppure al lavoro motore compiuto dall'aria quando un palloncino viene portato in alto dalla spinta di Archimede. Con opportuni adattamenti, l'espressione $\delta L = p dV$ rimane valida: va riferita infatti tanto alla spinta che il gas esercita nella direzione del moto quanto alla spinta contemporaneamente esercitata dal gas nella direzione opposta. Chiaramente, il termine dV non rappresenta più la variazione del volume. Si consideri ad esempio il caso del palloncino: la pressione dell'aria determina una spinta verso l'alto sulla superficie inferiore del palloncino,

⁴ Si ricordi che il calore molare di una data sostanza può assumere, a seconda delle circostanze, qualsiasi valore tra $-\infty$ e $+\infty$, estremi inclusi.

sia una spinta un po' più piccola verso il basso sulla superficie superiore. Il termine $dV (= S dh$, prodotto dell'area della sezione orizzontale del palloncino per lo spostamento verticale) rappresenta qui il volume «spazzato» dal palloncino nel suo movimento.

6. Terza osservazione. Nelle trasformazioni reali compiono lavoro esterno anche le forze che un fluido esercita tangenzialmente sulle pareti del contenitore (un lavoro uguale e contrario a quello compiuto dalle pareti sul gas): se però consideriamo trasformazioni molto lente, l'intensità delle forze tangenziali è praticamente nulla, ed è senz'altro trascurabile il relativo lavoro^[5].

7. Valutiamo da ultimo il lavoro compiuto, internamente a un gas reale, dalle forze di coesione. Sappiamo che, nell'equazione di Van der Waals, il termine $n^2 A/V^2$ può essere interpretato come la forza di coesione che, in caso di equilibrio, si esercita tra due strati contigui di molecole per unità di area. Se allora ci poniamo nelle condizioni del punto 1, è chiaro che, detta S l'area della sezione trasversale del cilindro, la forza che attrae uno strato verso gli strati sovrastanti e sottostanti è $\frac{n^2 A}{V^2} S$. Quando, nell'ambito di una trasformazione reversibile, il pistone subisce

uno spostamento dh , la distanza tra strati adiacenti subisce complessivamente una variazione uguale allo spostamento del pistone, per cui le forze interne di coesione compiono complessivamente un lavoro

$$[F] \quad \delta L_i = -\frac{n^2 A}{V^2} S dh = -\frac{n^2 A}{V^2} dV$$

dove col segno meno si è tenuto conto del fatto che a un aumento del volume deve corrispondere un lavoro negativo. Quando il volume passa da V_1 a V_2 il lavoro delle forze di coesione è

$$[G] \quad L_i = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{n^2 A}{V^2} dV = n^2 A \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

coincidente con la variazione subita, per effetto della coesione, dal lavoro esterno del gas (si veda la [D]). Ciò poteva prevedersi, tenuto conto del fatto che la forza di coesione fra strati adiacenti per unità di area ($\frac{n^2 A}{V^2} S$) corrisponde alla diminuzione della pressione esercitata sul pistone, e del fatto che lo spostamento complessivo tra strati adiacenti corrisponde allo spostamento del pistone.

⁵ Pro memoria: in condizioni statiche le forze di superficie di un fluido sono sempre ortogonali alla superficie considerata (un fluido in quiete non ha alcuna capacità di opporsi all'effetto di deformazione prodotto dalle forze tangenziali).

