

$\frac{V_0}{d} = \frac{q}{A\epsilon_0}$, da cui $C_0 = q/V_0 = \epsilon_0 A/d$. Riempiamo ora lo spazio tra le armature con

materiale dielettrico: se il condensatore è staccato dal generatore che l'ha caricato, subito la differenza di potenziale scende a un valore $V < V_0$. Si osserva sperimentalmente che il numero V_0/V non dipende da V_0 , ma solo dal particolare dielettrico che stiamo utilizzando: essendo $V_0/V = E_0/E$, tale numero esprime l'indebolimento subito dal campo elettrico per effetto delle cariche di polarizzazione poste sulla superficie del dielettrico a ridosso delle superfici metalliche cariche, ed è quindi nient'altro che la costante dielettrica relativa ϵ_r del materiale posto tra le armature. Sarà in definitiva $C = q/V = q/(V_0/\epsilon_r) = \epsilon_r C_0$, come del resto poteva essere subito ottenuto sulla base di quanto stabilito al punto 3/b di pag.85. Analogamente, sarà $C = \epsilon_r C_0$ per un qualsiasi altro condensatore: potremo infatti sempre assumere che il relativo dielettrico sia delimitato da superfici equipotenziali del campo delle cariche poste sulle armature (cfr. punto 3 a pag.83).

6. La funzione del dielettrico è quindi quella di aumentare la capacità del condensatore. Allo stesso tempo, il dielettrico può avere la funzione meccanica di mantenere separate le due armature, che sono molto vicine (ciò aumenta la capacità) e che, in quanto portatrici di cariche di segno opposto, si attraggono fortemente. Per di più, la *rigidità dielettrica* del materiale interposto è maggiore di quella dell'aria, il che permette di porre il condensatore sotto una tensione proporzionalmente più grande, senza pericolo di scarica elettrica tra le armature^[4].

6.2 Energia di un condensatore

1. Un condensatore carico possiede energia: precisamente, energia potenziale elettrostatica il cui valore corrisponde, per definizione, al lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche interne durante il processo di scarica, e cioè di azzeramento del campo elettrico tra le armature. In quanto compiuto da forze conservative, tale lavoro può essere calcolato con riferimento a un qualsiasi processo – anche solo immaginario – che porti il sistema dalla condizione iniziale a quella finale. Per esempio, potremmo immaginare che il processo di scarica consista nel disperdere le due cariche del condensatore, positiva e negativa, all'infinito, distribuendole su una superficie infinitamente grande e quindi rendendo infinitamente grande la distanza tra ogni elemento infinitesimo di carica e tutti gli altri. Oppure possiamo immaginare che il processo di scarica consista nel prelevare in qualche modo gli elettroni in eccesso dalla relativa armatura e nel trasferirli tutti assieme sull'armatura positiva attraverso

⁴ La *rigidità dielettrica* di un dielettrico corrisponde al massimo valore di intensità che un campo elettrico può avere all'interno del materiale senza che le sue proprietà di «isolante» vengano compromesse. La rigidità dell'aria, ad esempio, si aggira sui 3000 V/mm: per campi elettrici di tale intensità, il dielettrico aria viene perforato da una corrente elettrica (visibile sotto forma di una scintilla). La rigidità dielettrica della carta è 5,3 volte superiore, quella del vetro è 6,7 volte superiore, quella del teflon è 20 volte superiore.

sando il campo prodotto dalla carica positiva (e dalle cariche di polarizzazione da essa prodotte sulla superficie del dielettrico). Se, nel campo prodotto da entrambe le cariche (e dalle relative cariche di polarizzazione) la differenza di potenziale complessiva tra le due armature è V , nel campo prodotto dalla sola carica positiva (e dalle cariche di polarizzazione da essa prodotte) la differenza di potenziale è $V/2$. Pertanto, quando la carica $-q$ si sposta dall'armatura negativa a quella positiva, il lavoro delle forze elettrostatiche ad essa applicate (prodotto della carica per la differenza di potenziale tra posizione iniziale e posizione finale) è $qV/2$. Dunque l'energia di un condensatore – di un *qualsiasi* condensatore, anche non piano – è

$$[A] \quad U = qV/2 = CV^2/2 = q^2/2C.$$

2. Allo stesso risultato si può giungere immaginando che il processo inverso, il processo di carica del condensatore, consista nello spostare da un'armatura all'altra un elemento positivo dq di carica dopo l'altro, fino a un valore complessivo q : in tal modo la differenza di potenziale v tra le due armature aumenta ogni volta di $dv = dq/C$, salendo progressivamente da zero al valore finale $V = q/C$. Se l'elemento infinitesimo di carica $dq = C dv$ viene spostato da un'armatura all'altra mentre la tensione è v , il lavoro resistente delle forze elettrostatiche ha valore $dL = -v dq = -C v dv$. Il lavoro complessivo (il cui valore assoluto rappresenta l'energia del condensatore) sarà la somma di tutti i lavori parziali:

$$L = -C \int_0^V v dv = -\frac{CV^2}{2} = -qV/2.$$

3. Con un ragionamento analogo si ottiene che per un generico conduttore l'energia potenziale elettrostatica rispetto all'infinito (il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche interne in relazione alla dispersione della carica all'infinito con conseguente azzeramento del campo elettrico da essa prodotto) è

$$[B] \quad U_\infty = qV_\infty/2$$

essendo q la carica del conduttore e V_∞ il potenziale sulla superficie del conduttore rispetto all'infinito (diverso, si noti, a seconda che il conduttore sia o non sia immerso in un dielettrico). Alla [B] si giunge anche a partire dalla [F] di pag. 48 ($U_\infty = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_{i(\infty)}$), tenuto conto che la carica q del conduttore è l'insieme di infinite cariche infinitesime, e che nella posizione occupata da ognuna di tali cariche il potenziale dovuto a tutte le altre cariche – incluse le eventuali cariche di polarizzazione – è proprio V_∞ (che nella sommatoria può essere messo a fattor comune).

4. Nel caso ad esempio di un conduttore sferico di raggio R isolato nel vuoto, il potenziale rispetto all'infinito in superficie (risp. 20, pag. 61) è $V_\infty = q/4\pi\epsilon_0 R$, perciò l'energia potenziale è $U_\infty = q^2/8\pi\epsilon_0 R$. Allo stesso risultato si perviene tenendo conto del fatto che su un elemento dS di superficie agisce in senso centrifugo (cfr. pag. 40) una forza $dF = \sigma^2 dS/2\epsilon_0$. Nel caso qui considerato è $\sigma = q/4\pi R^2$, per cui

sarà $dF = q^2 dS / 2\epsilon_0 (4\pi R^2)^2$. Integrando all'intera superficie si ottiene che la forza complessivamente agente sulla carica q in senso centrifugo è $F = q^2 / 8\pi \epsilon_0 R^2$. Se ora immaginiamo che il raggio r della distribuzione aumenti dal valore iniziale R a infinito, otteniamo che le forze elettrostatiche interne hanno compiuto un lavoro

$$L = \int_R^\infty \frac{q^2 dr}{8\pi \epsilon_0 r^2} = -q^2 / 8\pi \epsilon_0 R.$$

5. Se i conduttori fossero due o più, l'energia potenziale elettrostatica interna del sistema sarebbe

$$[C] \quad U_\infty = \frac{q_1 V_{1(\infty)}}{2} + \frac{q_2 V_{2(\infty)}}{2} + \dots$$

dove chiaramente il valore del potenziale V_i dipende non solo dalla carica q_i ma anche da tutte le altre cariche del sistema^[5].

Nel caso ad esempio di due conduttori 1 e 2 aventi rispettivamente carica q (positiva) e $-q$, l'energia del sistema è $\frac{qV_1}{2} + \frac{-qV_2}{2} = \frac{q(V_1 - V_2)}{2} = \frac{qV}{2}$, col che ritroviamo quanto già ottenuto per altra via per un condensatore.

6.3 Energia del campo elettrico

1. Risulta conveniente associare l'energia potenziale elettrostatica di un condensatore al relativo campo elettrico. Quando, come da noi ipotizzato col nostro schema di condensatore piano, il campo elettrico è uniforme, ogni punto del campo dà uno stesso contributo all'energia elettrostatica del sistema, cosicché dividendo l'energia del sistema ($CV^2/2$) per il volume del campo (cilindro di base A e altezza d) si ottiene che ad ogni punto del campo deve essere associata una **densità di energia** (energia per unità di volume)

$$[A] \quad \eta_e = (CV^2/2)/Ad = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} V^2}{2Sd} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{V^2}{2d^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2}$$

dove il coefficiente maggiorativo ϵ_r rende conto della circostanza che, a parità di intensità E del campo, la presenza della cariche di polarizzazione (che indeboliscono di ϵ_r volte il campo prodotto dalle cariche poste sulle armature) richiede che tali cariche (le «cariche libere») siano in compenso ϵ_r volte più grandi che nel vuoto.

2. Il risultato viene poi così generalizzato: l'energia elettrostatica di un sistema di cariche può essere localizzata nel relativo campo elettrico; se nel punto P il campo

⁵ Come la [B], anche la [C] si può desumere dall'espressione dell'energia elettrostatica (rispetto all'infinito) di un sistema di cariche puntiformi. Si consideri infatti che le infinite cariche puntiformi poste sulla superficie di uno stesso conduttore si trovano tutte allo stesso potenziale, che può essere posto a fattor comune nella somma delle relative energie potenziali.

ha intensità E , l'energia per unità di volume ha in P valore $\eta_e = \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2/2$, cosicché l'energia contenuta in un volumetto infinitesimo $d\tau$ attorno a P è $dU = \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 d\tau/2$. L'energia elettrostatica interna totale di un sistema di cariche si può allora calcolare come somma delle energie di ogni porzione elementare del campo:

$$[B] \quad U = \int_{\tau} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2} d\tau.$$

In definitiva, l'energia elettrostatica interna di un sistema di conduttori può essere calcolata in due modi alternativi: o, attraverso la [C] del paragrafo precedente, come lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche interne in relazione alla separazione delle cariche fino all'azzeramento del campo in tutto lo spazio, oppure, attraverso la [B], come energia distribuita nel campo.

