POTENZIALE ELETTROSTATICO

A) Campo elettrico e campo magnetico

1. Il fatto che una carica elettrica risulti assoggettata a forze che dipendono dal suo valore e dalla sua posizione, ma non dalla sua velocità[1], viene interpretato come conseguenza del fatto che la carica in questione si trova all'interno di un **campo elettrico**, cioè di una regione dello spazio in cui lo spazio rivela proprietà fisiche che altrove non ha. Forze dipendenti non solo dal valore e dalla posizione della carica, ma anche dalla sua velocità, sarebbero invece la manifestazione di un **campo magnetico**. Tutto ciò ha valore di definizione.

2. Quando dunque un corpo C viene elettrizzato, non sono solo le condizioni fisiche di C che risultano modificate, ma anche le condizioni fisiche dello spazio circostante. Una carica q posta in prossimità di C viene ora richiamata verso C oppure, al contrario, respinta in direzione opposta da una forza che non deve essere interpretata come un'azione esercitata a distanza da C su q, ma come l'effetto diretto di una certa situazione fisica locale, di una certa proprietà locale dello spazio, prodottasi con l'elettrizzazione di C. *Due cariche non interagiscono direttamente, a distanza, ma per il tramite dei rispettivi campi elettrici*. Il campo elettrico appare dunque come l'intermediario dell'interazione tra cariche in quiete.[2]

3. Si noti: la modificazione che, con l'elettrizzazione di C, subiscono le proprietà dello spazio circostante è un fatto reale ed estremamente concreto, *anche nel vuoto*. Tale modificazione non si verifica istantaneamente, all'atto dell'elettrizzazione di C, ma si propaga a partire da C fino ai punti più lontani con una velocità finita: la velocità della luce (nel vuoto, 300 000 km/s).

Questo tra l'altro significa che, quando C viene elettrizzato, risente immediatamente dell'azione attrattivo-repulsiva proveniente dalle cariche circostanti, visto che già si trova nei rispettivi campi elettrici: mentre invece le cariche circostanti non risentono dell'elettrizzazione di C fino a quando non sono raggiunte dal campo elettrico prodotto dalla carica prodotta su C.[3]

4. Il campo elettrico fin qui considerato – quello prodotto dalle cariche elettriche – si chiama **campo elettrostatico**, o «coulombiano» (= di Coulomb). Ma un campo elettrico può essere prodotto anche da un campo magnetico in variazione, nel qual caso si parla di **campo elettrico indotto**. Si osservi fin d'ora che mentre le forze

---

[1] Fintanto almeno che la velocità non raggiunge valori «relativistici», tali quindi da invalidare i risultati della Fisica classica.

[2] Le cariche in moto interagiscono *anche* per il tramite dei rispettivi campi magnetici.

[3] Con ciò risulta temporaneamente violata la legge di azione e reazione. Se l'elettrizzazione di C producesse effetti immediati sulle cariche circostanti, l'informazione «C è stato elettrizzato» si propagherebbe con velocità infinitamente grande. Un noto corollario della teoria della relatività stabilisce invece che nessuna informazione può propagarsi con velocità superiore alla velocità della luce nel vuoto.

del campo coulombiano sono conservative (lavoro zero su un percorso chiuso), quelle del campo elettrico indotto non lo sono.

B) Il vettore campo elettrico

1. Un campo elettrico risulta in genere *diverso* da punto a punto: se esploriamo un campo elettrico con una carica q_p di prova, possiamo infatti notare che la forza che il campo esercita su di essa è normalmente diversa, in valore e/o direzione, nei vari punti del campo.