QUESITI E PROBLEMI

- 1 Si discuta la seguente asserzione: il lavoro termodinamico è considerato positivo se è il sistema a compierlo sull'esterno, negativo se viene compiuto dall'esterno sul sistema.
- 2 Il lavoro compiuto da un sistema sull'ambiente circostante e il lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema hanno sempre somma zero (*vero/falso*).
- 3 Un fluido può compiere lavoro anche se il suo volume si mantiene costante durante l'intera trasformazione (*vero/falso*).
- 4 Si spieghi in quale eventualità il lavoro compiuto da un gas tra uno stato 1 e uno stato 2 è $L = \int_{V_1}^{V_2} p dV$.
- 5 Se la trasformazione di un gas è descrivibile mediante un'equazione, il lavoro compiuto dal gas è senz'altro dato dall'integrale $\int_{V_1}^{V_2} p dV$ (*vero/falso*).
- 6 Un gas perfetto di volume iniziale $0,03 \text{ m}^3$ viene riscaldato reversibilmente sotto pressione costante $p = 1,35 \times 10^5 \text{ Pa}$ fino al raddoppio del volume. Si determini il lavoro compiuto dal gas.
- 7 Due moli di gas perfetto vengono raffreddate sotto pressione costante da 150 a 25°C . Determinare il lavoro compiuto dal gas.
- 8 Un gas subisce una trasformazione reversibile rappresentata nel piano p, V da un segmento rettilineo: inizialmente è $p_1 = 0,4 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 5 \text{ l}$, alla fine è $p_2 = 1,2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_2 = 1,5 \text{ l}$. Determinare il lavoro compiuto dal gas.
- 9 *In generale, il lavoro compiuto da un gas in relazione alle variazioni del volume dipende anche dalla variabile tempo: a parità, per esempio, di ogni altra circostanza, il solo fatto che il volume cambi lentamente o rapidamente è già sufficiente a modificare il valore del lavoro effettuato (*vero/falso*).
- 10 Calcolare il lavoro compiuto da un gas perfetto che si espande reversibilmente a temperatura costante fino al dimezzamento della pressione. Le condizioni iniziali di pressione e volume sono $p_1 = 2,2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 1,8 \text{ l}$.
- 11 Se sappiamo che, nell'ambito di una trasformazione reversibile, il volume finale di un gas è uguale a quello iniziale, possiamo affermare che il lavoro compiuto dal gas è zero (*vero/falso*).
- 12 Si determini il lavoro compiuto da un gas *reale* che subisce la trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ rappresentata in fig. 3.

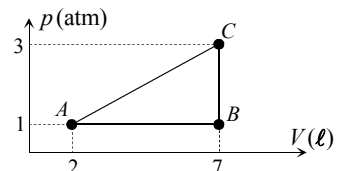


Fig. 3

- 13 Se, alla fine di una trasformazione, il volume di un gas è più grande di quello iniziale, il lavoro che il gas ha complessivamente compiuto in relazione alla variazione del volume è sicuramente positivo (*vero/falso*).
- 14 Un gas reale, inizialmente nello stato A , subisce poi una trasformazione ciclica rappresentata nel piano di Clapeyron (fig. 4) da una circonferenza percorsa in senso antiorario. Determinare il lavoro compiuto dal gas.
- 15 Supponiamo che l'equazione di stato di un non precisato sistema termodinamico sia $pV = AT^3 + BT$, con A e B costanti, e supponiamo che nel corso di una trasformazione isobara il valore della temperatura vari da T_1 a T_2 . Quale lavoro verrebbe compiuto dal sistema in relazione alla variazione del volume?
- 16 Un gas reale subisce una trasformazione di equazione $pV^3 = \text{cost}$. Sapendo che la pressione iniziale è 5×10^5 Pa, e che con la trasformazione il volume aumenta da 1,2 a 1,9 ℓ , determinare il lavoro compiuto dal gas.
- 17 Un gas perfetto monoatomico, che inizialmente occupa un volume di 1,8 ℓ sotto una pressione di 1,3 atm, subisce una compressione adiabatica reversibile fino al dimezzamento del volume. Determinare il lavoro compiuto dal gas.
- 18 *Un certo quantitativo di materiale gassoso è in equilibrio all'interno di un contenitore cilindrico, chiuso superiormente da un pistone che può scorrere senza attrito. A un tratto un blocco viene appoggiato sul pistone (fig. 5), e conseguentemente il volume del gas passa dal valore iniziale V_1 al valore finale $V_2 < V_1$, mentre la pressione passa da p_1 a $p_2 > p_1$. Si dimostri che il lavoro compiuto dal gas è $L = p_2(V_1 - V_2)$.

