

Capitolo 3

Il potenziale elettrostatico

PARAGRAFI DEL TESTO

3.1 Il lavoro delle forze elettrostatiche

3.2 Energia potenziale elettrostatica

3.3 Potenziale elettrostatico

3.4 Il potenziale nei metalli

3.5 Capacità

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

- 1 La carica puntiforme negativa q viene spostata lungo una linea di forza sempre nello stesso senso. È possibile che il diagramma di fig.9 riporti in funzione del tempo l'energia potenziale elettrostatica di q ?

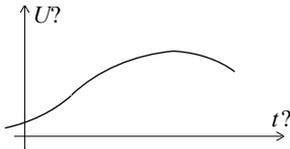


Fig.9

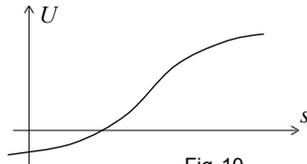


Fig. 10

- 2 La carica puntiforme positiva q viene spostata lungo una linea di forza sempre nello stesso senso, con velocità prima crescente poi decrescente: il diagramma a lato (fig. 10) mostra come varia la sua energia potenziale elettrostatica in funzione della distanza s percorsa. È possibile che la carica in questione si muova in un campo uniforme? Quale sarebbe la risposta se in ascisse ci fosse il tempo?
- 3 La carica puntiforme $q = -4$ statC dista 25 mm dalla carica puntiforme $q' = 12$ statC e 40 mm dal punto R : si esprima l'energia potenziale elettrostatica di q' rispetto a R nel campo prodotto da q .
- 4 Si esprima l'energia totale (cinetica + potenziale elettrostatica) dell'elettrone di un atomo di idrogeno in funzione del raggio r di un'ipotetica orbita circolare.

- 5 Una carica elettrica è posta all'interno di una gabbia metallica. È possibile variane l'energia potenziale dall'esterno?
- 6 In un campo elettrostatico uniforme il valore del potenziale rispetto a un dato riferimento è uguale in tutti i punti (*vero/falso*).
- 7 Le due espressioni «potenziale in A rispetto a B » e «differenza di potenziale tra A e B » sono del tutto equivalenti (*vero/falso*).
- 8 È possibile che l'intensità del campo elettrostatico sia maggiore in A che in B , se il potenziale in A rispetto a B è negativo?
- 9 Il diagramma di fig. 11 mostra come varia, in funzione della distanza s percorsa, l'energia potenziale di una carica q lungo una linea di forza del campo creato da altre cariche. Si completi il diagramma mostrando l'andamento del potenziale lungo la linea in questione, supponendo dapprima che q sia positiva e poi che sia negativa.
-
- Fig. 11
- 10 Rispetto al riferimento R l'energia potenziale elettrostatica della carica puntiforme $q = 4 \times 10^{-9}$ C vale $-3,2 \times 10^{-8}$ J in A , $2,4 \times 10^{-8}$ J in B . Determinare il lavoro compiuto dalle forze del campo prodotto dalle altre cariche quando la carica puntiforme $q' = -1,5 \times 10^{-8}$ C si sposta da B ad A .
- 11 Nel punto A si trova un elettrone, nel punto B quattro elettroni (oppure quattro protoni): stabilire se nel campo prodotto da tali cariche esistono punti in cui è zero il potenziale rispetto all'infinito.
- 12 Stabilire che il punto R è il riferimento del potenziale significa anche assumere che in R il potenziale è zero (*vero/falso*).
- 13 Se R è il riferimento del potenziale, in quanti punti del campo si annulla il potenziale?
- 14 Campo elettrico prodotto da una carica puntiforme q . Come varierebbe il grafico che dà il potenziale in funzione della distanza da q nel caso il riferimento venisse posto non all'infinito, ma a distanza r_0 da q ?
- 15 Una particella su cui si trovano 4 elettroni in eccesso possiede, rispetto al riferimento A , energia potenziale elettrostatica 48 eV in B , 12 eV in C . Determinare il potenziale in C rispetto a B .
- 16 In un campo uniforme, superfici equipotenziali distanti 20 cm hanno potenziali che differiscono di 100 V. Quale forza eserciterebbe il campo su una carica $q = -3,5 \times 10^{-10}$ C?
- 17 In un campo elettrico uniforme di intensità 5 V/m, si determini la differenza di potenziale tra il punto A e il punto B , sapendo che la distanza di B da A è 3 m.
(a) infinite soluzioni, (b) una e una sola soluzione, (c) due soluzioni, di uguale valore assoluto e segno opposto.
- 18 Rispetto a R' , il potenziale è 160 V in A e -35 V in B . Rispetto a R'' , il potenziale in A è -160 V. E in B ?