2. Si pone il problema di «descrivere» il campo elettrico: di caratterizzarlo cioè in ogni punto in modo tale da poter poi prevedere quale forza, per effetto del campo, agirebbe sulle cariche elettriche introdotte nel campo. Ciò si ottiene definendo nei punti del campo una grandezza vettoriale denominata **intensità del campo elettrico** (oppure «vettore campo elettrico», e il più delle volte semplicemente «campo elettrico»). Tale grandezza si denota in genere con $\vec{E}$, e corrisponde al rapporto $\dfrac{\vec{F}}{q_\mathrm{p}}$, dove q_p è una carica di prova (la carica con cui esploriamo il campo), ed $\vec{F}$ è la forza che il campo esercita su q_p. È essenziale che q_p sia una carica puntiforme: sia perché vogliamo poterla collocare nei diversi «punti» del campo, sia soprattutto perché dobbiamo esplorare il campo con una carica estremamente debole se vogliamo che la sua introduzione nel campo non produca (per esempio attraverso fenomeni di induzione o di polarizzazione) modifiche nella distribuzione di carica che genera il campo, e quindi in definitiva nella struttura stessa del campo che vogliamo esplorare. Sotto questo aspetto, il vettore campo elettrico si potrebbe opportunamente definire come il limite a cui tenderebbe il rapporto $\dfrac{\vec{F}}{q_\mathrm{p}}$ qualora il valore della carica di prova tendesse a zero.[4]

3. Si osservi che il rapporto $\dfrac{\vec{F}}{q_\mathrm{p}}$ dipende solo dal campo elettrico, *non* dal valore o dal segno della carica di prova. Se infatti il valore di tale carica aumenta o diminuisce, anche il valore della forza a numeratore aumenta o diminuisce in proporzione[5], cosicché il valore del rapporto non varia. Se poi cambiamo segno alla carica, si inverte la direzione della forza, ma (proprio perché è anche cambiato il segno del denominatore) la direzione del vettore «forza diviso carica» resta la stessa.

---

[4] Con i simboli dell'analisi matematica, $\vec{E} = \mathrm{d}\vec{F}/\mathrm{d}q_p$.

[5] Infatti aumenta o diminuisce in proporzione (per la legge di Coulomb) il valore della forza proveniente da ognuna delle cariche puntiformi (eventualmente infinite) da cui il campo elettrico è generato.

4. Tutto ciò equivale a dire che se, in un punto del campo elettrico, è noto $\vec{E}$, noi sappiamo che una qualsivoglia carica puntiforme q portata in quel punto sarà soggetta a una forza $\vec{F}$ tale che il rapporto $\vec{F}/q$ sia uguale a $\vec{E}$. Ovvero: se conosciamo $\vec{E}$, sappiamo che su una carica puntiforme q introdotta nel campo agirà una forza $\vec{F} = q\vec{E}$. Dunque, conoscere $\vec{E}$ significa poter prevedere come agirà il campo, e in definitiva significa conoscere «come è fatto» il campo.

5. È chiaro che se la carica di prova avesse valore numerico +1, la forza $\vec{F}$ del campo su di essa e il vettore $\vec{F}/q_\mathrm{p}$ avrebbero identica direzione e identico valore numerico (anche se diverso significato e diverse dimensioni fisiche): in questo senso possiamo dire che il vettore $\vec{E}$ è *la forza del campo elettrico per unità (positiva) di carica.* Per capire dunque come è fatto, in valore e direzione, il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto dello spazio, basta vedere come sarebbe fatta in quel punto la forza del campo sulla carica puntiforme +1.

Esempio: campo elettrico prodotto da una carica puntiforme q. Come è immediato verificare, in ogni punto dello spazio il vettore $\vec{E}$ è parallelo alla retta che passa da q e dal punto considerato, ed è diretto verso q se q è negativa, in senso opposto se q è positiva. In termini del Sistema Internazionale, in un punto P a distanza r da q risulta

[A] $$\vec{E} = \frac{q\,\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0\, r^2},$$

avendo indicato con $\vec{u}_r$ un versore diretto da q verso P.

6. Si chiama *uniforme* un campo nel quale il vettore $\vec{E}$ ha in ogni punto lo stesso modulo e la stessa direzione. Si chiama *stazionario* un campo nel quale il vettore $\vec{E}$ (diverso in genere da punto a punto) si mantiene in ogni punto costante nel tempo (in valore e direzione).

7. Dal principio di sovrapposizione discende che il campo $\vec{E}$ prodotto da un certo sistema di cariche può essere determinato come somma dei campi che le singole cariche del sistema produrrebbero in assenza di tutte le altre. In particolare, come già sappiamo, all'interno di un materiale dielettrico che si estende a tutto il campo e che può essere schematizzato come omogeneo ed isotropo il campo $\vec{E}$ può essere espresso come $\vec{E}_0/\varepsilon_\mathrm{r}$, dove $\vec{E}_0$ è il campo in assenza di cariche di polarizzazione, e ε_r è la costante dielettrica relativa del mezzo.

