QUESITI E PROBLEMI

1 Tenuto conto che, quando il volume di un gas reale subisce l'incremento dV, il lavoro compiuto dalle forze intermolecolari di coesione è $\delta L = -n^2 A(\mathrm{d}V)/V^2$, se ne deduca l'espressione dell'energia potenziale associata a tale interazione.

2 Si completi lo schema della sottostante fig. 5 associando a ciascuna delle caselle vuote l'opportuna forma energetica, da scegliersi nell'elenco seguente:
(*a*) energia potenziale interna (dipendente cioè dalle sole interazioni interne)
(*b*) energia cinetica esterna (o «del centro di massa»: energia cinetica che spetterebbe al CM se in esso fosse localizzata l'intera massa del sistema)
(*c*) energia interna
(*d*) energia propria (o intrinseca: l'energia che il sistema possiede indipendentemente da eventuali interazioni con altri sistemi)
(*e*) energia potenziale esterna (dipendente dalle interazioni con altri sistemi)
(*f*) energia cinetica interna (l'energia cinetica complessiva delle particelle del sistema vista nel riferimento del centro di massa).

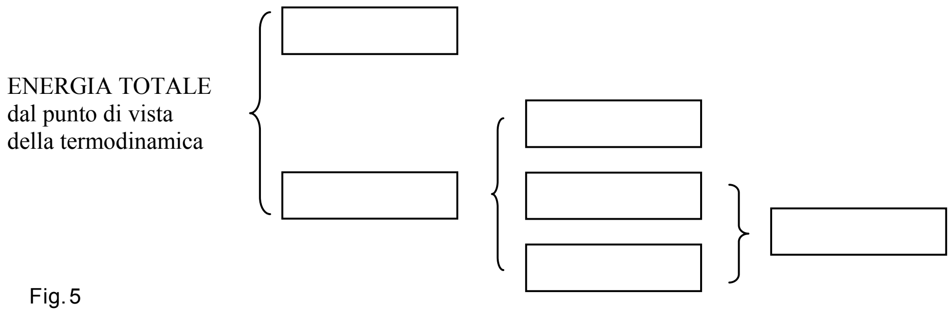

Fig. 5

3 L'energia interna di un sistema termodinamico può presentarsi sia sotto forma macroscopica che sotto forma microscopica (*vero*/*falso*, spiegare).

4 Il primo principio della termodinamica vale solo per trasformazioni reversibili (*vero*/*falso*).

5 * Il bilancio energetico di una trasformazione termodinamica può essere espresso da un'equazione che pone a primo membro la somma $q + L_e + L_i$, dove q è il calore somministrato al sistema (negativo se sottratto al sistema), L_e è il lavoro compiuto dalle forze esterne (quelle che dall'esterno del sistema vengono esercitate sul sistema), L_i il lavoro compiuto dalle forze interne.
(*a*) Che cosa compare a secondo membro di tale equazione?
(*b*) Si spieghi in che modo si passa da tale relazione alla formula (tipica, a livello scolastico, della maggior parte dei problemi di termodinamica) $q = L + \Delta U$ (dove U rappresenta la somma dell'energia termica e dell'energia potenziale microscopica interna).

(c) Supponiamo che il primo principio venga espresso nella forma $q + L_e = \Delta x$. Che cosa esprimerebbe in tal caso il simbolo x?

6 *Un certo quantitativo d'acqua viene travasato, mediante un tubo di collegamento, da un recipiente a un altro recipiente posto a un livello inferiore (fig. 6). Si scriva nella forma $q + L_e = \Delta U$ il bilancio energetico termodinamico relativo alla trasformazione che porta dallo stato di equilibrio iniziale allo stato di equilibrio finale:
(a) per il liquido, (b) per il sistema contenitori + tubo di collegamento, (c) per il sistema liquido + contenitori + tubo di collegamento, (d) per l'universo.