- 19 È possibile, operando all'interno di un involucro metallico, modificare il potenziale nei punti esterni?
- 20 Si studi l'andamento del potenziale rispetto all'infinito nel campo prodotto da una carica elettrica positiva distribuita in modo uniforme su una superficie sferica di raggio R .
- 21 Si studi l'andamento del potenziale rispetto all'infinito nel campo prodotto da una carica elettrica positiva (negativa) distribuita con uniformità entro un volume sferico di raggio R .
- 22 Una carica puntiforme q positiva viene posta nel centro di un guscio metallico delimitato da due superfici sferiche concentriche, di raggio R_e quella esterna ed R_i quella interna. Si studi l'andamento del potenziale rispetto all'infinito in tutto lo spazio.
- 23 Una sfera metallica avente carica q si trova all'interno (fig. 12) di un guscio metallico sferico concentrico, privo di carica. Si determini la differenza di potenziale tra i due conduttori.
- 24 Se una carica puntiforme positiva viene introdotta in una cavità metallica, possiamo immaginare che in certe situazioni particolari vengano indotte sulle pareti della cavità anche cariche positive?
- 25 Il concetto di «capacità» può essere riferito solo a materiali conduttori (*vero/falso*).
- 26 Il potenziale di un conduttore rispetto all'infinito varia di 10 V in seguito all'avvicinamento di una carica negativa. Determinarne il valore iniziale, sapendo che quello finale è -32 V (oppure, -2 V).
- 27 (a) È possibile che, per effetto dell'avvicinamento di una carica negativa, il potenziale rispetto all'infinito sulla superficie di un conduttore, inizialmente positivo, diventi negativo?
(b) È possibile che ciò si verifichi per effetto dell'avvicinamento di un conduttore scarico?
- 28 Un conduttore scarico A viene portato in prossimità di un conduttore carico B , inizialmente isolato nel vuoto: conseguentemente, il potenziale rispetto all'infinito di B varia di 3 V, assumendo il valore di -9 V. Determinarne il valore iniziale.
- 29 Un guscio metallico sferico, al centro del quale si trova una carica puntiforme positiva q , è a sua volta contenuto entro un guscio metallico sferico concentrico. Si spieghi che cosa cambierebbe se si mettessero a contatto i due involucri mediante un filo metallico.
- 30 Un cilindro metallico (fig. 13) indefinitamente alto, uniformemente carico di elettricità positiva in ragione di λ coulomb a metro di altezza, è circondato da un guscio metallico cilindrico coassiale di spessore costante. Si determini la differenza di potenziale tra i due oggetti.

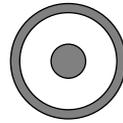


Fig. 12

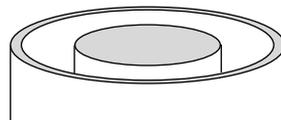


Fig. 13

SOLUZIONI

- 1 No, la pendenza del grafico deve risultare o sempre positiva o sempre negativa, a seconda che la carica si muova nel senso della linea (lavoro resistente delle forze elettrostatiche, aumento dell'energia potenziale) o in senso contrario.
- 2 La figura indica che l'energia potenziale di q continua ad aumentare: evidentemente q (positiva) si sposta in senso contrario al senso della linea di forza. Se s subisce l'incremento infinitesimo ds , la forza elettrostatica compie il lavoro negativo $dL = -F ds$ e l'energia potenziale subisce l'incremento positivo $dU = F ds$. Il valore F della forza è quindi dU/ds , corrisponde cioè alla pendenza del grafico. La forza su q aumenta dapprima fino a un massimo, poi va man mano diminuendo: non può trattarsi di un campo uniforme. Se invece in ascisse si trovasse non la distanza s ma il tempo t il campo potrebbe essere uniforme: l'energia potenziale della carica crescerebbe in tal caso nel tempo con rapidità proporzionale alla velocità della carica:

$$dU/dt = \frac{dU}{ds} \frac{ds}{dt} = Fv \text{ (con } F \text{ costante per l'uniformità del campo).}$$
- 3 È il lavoro compiuto dalla forza che q esercita su q' se q' si sposta in R , se cioè la distanza di q' da q aumenta da 25 mm a 40 mm. Con le unità del Sistema CGS elettrostatico, $U = -4 \times 12 \left(\frac{1}{2,5} - \frac{1}{4} \right) \text{ erg} = -7,2 \text{ erg}$.
- 4 L'energia cinetica è $EC = mv^2/2$. Coincidendo la forza centripeta mv^2/r con la forza elettrostatica $q_e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, si ricava $EC = mv^2/2 = q_e^2/8\pi\epsilon_0 r$. L'energia potenziale rispetto all'infinito è invece $U = -q_e^2/4\pi\epsilon_0 r$. L'energia totale (con riferimento dell'energia potenziale all'infinito) è quindi $E_{\text{tot}} = -q_e^2/8\pi\epsilon_0 r$ (uguale all'energia cinetica presa col segno meno: si rilevi l'analogia con l'energia totale di un satellite su orbita circolare).
- 5 Rispetto a un riferimento esterno sì, rispetto a un riferimento interno no. Operando all'esterno è infatti possibile modificare solo il campo esterno (e il lavoro che esso compie se attraversato da una carica).
- 6 Falso: in qualsiasi campo elettrostatico il potenziale diminuisce lungo le linee di forza. In un campo uniforme è uguale in ogni punto la rapidità dV/dl ($= -E$) con cui il potenziale diminuisce lungo le linee del campo.
- 7 Vero. Tanto il potenziale in A rispetto a B che la differenza di potenziale tra A e B rappresentano il lavoro delle forze del campo elettrostatico per unità di carica da A a B .
- 8 Sì. Ad esempio, nel campo di una carica puntiforme negativa q l'intensità del campo aumenta e il potenziale diminuisce man mano che ci si avvicina a q . Non c'è alcuna relazione diretta tra intensità del campo e valore del potenziale: l'intensità del campo è legata non al potenziale, ma alla rapidità con cui il potenziale varia nella direzione del campo.

- 9 La [B] di pag. 47 del testo mostra che potenziale ed energia potenziale sono direttamente proporzionali, con lo stesso segno se la carica è positiva, con segno opposto se la carica è negativa. Nel caso qui considerato l'andamento del potenziale è mostrato in fig. 14 rispettivamente dalla linea *a* e dalla linea *b*. Controllo: il fatto che l'energia potenziale di *q* diminuisce al crescere di *s* indica che la forza del campo su *q* compie un lavoro positivo: dunque *q* si muove nel senso della linea (e cioè verso potenziali minori, vedi linea *a*) se è positiva, nel senso opposto (e cioè verso potenziali maggiori, vedi linea *b*) se è negativa.

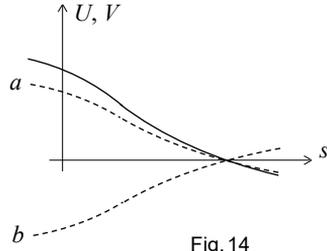


Fig. 14

- 10 Il lavoro in questione sarà il prodotto di q' per il potenziale in *B* rispetto ad *A*. Se q si sposta da *B* ad *A* il lavoro delle forze del campo è uguale per qualsiasi tragitto: se, in particolare, il tragitto è $B \rightarrow R \rightarrow A$, in base ai dati del problema il lavoro sarà $(2,4 \times 10^{-8} + 3,2 \times 10^{-8}) \text{ J} = 5,6 \times 10^{-8} \text{ J}$. Dividendo per q otteniamo il lavoro per unità di carica da *B* ad *A* (cioè il potenziale in *B* rispetto ad *A*):

$$V_{B(A)} = 5,6 \times 10^{-8} \text{ J} / (4 \times 10^{-9} \text{ C}) = 14 \text{ V}.$$

Se dunque q' si sposta da *B* ad *A* il lavoro delle forze del campo è

$$L = q' V_{B(A)} = -1,5 \times 10^{-8} \text{ C} \times 14 \text{ V} = -2,1 \times 10^{-7} \text{ J}.$$