8. L'unità internazionale per il vettore $\vec{E}$ è il newton/coulomb (N/C). Dato che, come si vedrà, il modulo di $\vec{E}$ corrisponde a una differenza di potenziale (unità internazionale il *volt*) diviso una lunghezza, nel Sistema Internazionale il valore di $\vec{E}$ viene anche espresso in volt a metro (V/m).

9. La Terra è portatrice di una carica negativa, perciò è circondata da un campo elettrico (diretto verso il suolo). L'intensità del campo elettrico terrestre, decrescente al crescere della distanza dal suolo, è circa 150 V/m a livello del mare, circa 100 V/m a 100 m di altezza sul livello del mare.

C) Linee di forza

1. Si chiama *linea di forza* di un campo elettrico una linea orientata, tangente ed equiversa in ogni suo punto al vettore $\vec{E}$. Chiaramente, conoscere una linea di forza vuol dire conoscere la direzione della forza che per effetto del campo agirebbe su una carica puntiforme posta sulla linea: se la carica è positiva la forza è tangente ed equiversa alla linea, se la carica è negativa la forza è tangente alla linea ma diretta in senso opposto.

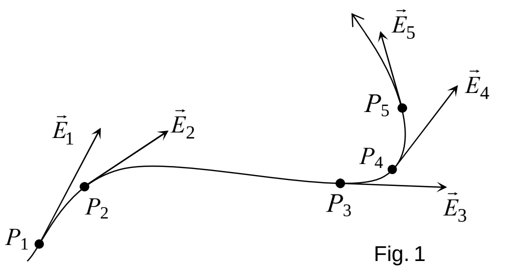

Fig. 1

Per ogni punto del campo passa una e una sola sola linea: nessuna linea può intersecarne un'altra, altrimenti nel punto di intersezione ci sarebbero due diverse direzioni per il vettore $\vec{E}$ (e per la forza del campo su una carica puntiforme).

Se una linea di forza è contenuta in un piano, è possibile rappresentarla in un disegno: un disegno che mostra l'andamento di alcune linee di forza può fornire una espressiva visualizzazione della struttura del campo.

2. Primo esempio: campo uniforme. Le linee di forza (fig. 2) sono rettilinee, parallele, equiverse.[6]

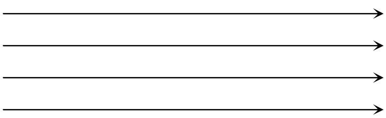
Fig. 2

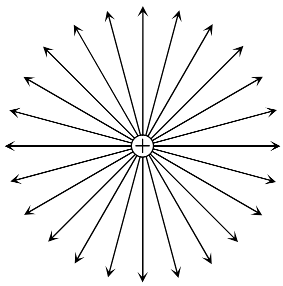
Fig .3

[6] Qualcosa di molto simile a un campo uniforme si può ottenere nello spazio tra due lastre metalliche parallele, poste una di fronte all'altra: se una almeno delle due lastre è carica di elettricità, e se la distanza tra le due lastre è piccola in rapporto alle dimensioni lineari delle due superfici prospicienti, su tali superfici vengono richiamate per induzione cariche uguali e contrarie (una carica q su una superficie, una carica $-q$ sull'altra) che producono nello spazio interposto un campo elettrico sensibilmente uniforme.

Secondo esempio: campo di una carica puntiforme q. Le linee di forza sono semirette che escono da q e si prolungano fino all'infinito se q è positiva (fig. 3), mentre provengono dall'infinito e si arrestano su q se q è negativa.

Terzo esempio: campo generato da due cariche puntiformi positive di ugual valore. Le linee hanno l'andamento mostrato in fig. 4. Si noti che il punto intermedio tra le due cariche è *fuori* dal campo, nel senso che in corrispondenza ad esso il modulo del campo $\vec{E}$ è zero.