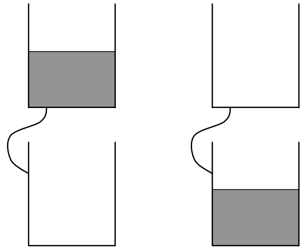

Fig. 6

7 Si dimostri che l'incremento ΔU subìto dall'energia microscopica interna di un gas perfetto in una qualsiasi trasformazione termodinamica (tra stati di equilibrio) si può sempre esprimere nella forma $\Delta U = n C_V \Delta T$, dove n è il numero di moli, C_V il calore molare a volume costante, ΔT l'incremento della temperatura Kelvin (o, equivalentemente, della temperatura Celsius).

8 In una calda giornata estiva la signora Maria, che sta uscendo di casa per andare a fare la spesa, decide di lasciare in funzione il ventilatore, nella speranza di trovare l'appartamento un po' più fresco al ritorno. È una speranza fondata?

9 Come si può esprimere, in funzione delle coordinate di stato iniziali e finali, il calore fornito a un gas perfetto che subisce una trasformazione isoterma?

10 Cinque moli di gas perfetto biatomico sono contenute in un recipiente cilindrico chiuso da un pistone mobile. Posto che la temperatura sia inizialmente 400 °C, che le pareti entro cui il gas è confinato abbiano capacità termica zero e che nessuno scambio di calore sia possibile tra il gas e l'ambiente esterno, si calcoli quanto vale il lavoro compiuto dal gas se, spostando molto lentamente il pistone, il suo volume viene fatto raddoppiare.

11 Un gas di Van der Waals subisce una trasformazione isoterma alla temperatura T passando dal volume V_1 al volume V_2.
(a) Che cosa accade dell'energia interna del gas?
(b) Come si può calcolare il calore da esso assorbito?

12 Un gas perfetto subisce una serie di trasformazioni reversibili: prima un'espansione isoterma, poi una compressione adiabatica, infine una compressione isoterma. Sapendo che il calore complessivamente scambiato dal gas è zero, si spieghi in che modo tale circostanza condiziona la rappresentazione dell'intero processo nel piano di Clapeyron.

13 Che cosa accade della temperatura di un gas perfetto che si espande liberamente nel vuoto? Che cosa accade, nelle stesse circostanze, della temperatura di un gas reale?

14 * La relazione di Mayer stabilisce che, per un gas perfetto, il calore molare a pressione costante si ottiene dal calore molare a volume costante aggiungendo la costante dei gas R. Le trasformazioni di cui qui si parla devono essere necessariamente reversibili?

15 Un certo quantitativo di ammoniaca (NH_3) subisce un'espansione reversibile rappresentata nel piano pV da un segmento rettilineo. Nello stato iniziale è $p_1 =$ $= 2$ atm, $V_1 = 1{,}2\ \ell$. Nello stato finale è $p_2 = 3$ atm, $V_2 = 3\ \ell$. Si determini:
(a) il calore molare medio del gas nella trasformazione,
(b) * il calore molare del gas all'inizio e al termine della trasformazione.

16 Nell'ambito della domanda precedente viene attribuito ad un gas un calore molare finale diverso da quello iniziale. Tutto questo sembra implicare che ad ogni stato del gas possa essere associato un particolare valore del calore molare, caratteristico di quello stato: dobbiamo dunque concepire il calore molare come una funzione di stato?.

17 Si trovi come si corrispondono temperatura e volume, pressione e volume, pressione e temperatura di un gas perfetto nell'ambito di una trasformazione adiabatica reversibile.

18 Si risponda ancora al quesito precedente, facendo però riferimento a un gas reale schematizzato secondo il modello di Van der Waals. Si supponga che anche per un tale gas valga la relazione di Mayer tra calore molare a pressione costante e calore molare a volume costante[9].

19 Nel corso di una certa trasformazione, un gas perfetto monoatomico ha assorbito una quantità di calore tre volte più grande del lavoro compiuto. Si dimostri che la trasformazione potrebbe essere una politropica di indice $-1/3$.

20 Tenuto conto che il lavoro compiuto da un gas durante una trasformazione reversibile descritta dall'equazione $pV^{\alpha} =$ cost., con $\alpha \neq 1$, è $L = \Delta(pV)/(1-\alpha)$, si dimostri che per un gas perfetto che subisce tale trasformazione il calore molare è $C = C_V + R/(1-\alpha) = C_V(\gamma-\alpha)/(1-\alpha)$.