- 11 Nel campo elettrico considerato il potenziale rispetto all'infinito è espresso da $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B} \right)$. Se in *B* ci sono quattro elettroni, sia q_A che q_B sono negative, e il potenziale rispetto all'infinito si annulla solo all'infinito. Se invece in *B* ci sono quattro protoni, il potenziale si annulla su una superficie equipotenziale i cui punti hanno da *B* una distanza quattro volte più grande della distanza da *A*.
- 12 Vero. Il potenziale in *R* rispetto ad *R* è il lavoro per unità di carica da *R* ad *R*: ma su un percorso chiuso qualsiasi il lavoro delle forze elettrostatiche (conservative) è zero.
- 13 Infiniti. Tutti i punti che possono essere raggiunti a partire da *R* spostandosi sempre e solo perpendicolarmente alle linee del campo (più eventualmente i punti di altre superfici equipotenziali a uguale valore del potenziale^[1]).

¹ È sempre possibile che il potenziale abbia lo stesso valore su *diverse* superfici equipotenziali. Ad esempio, nel campo prodotto da due cariche puntiformi identiche ad ogni superficie equipotenziale posta tutta da un lato del piano di simmetria del sistema ne corrisponde un'altra, speculare della prima rispetto al piano di simmetria, sulla quale il potenziale ha evidentemente lo stesso valore.

- 14 L'iperbole equilatera che dà il potenziale rispetto all'infinito traslerebbe verso il basso (fig. 15) quanto occorre perché il potenziale si annulli non all'infinito ma a distanza r_0 . In tutti i punti del campo il potenziale diminuisce in una stessa misura perché la differenza di potenziale tra due punti è un dato assoluto, non cambia al variare del riferimento. Ovvero: il potenziale rispetto al nuovo riferimento è uguale al 'vecchio' potenziale (riferimento all'infinito) più il potenziale all'infinito rispetto al nuovo riferimento: questo termine correttivo è uguale per tutti i punti del campo.

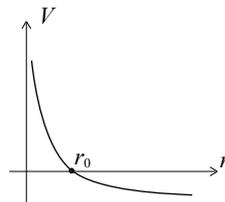


Fig. 15

- 15 Se si assume come unità negativa di carica la carica $-e$ di un elettrone ($+e$ è il valore della carica elementare positiva, quella del protone), la carica della particella considerata è $-4e$. L'energia potenziale della particella in C rispetto a B (lavoro delle forze del campo per uno spostamento da C a B) è $(12-48) \text{ eV} = -36 \text{ eV}$. L'energia potenziale per unità di carica è perciò $-36 \text{ eV}/(-4e) = 9 \text{ V}$. Controllo: il valore positivo trovato per il potenziale in C rispetto a B è in accordo col fatto che il lavoro relativo al trasferimento di una carica negativa da C a B è negativo (le forze elettrostatiche tendono a spostare le cariche negative verso punti a potenziale superiore).
- 16 L'intensità del campo è la rapidità di variazione del potenziale lungo le linee di campo: $E = 100 \text{ V}/(20 \text{ cm}) = 5 \text{ V/cm} = 500 \text{ V/m} = 500 \text{ N/C}$. La forza su q sarebbe diretta perpendicolarmente alle superfici equipotenziali verso i potenziali più elevati, e avrebbe modulo $F = |q|E = 3,5 \times 10^{-10} \text{ C} \times 500 \text{ N/C} = 1,75 \times 10^{-7} \text{ N}$.

- 17 Infinite soluzioni. Non si conosce l'angolo φ tra il vettore \vec{AB} e il vettore \vec{E} . Se fosse $\varphi = 0$, sarebbe $V_A - V_B = 15 \text{ V}$. Se $\varphi = 90^\circ$, $V_A - V_B = 0$. Se $\varphi = 180^\circ$, $V_A - V_B = -15 \text{ V}$. In generale, $V_A - V_B = (15 \text{ V}) \cos \varphi$.
- 18 Il potenziale in un punto dipende dal riferimento prescelto, la differenza di potenziale tra due punti no, è un dato assoluto (rappresenta infatti il lavoro delle forze del campo per unità di carica da un punto all'altro). Se, per effetto del cambio di riferimento, il potenziale in A diminuisce di 320 V , in B diminuisce di altrettanto: da -35 V a -355 V .

- 19 Se il riferimento dei potenziali è all'esterno, sì, altrimenti no: dall'esterno è infatti possibile modificare solo il campo esterno. È chiaro invece che, quale che sia la posizione del riferimento, la differenza di potenziale tra due punti interni dipende solo dal campo interno, e può quindi essere modificata solo dall'interno.