3. Esempio: energia potenziale rispetto all'infinito di una carica distribuita in modo uniforme su una superficie sferica di raggio R . Sappiamo già dal paragrafo precedente che è $U = q^2/(8\pi \varepsilon_0 R)$. Tale risultato può anche essere ottenuto considerando che il campo è diverso da zero solo sulla superficie e all'esterno di essa, e che a distanza $r \geq R$ dal centro della sfera la densità di energia è $\varepsilon_0 E^2/2$ con $E = q/4\pi \varepsilon_0 r^2$. L'energia dU contenuta in un guscio sferico di raggio r e spessore dr è la densità di energia moltiplicata per il volume del guscio:

$dU = (\varepsilon_0 E^2/2) (4\pi r^2 dr) = q^2 dr/(8\pi \varepsilon_0 r^2)$. L'energia di tutto il campo è quindi

$$U = \int_R^{\infty} \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 r^2} dr = q^2/(8\pi \varepsilon_0 R).$$

6.4 Collegamento di condensatori

1. Le armature di due o più condensatori possono essere connesse tra loro mediante fili metallici di collegamento: in particolare, possono essere collegate (come due o più lampadine, e come ogni altro apparecchio elettrico) «in serie» e «in parallelo».

2. Due o più condensatori sono *in serie* tra un punto A e un punto B se formano tra A e B (fig. 2) una catena priva di diramazioni intermedie: cosicché, se volessimo spostarci idealmente da A a B attraversando uno dei condensatori, saremmo costretti ad attraversarli, uno dopo l'altro, tutti. Due o più condensatori sono invece *in parallelo* tra A e B quando è possibile (fig. 3) spostarsi idealmente da A a B attraversandone uno qualsiasi senza attraversare nessuno degli altri.



Fig. 2 – Condensatori in serie tra A e B .

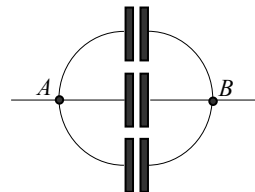


Fig. 3 – Condensatori in parallelo tra A e B .

3. Nel caso di collegamento in serie, la tensione complessiva è chiaramente la somma delle tensioni tra ogni coppia di armature. Quanto alla carica, ogni condensatore potrebbe di per sé venire caricato individualmente collegandone le armature ai morsetti del generatore: nel qual caso, lo stato di carica di un condensatore sarebbe *del tutto indipendente* dallo stato di carica degli altri (in particolare, potrebbero risultare collegate tra loro armature cariche dello stesso segno). Se invece (come sempre supporremo salvo avviso contrario) i condensatori vengono *caricati in serie*, caricati cioè collegando ai morsetti del generatore gli estremi *A* e *B* della serie, tutti i condensatori hanno necessariamente la *stessa* carica, e le armature collegate hanno necessariamente cariche di segno opposto: il generatore infatti provvede a caricare le due armature a cui è direttamente collegato, tutte le altre armature si caricano per induzione elettrostatica (praticamente completa). In tal caso, la tensione complessiva (la differenza di potenziale tra i due estremi della serie) si ripartisce tra i condensatori della serie in modo inversamente proporzionale alle rispettive capacità: essendo infatti costante la carica, è costante il prodotto CV .

4. Agli effetti esterni (agli effetti cioè del funzionamento di tutto il resto del circuito elettrico, e quindi agli effetti dei calcoli che si riferiscono al circuito nel suo complesso), N condensatori collegati in serie possono essere sostituiti da un unico condensatore – che chiameremo **condensatore equivalente**) la cui capacità C_e ha come reciproco la somma dei reciproci delle N capacità:

$$[A] \quad \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Nulla infatti cambia nel resto del circuito se, sotto una tensione pari alla tensione complessiva della serie, un unico condensatore assume una carica uguale a quella dei condensatori della serie: la capacità di tale condensatore equivalente è quindi

$$C_e = \frac{q}{V_1 + V_2 + V_3 + \dots} \quad (\text{da cui, prendendo i reciproci a primo e secondo membro, la}$$

[A]). La capacità del condensatore equivalente (la «capacità complessiva» della serie) è quindi *più piccola* di quella di tutti i condensatori del gruppo. In particolare, N condensatori di capacità C collegati in serie equivalgono a un unico condensatore di capacità C/N .

5. Nel caso invece del collegamento in parallelo, tutte le armature cariche di segno più sono collegate tra loro e si trovano perciò allo stesso potenziale; analogamente, tutte le armature cariche di segno meno sono collegate tra loro e si trovano a uno stesso potenziale. I condensatori del gruppo hanno quindi in comune il valore della tensione, mentre (essendo $q = CV$, con V in questo caso costante) la carica di un condensatore è proporzionale alla sua capacità.

6. Per un gruppo di N condensatori in parallelo, il condensatore equivalente ha capacità pari alla somma delle N capacità. Infatti, sotto una tensione identica a quella di