21 Un gas perfetto si espande reversibilmente secondo l'equazione $pV^{\alpha} =$ cost. assorbendo calore. Si dimostri che, se vogliamo che la temperatura finale del gas sia inferiore a quella iniziale, il valore di α deve essere necessariamente compreso tra 1 e $\gamma = C_p/C_V$, estremi esclusi.

[9] Come in realtà si verifica, a meno di un errore normalmente del tutto inapprezzabile.

22 Un gas perfetto triatomico è in equilibrio all'interno di un contenitore cilindrico (fig. 7) chiuso superiormente da un pistone di massa m = 0,5 kg e sezione S = 20 cm^2, scorrevole senza attrito in direzione verticale: sul pistone è appoggiato un blocco di massa M = 19 m. Sapendo che nessuno scambio termico è possibile tra l'interno e l'esterno del cilindro, e assumendo uguale a 10^5 Pa il valore della pressione atmosferica, si determini in quale rapporto aumenta il volume del gas se il blocco viene tolto.

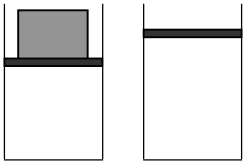

Fig. 7

23 Con riferimento al problema precedente, si supponga che, dopo che il gas ha raggiunto la nuova situazione di equilibrio, con volume superiore a quello iniziale, la massa supplementare M venga posta nuovamente sul pistone.
(a) * Possiamo a priori aspettarci che il pistone recuperi la posizione che aveva prima che il gas venisse lasciato espandere?
(b) Si calcoli il volume del gas nella nuova posizione di equilibrio.

24 Si consideri nuovamente il problema 22, ma si assuma questa volta che le pareti del cilindro siano permeabili al calore. Posto che il volume del gas sia inizialmente V_1 = 1000 cm^3, si trovi quale valore assume il volume del gas quando il blocco viene rimosso, e quanto calore attraversa le pareti del cilindro.

25 Si supponga ora, con riferimento alla situazione descritta al problema precedente, che il blocco venga nuovamente posizionato sul pistone mobile.
(a) * Possiamo aspettarci che il pistone ritorni alla posizione iniziale?
(b) Si calcoli il calore scambiato dal gas nella trasformazione.

26 * Un contenitore cilindrico a pareti adiabatiche, la cui sezione orizzontale interna ha area S, è diviso in due settori (fig. 8) da un pistone adiabatico di massa M, mobile senza attrito in senso verticale. Il settore superiore A contiene n_A moli di un gas perfetto monoatomico in equilibrio a pressione p_A e temperatura T_A, al quale è possibile somministrare calore dall'esterno tramite una resistenza elettrica; il settore inferiore B contiene n_B moli di gas perfetto biatomico in equilibrio a temperatura T_B. Quanto calore occorre fornire al gas contenuto in A, in una trasformazione reversibile, se vogliamo che raddoppi la pressione esercitata dal pistone sul gas B? Si consideri trascurabile la capacità termica del pistone e del contenitore.

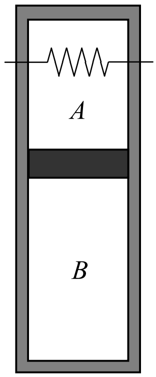

Fig. 8

27 * Un cilindro a pareti adiabatiche è suddiviso in due scomparti, A e B, tramite una paratia interna fissa (fig. 9). Lo scomparto A, delimitato superiormente da un pistone mobile a sua volta adiabatico, contiene n moli di un gas perfetto monoatomico il cui volume può essere fatto variare modificando il carico applicato al pistone. Lo scomparto B contiene $n/2$ moli di un gas perfetto triatomico. Tenuto presente che la paratia interna consente il passaggio di calore e ha, come le pareti del cilindro, capacità termica zero, si trovi come si corrispondono, in una trasformazione reversibile, la pressione e la temperatura del gas contenuto in A.