- 20 All'esterno il campo è identico (fig. 16) a quello prodotto dalla stessa carica posta nel centro della sfera: dunque, il lavoro delle forze del campo per unità di carica fino all'infinito è $q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Internamente alla sfera non c'è campo, quindi il potenziale è

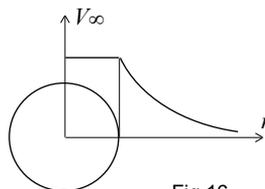


Fig. 16

costante: $V_\infty = q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

- 21 Il campo interno (fig.17) cresce linearmente con r da zero a $q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Per la $E = -dV/dl$ (in questo caso $dl = dr$ ^[2]), la pendenza del grafico che fornisce V in funzione di r è inizialmente zero, poi è negativa con valore assoluto che aumenta fino a $q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ per $r = R$ ^[3]. All'esterno, il potenziale è identico a quello del campo prodotto dalla stessa carica posta nel centro della sfera:

$V_\infty = q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Se la carica fosse negativa, la linea del potenziale risulterebbe ribaltata verso il basso (valori negativi).

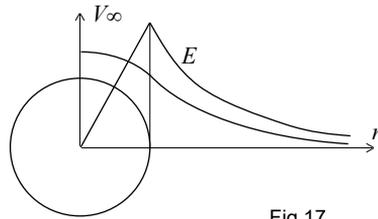


Fig.17

- 22 Sulla superficie interna (fig. 18) è distribuita uniformemente una carica indotta uguale e contraria a q , sulla superficie esterna una carica indotta identica a q . All'esterno è $V_\infty = q/4\pi\epsilon_0 r$. Sulla superficie esterna, il potenziale è $V_\infty = q/4\pi\epsilon_0 R_e$. Tra le due superfici sferiche, non c'è campo e quindi il potenziale è lo stesso sulle due superfici e nello spazio tra di esse:

$$V_\infty = q/4\pi\epsilon_0 R_e.$$

Si noti che sia nello spazio esterno

che nella cavità il campo è *identico* a quello che troveremmo in assenza di guscio metallico: nello spazio vuoto interno è quindi la stessa anche la differenza di potenziale tra due punti, mentre il potenziale rispetto all'infinito è *inferiore*, perché questa volta tra le due superfici sferiche il campo è zero (

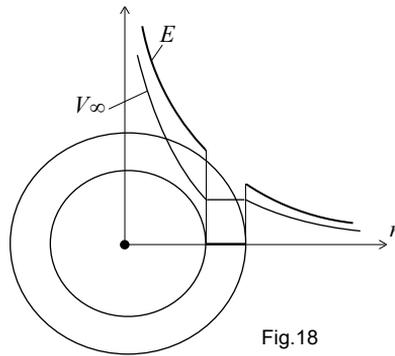


Fig.18

² Se la carica fosse negativa sarebbe $dl = -dr$ (uno spostamento nella direzione del campo implica infatti in tal caso una *diminuzione* della distanza r).

³ Più precisamente, per $r < R$ il potenziale è $V_\infty = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$. Il potenziale a

distanza r rispetto all'infinito è infatti uguale al potenziale V' rispetto a un punto a distanza R più il potenziale V'' di tale punto rispetto all'infinito ($V'' = q/4\pi\epsilon_0 R$). Il potenziale in un punto a distanza $r (< R)$ rispetto a un punto a distanza R è il lavoro per unità di carica tra i due punti: perciò

$$V' = \int_r^R E dr = \int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2). \text{ La somma di } V' \text{ e di } V'' \text{ dà il}$$

risultato sopra indicato. In particolare, nel centro della sfera ($r = 0$) è $V_\infty = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}$.

quindi se una carica si sposta da un punto della cavità all'infinito manca il lavoro delle forze del campo tra la superficie interna e la superficie esterna). Sulla superficie interna e in tutti i punti della cavità il potenziale è diminuito, a causa del guscio metallico, di $(q/4\pi\epsilon_0)(1/R_1 - 1/R_2)$.