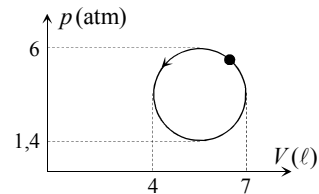


Fig. 4

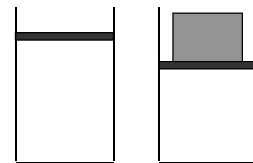


Fig. 5

RISPOSTE

- 1 L'affermazione è priva di senso: il lavoro compiuto dal sistema, vale a dire dalle forze che il sistema esercita su corpi che non fanno parte del sistema, può essere, a seconda dei casi, sia positivo che negativo (si pensi alla spinta di un gas sul pistone di chiusura di un recipiente cilindrico: il lavoro compiuto dal gas è positivo se lo spostamento del pistone ha la stessa direzione della forza, altrimenti è negativo). Analogamente, può risultare sia positivo che negativo il lavoro compiuto sul sistema da parte di forze esterne ad esso applicate.
- 2 Falso: l'affermazione vale *solo per interazioni a contatto*. Ad esempio, hanno sicuramente somma zero il lavoro compiuto da un pistone mobile sul gas con-

tenuto nel cilindro e il lavoro compiuto dal gas sul pistone. Si noti che se il gas venisse rimescolato mediante apposito dispositivo, le pareti del contenitore compirebbero sul gas che scorre su di esse un certo lavoro resistente d'attrito a cui fa riscontro un lavoro d'attrito uguale e contrario da parte del gas (lavoro che chiaramente non si ricollega a spostamenti macroscopici d'assieme a livello delle pareti, ma trova comunque riscontro nell'effetto di riscaldamento prodotto): *il lavoro complessivo delle forze d'attrito su due corpi a contatto è sempre zero*. Se invece lasciamo cadere un sasso, la forza con cui la Terra attrae il sasso compie lavoro, ma la forza uguale ed opposta con cui il sasso attrae la Terra non compie evidentemente alcun lavoro.

- 3 Vero. Se mettiamo in funzione un ventilatore, l'aria contenuta nella stanza compie un lavoro resistente senza che il suo volume subisca variazioni. Scaldando l'aria (o l'acqua) possiamo produrre una corrente convettiva ascensionale capace di mettere in moto una ruota a pale: il fluido compie in tal caso un lavoro motore senza alcuna variazione del suo volume. Se affondiamo in acqua un pezzo di legno o un turacciolo, e poi lo lasciamo andare, la spinta di Archimede porta verso l'alto l'oggetto compiendo un lavoro positivo, senza variazione alcuna nel volume del liquido.
- 4 La relazione, che lega l'esecuzione di lavoro *esclusivamente* alle variazioni del volume, vale solo nel caso di trasformazioni reversibili (o schematizzabili come tali), e solo se, come normalmente accade, la pressione si può considerare uguale in tutti i punti della massa gassosa, indipendentemente dalla quota. Se infatti gli stati intermedi sono, a tutti gli effetti pratici, indistinguibili da stati di equilibrio, le forze esercitate dal gas sulle pareti del contenitore sono necessariamente perpendicolari alla superficie su cui agiscono^[6], perciò compiono lavoro solo se una parete si sposta, con conseguente variazione del volume (si pensi al caso tipico del pistone di chiusura di un contenitore cilindrico). Anche lo spostamento di un oggetto all'interno della massa gassosa, senza variazione del volume del gas, non comporta in questo caso (trasformazione reversibile) lavoro da parte del gas: trattandosi per ipotesi di un movimento infinitamente lento, il gas è sempre in equilibrio e quindi non può esercitare forze tangenziali d'attrito ma solo forze di pressione^[7].
- 5 Vero. Il fatto che, attraverso l'equazione, ci si riferisca in modo univoco alla pressione o alla temperatura, senza specificazione di un punto particolare del sistema, significa che, nel corso della trasformazione, la pressione e la temperatura sono in qualsiasi istante uguali per tutti i punti: ciò corrisponde a dire che

⁶ Pro memoria: un fluido in quiete è privo di viscosità, perciò non può restare in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie che non siano perpendicolari alla superficie, e reciprocamente è in grado di esercitare solo forze perpendicolari alla sua superficie.

⁷ Il cui risultante su un oggetto completamente circondato dal gas – la spinta d'Archimede – è peraltro zero per il fatto che per ipotesi la pressione non dipende dalla quota, ed è quindi uguale sia sopra che sotto l'oggetto in movimento.