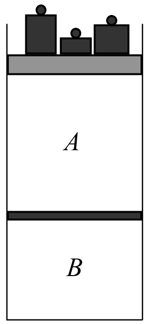

Fig. 9

28 * Con riferimento al problema precedente, si supponga ora che i due gas siano separati da un diaframma che può spostarsi senza attrito, diatermico (conduttore del calore), di massa trascurabile. Come cambierebbe la risposta?

29 * Si consideri nuovamente la situazione descritta al problema 27: si supponga ora che lo scomparto B sia in un primo tempo completamente vuoto, e che a un certo punto nella paratia fissa di separazione venga aperto un foro. Di quanto si abbasserà il pistone? Come varierà la temperatura del gas?

30 Il recipiente A contiene $n_A = 2$ moli di gas perfetto monoatomico a temperatura $T_A = 300$ K, il recipiente B contiene $n_B = 5$ moli di gas perfetto triatomico a temperatura $T_B = 600$ K. Se i due recipienti vengono messi in comunicazione, i due gas si espandono fino ad occupare uniformemente tutto il volume disponibile: quale sarà la temperatura finale del sistema?

RISPOSTE

1 Essendo il lavoro delle forze conservative uguale e contrario all'incremento dell'energia potenziale corrispondente, sarà $\delta L = -n^2 A(\mathrm{d}V)/V^2 = -\mathrm{d}EP$. Pertanto, quando il volume del gas varia da V_1 a V_2 l'energia potenziale associata alla coesione molecolare subisce l'incremento $\Delta EP = EP_2 - EP_1 = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}EP =$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{n^2 A}{V^2}\mathrm{d}V = n^2 A\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

L'energia potenziale, definita come sempre a meno di una costante additiva arbitraria, è quindi $EP = -(n^2 A/V) + \mathrm{cost}$. Se assumiamo che per $V = \infty$ sia $EP = 0$, la costante additiva è zero, e l'energia potenziale, sempre negativa, ha modulo inversamente proporzionale al volume.

2

$$\begin{array}{l} \text{ENERGIA TOTALE} \\ \text{dal punto di vista} \\ \text{della termodinamica} \end{array} \begin{cases} \text{POTENZIALE ESTERNA} \\ \text{PROPRIA} \begin{cases} \text{CINETICA ESTERNA} \\ \left.\begin{array}{l} \text{CINETICA INTERNA} \\ \text{POTENZIALE INTERNA} \end{array}\right\} \text{ENERGIA INTERNA} \end{cases} \end{cases}$$

3 Vero. L'energia cinetica macroscopica interna è associata al moto ordinato, collettivo delle particelle costitutive, così come appare nel riferimento del centro di massa[10]; l'energia cinetica microscopica interna (spesso denominata *energia termica*) è invece associata al moto disordinato, individuale, statisticamente nullo (la somma vettoriale delle velocità è dappertutto e in ogni istante uguale a zero) dell'agitazione termica delle particelle.

L'energia potenziale macroscopica interna è associata a interazioni tra parti macroscopiche del sistema, e varia in funzione di spostamenti coordinati e macroscopici delle particelle (ad esempio, potrebbe essere l'energia potenziale elastica del sistema costituito da due blocchi collegati da una molla); l'energia potenziale microscopica interna è associata all'interazione di ogni particella costitutiva con le particelle circostanti, e a variazioni delle relative distanze.

L'energia interna U di cui tipicamente si parla a proposito di trasformazioni termodinamiche (si pensi al primo principio nella forma $q = L + \Delta U$) è energia cinetica e potenziale alla scala microscopica.

4 Falso. Il primo principio della termodinamica stabilisce che, quando l'energia di un sistema isolato risulta non conservata a livello macroscopico, è invece sempre conservata se nel bilancio si include l'energia microscopica. Tale idea di conservazione si riferisce a *qualsiasi* tipo di trasformazione, e non solo a trasformazioni puramente immaginarie come le reversibili.

5 (*a*) L'incremento dell'energia cinetica complessiva EC_{tot} del sistema (somma dell'energia cinetica di tutte le particelle costitutive).