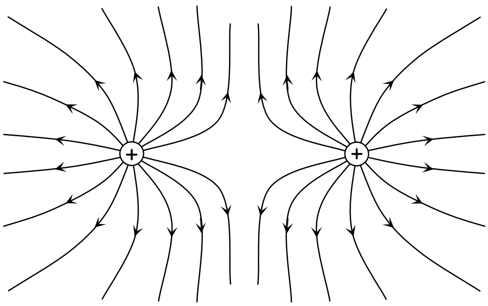

Fig. 4

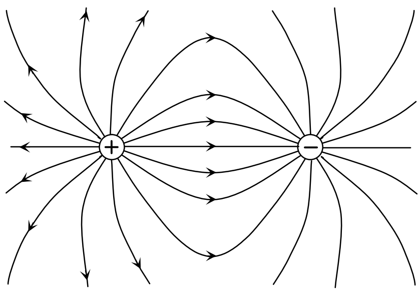

Fig. 5

Quarto esempio: campo generato da due cariche puntiformi uguali in valore assoluto ma di segno opposto. Le linee di campo hanno l'andamento rappresentato in fig. 5.

3. Come gli esempi sopra considerati mostrano, le linee di forza di un campo elettrostatico (un campo cioè prodotto da cariche elettriche, non da campi magnetici in variazione) sono sempre linee *aperte*: un punto che percorresse la linea muovendosi sempre nello stesso senso non ritornerebbe mai nella posizione di partenza. Una linea di forza parte da una carica positiva e si arresta su una carica negativa (a meno che uno dei due estremi non si trovi all'infinito, nel qual caso troviamo una carica elettrica solo all'altro estremo).

Si noti fin d'ora che in un campo elettrico indotto (il campo elettrico prodotto dalle variazioni di un campo magnetico) le linee di forza sono invece sempre linee *chiuse*: un punto che percorresse una linea di campo senza mai invertire senso di marcia, finirebbe per ritrovarsi a un certo momento nella posizione di partenza.

4. Dagli esempi sopra esaminati (in particolare, dalla fig. 3) risulta chiaramente che la distanza tra due linee di campo contigue è più o meno grande a seconda che il campo abbia intensità più o meno debole: se, spostandoci nel campo, vediamo che le linee contigue tendono a divergere (cioè a separarsi sempre di più l'una dalle altre), vuol dire che il campo si sta indebolendo. Nella fig. 2 le linee contigue si mantengono parallele, il che corrisponde a una intensità di campo sempre uguale.

5. È chiaro che nei disegni sopra riportati sono state rappresentate *solo alcune* delle infinite linee di forza del campo elettrico. Nulla, di per sé, impedisce di scegliere in modo del tutto arbitrario quante e quali linee rappresentare. Ma è anche chiaro che se rappresentiamo un campo uniforme con linee non equidistanti, o se (fig. 6) rappresentiamo un campo radiale in modo che non sia costante l'angolo tra linee contigue, diamo del campo una cattiva rappresentazione: nel caso della fig. 6, ad esempio, la mancanza di simmetria suggerisce l'idea errata che in punti come P e Q il valore di $\vec{E}$ possa risultare diverso.

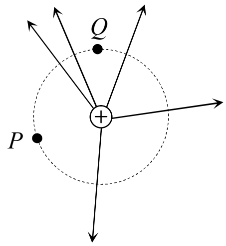

Fig. 6

6. Una più precisa corrispondenza tra il valore di $\vec{E}$ è la distanza tra linee di forza contigue si può ottenere rifacendosi al **criterio di Faraday**, in base al quale il valore di $\vec{E}$ è proporzionale al valore del rapporto N/A, dove A è l'area di una superficie attraversata a 90° dalle linee del campo e sulla quale il campo ha intensità costante, e N è il numero di linee di forza che attraversano tale superficie. Ciò presuppone che il numero delle linee di forza che escono da una carica positiva (o che si arrestano su una carica negativa) sia proporzionale al valore della carica, e che attorno a ogni carica puntiforme le relative linee di forza siano distribuite in modo simmetrico.

7. Primo esempio: campo prodotto da una carica puntiforme q. Consideriamo (fig. 7) due superfici sferiche aventi centro in q, una di raggio doppio dell'altra: tali superfici sono evidentemente perpen-dicolari in ogni punto alle linee del campo, e su ciascuna di esse il valore del campo è costante. Date le circostanze, le due superfici sono attraversate dalle stesse linee di forza: dunque, essendo l'area di S'' quattro volte più grande dell'area di S', il rapporto N/A ha per S'' un valore quattro volte più piccolo. A ciò corrisponde il fatto che nei punti di S'' il campo elettrico è quattro volte più debole.