- 23 Sia R_1 il raggio della sfera, sia R_2 il raggio della superficie interna del guscio. Sia nello spazio vuoto tra sfera e guscio che all'esterno del guscio l'intensità del campo è $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, esattamente come se il guscio non esistesse. Perciò il potenziale della sfera rispetto al guscio è $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.
- 24 No. Da tali cariche uscirebbero linee di forza che dovrebbero arrestarsi su cariche indotte negative: ciò implicherebbe una differenza di potenziale tra punti della superficie interna, il che è da escludersi perché la superficie di un conduttore è, in caso di equilibrio, sempre equipotenziale.
- 25 Vero. Il potenziale sulla superficie dei corpi non conduttori non è univocamente definito.
- 26 L'avvicinamento di una carica negativa ha abbassato il valore del potenziale rispetto all'infinito da -22 a -32 V (oppure, da 8 V a -2 V)⁴.
- 27 (a) Sì, basta che la carica negativa abbia valore abbastanza grande.
(b) No, la presenza delle cariche indotte (il cui valore può tutt'al più tendere a quello della carica induttrice) non può arrivare a tanto. Si consideri al riguardo la fig. 8 a pag. 56 del testo.
- 28 Il conduttore B era certamente carico di segno meno (la vicinanza di un conduttore scarico diminuisce il valore assoluto del potenziale rispetto all'infinito, ma non può cambiarne il segno). Per effetto della carica indotta positiva (più vicina a B di quella negativa) il potenziale in superficie è diventato «meno negativo». Inizialmente era quindi di -12 V.
- 29 Prima del contatto, entrambi i gusci (fig. 19) hanno (per induzione completa, e per la simmetria del sistema) una carica uguale a $-q$ uniformemente distribuita sulla superficie interna e una

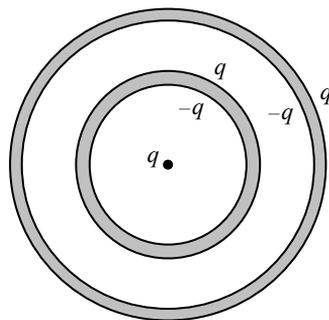


Fig. 19

⁴ Si noti che il problema *non sarebbe determinato* qualora non fosse specificato che il riferimento del potenziale è all'infinito. Se il riferimento si trovasse tra il conduttore e la carica negativa, il potenziale iniziale sarebbe potuto essere -42 V (e rispettivamente -12 V): l'avvicinamento di una carica negativa al conduttore (evidentemente carico di segno meno in entrambi i casi) avrebbe *indebolito* il campo elettrico tra il conduttore e il riferimento in modo da rendere in valore assoluto *più piccolo* il lavoro per unità positiva di carica tra la superficie del conduttore e il riferimento.

carica uguale a q uniformemente distribuita sulla superficie esterna. In tutto lo spazio non occupato dal metallo, il campo è identico a quello prodotto dalla carica puntiforme posta nel centro del sistema: in particolare, linee di forza escono dalla superficie esterna del guscio più piccolo e si arrestano sulla superficie interna del guscio più grande. Dopo il contatto tali superfici devono trovarsi allo stesso potenziale: *non ci possono quindi essere più linee di forza nello spazio tra esse*, il che richiede che le due rispettive cariche elettriche si neutralizzino l'una con l'altra lasciando del tutto scariche le due superfici (niente invece cambia per quanto riguarda la carica delle altre due superfici, e per quanto riguarda il campo elettrico all'interno del guscio più piccolo e all'esterno del guscio più grande).

- 30 Nell'intercapedine tra i due cilindri le linee di campo hanno andamento radiale rispetto all'asse geometrico del sistema: il campo prodotto dal cilindro interno ha intensità $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$, il campo prodotto nell'intercapedine dal cilindro esterno è nullo. Essendo in generale $E = -dV/dl$ (dove dl è uno spostamento infinitesimo lungo una linea di forza nella direzione della linea), in questo caso sarà $E = -dV/dr$. Detti allora R_1 ed $R_2 > R_1$ i raggi delle superfici cilindriche da cui l'intercapedine è delimitata, risulterà

$$[A] \quad V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda \, dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

La validità di tale relazione (come la validità della relazione $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$) è ovviamente legata al fatto di poter considerare indefinitamente grande l'altezza della distribuzione cilindrica di carica rispetto alle distanze r prese in considerazione. Non possiamo quindi concludere, sulla base della [A], che per R_2 tendente a infinito anche la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ tende a infinito.