(*b*) Assumendo: primo, che il lavoro L compiuto dal sistema su altri sistemi sia uguale e contrario al lavoro L_e (in tal caso il lavoro L compiuto dal sistema corrisponde, a parte il segno, all'energia cinetica fornita al sistema dal lavoro delle forze esterne); secondo, che non ci siano variazioni nell'energia cinetica e nell'energia potenziale interna a livello macroscopico (così le variazioni dell'energia interna si verificano solo al livello microscopico, riguardano cioè la sola energia interna microscopica U); terzo, che le forze interne siano, al livel-

[10] Pro memoria: il riferimento del CM è un riferimento cartesiano con origine nel CM e con assi coordinati dotati – nel giudizio degli osservatori inerziali – di moto di pura traslazione.

lo delle singole particelle, tutte conservative (in tal modo al lavoro L_i corrisponde l'incremento $\Delta EP_i = -L_i$ dell'energia potenziale microscopica interna).
Osservazione. La prima condizione ($L = L_e$) è sempre verificata nel caso tipico dell'interazione tra il pistone mobile di chiusura di un contenitore cilindrico e il gas ivi contenuto: il lavoro compiuto dalle forze che il gas esercita sul pistone è necessariamente uguale e contrario, in ogni tipo di trasformazione, a quello compiuto dalle forze che il pistone esercita sul gas. La $L = L_e$ *non sarebbe invece verificata* nel caso, ad esempio, di un liquido che viene travasato da un recipiente a un altro recipiente posto più in basso: al lavoro compiuto dalle forze gravitazionali applicate al liquido (con produzione di energia cinetica macroscopica, che alla fine si ritroverà tutta come energia cinetica del moto di agitazione termica) non fa riscontro alcun lavoro esterno compiuto dal liquido. Si veda anche la domanda 2 a pag. 59.
(*c*) L'energia complessiva (cinetica + potenziale, macro e microscopica) del sistema che ha ricevuto il calore q e sul quale è stato eseguito da parte delle forze esterne il lavoro L_e.

6 (*a*) Se il liquido ha massa m e il suo baricentro si sposta di h verso il basso, durante la caduta del liquido viene compiuto il lavoro mgh da parte delle forze gravitazionali. Viene inoltre compiuto sul liquido un lavoro resistente d'attrito $-L'_a$ da parte della pareti del tubo e dei contenitori, più un lavoro d'attrito di valore complessivamente nullo (vedi risposta 2, pag. 60) da parte di forze d'attrito interne al liquido stesso. Possiamo inoltre supporre che una certa quantità di calore q si sposti dal liquido, scaldatosi per attrito, al sistema dei contenitori. Se consideriamo trascurabili le variazioni dell'energia potenziale interna del liquido, il bilancio energetico del liquido è $mgh - L'_a - q = \Delta E'_t$, dove $\Delta E'_t$ rappresenta l'incremento dell'energia termica.
(*b*) I contenitori si scaldano sia per il calore ricevuto dal liquido, sia per il lavoro L''_a delle forze d'attrito del liquido sulle pareti (lavoro uguale e contrario rispetto al lavoro $-L'_a$ delle forze d'attrito delle pareti sul liquido). Il bilancio energetico è quindi $q + L''_a = \Delta E''_t$.
(*c*) L'unico lavoro delle forze esterne sull'intero sistema è mgh. Pertanto il bilancio energetico è espresso dalla relazione $mgh = \Delta E'_t + \Delta E''_t$ (che è la somma delle relazioni scritte ai due punti precedenti).
(*d*) Per l'universo, che chiaramente non riceve apporti energetici dall'esterno, il bilancio energetico è $0 = \Delta E'_t + \Delta E''_t - mgh$. L'effetto di riscaldamento verificatosi con lo spostamento dell'acqua da un recipiente all'altro è pagato con una equivalente perdita di energia potenziale gravitazionale.

7 Essendo l'energia interna una funzione di stato, possiamo calcolarne la variazione lungo un qualsiasi percorso che porti il gas dallo stato iniziale 1 allo stato finale 2. Supponiamo dunque che il gas subisca dapprima una trasformazione isoterma che lo porta al volume finale (fig. 10), e poi un trasformazione rever-