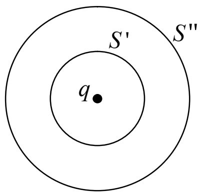

Fig. 7

8. Secondo esempio: campo prodotto da una retta r uniformemente carica. Le linee di forza sono semirette perpendicolari a r, con un estremo su r[7]. Due superfici cilindriche come quelle della figura a lato, una di raggio doppio dell'altra ma di uguale altezza, sono attraversate dalle stesse linee di forza: en-

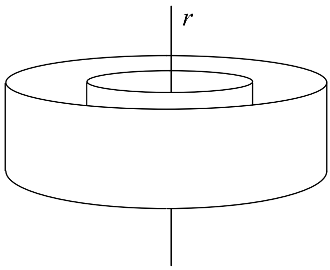

Fig. 8

7 Tali semirette sono infatti parallele in ogni loro punto P alla forza che la retta carica eserciterebbe su una carica puntiforme di prova posta in P.

trambe sono perpendicolari alle linee del campo, e su ciascuna di esse il campo ha un valore costante. Avendo la superficie più grande area doppia, il rapporto N/A è per essa due volte più piccolo che per l'altra: in effetti, come si vedrà più avanti, il campo elettrico prodotto da una ipotetica retta uniformemente carica ha intensità inversamente proporzionale alla distanza dalla retta.

9. Terzo esempio: campo prodotto da un piano α (indefinitamente esteso in tutte le direzioni) uniformemente carico. Le linee di forza sono semirette perpendicolari ad α[8]. Dunque, al crescere della distanza da α la distanza tra linee contigue resta invariata: il che equivale a dire che l'intensità del campo elettrico *non dipende* dalla distanza da α.

D) Il lavoro delle forze elettrostatiche

1. È immediato ricavare dalla legge di Coulomb che, se la distanza tra due cariche puntiformi q e q_1 passa dal valore iniziale r' al valore finale r'', il lavoro compiuto dalle forze con cui le due cariche interagiscono è

[A] $$L = \frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right).$$

Come si vede, il lavoro delle forze elettrostatiche di interazione non dipende in alcun modo dalla particolare traiettoria seguita dalle due particelle: il che significa che *le forze elettrostatiche sono conservative*. Si noti anche che (per una data coppia di cariche puntiformi) il lavoro delle forze di interazione dipende solo dalla distanza iniziale e da quella finale tra le due particelle, non dal fatto che si sia spostata una sola particella oppure entrambe[9].

---

[8] Tali semirette sono infatti parallele in ogni loro punto P alla forza che il piano carico eserciterebbe su una carica puntiforme di prova posta in P.

[9] Supponiamo infatti che la carica q subisca lo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{s}$, e che la carica q_1 subisca lo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{s}_1$. Se durante tali spostamenti la forza di q_1 su q è $\vec{F}$, per la legge di azione e reazione la forza di q su q_1 è $-\vec{F}$, e il lavoro complessivo delle due forze sarà $\mathrm{d}L = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + (-\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{s}_1 = \vec{F}\cdot(\mathrm{d}\vec{s} - \mathrm{d}\vec{s}_1)$, che è il prodotto scalare della forza agente su q per lo spostamento di q rispetto a q_1. Allora è chiaro che, ai fini del lavoro delle forze di interazione, ciò che interessa è lo spostamento di una carica rispetto all'altra: e più precisamente interessa di quanto una carica si sposta rispetto all'altra *nella direzione della forza*, di quanto quindi aumenta o diminuisce la distanza tra le due cariche. Se la distanza r tra le due cariche subisce l'incremento $\mathrm{d}r$, il lavoro delle forze elettrostatiche sarà $\mathrm{d}L = \dfrac{qq_1\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, positivo quando la distanza tra due cariche dello stesso segno aumenta (dr positivo) e quando la distanza tra due cariche di segno contrario diminuisce (dr negativo). Quando la distanza varia da r' a r'', il lavoro sarà $L = \displaystyle\int_{r'}^{r''}\frac{qq_1\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, da cui segue subito la [A].

2. Se le cariche puntiformi che interagiscono sono più di due, una variazione di posizione delle cariche comporta, per il principio di sovrapposizione delle interazioni elettrostatiche, un lavoro complessivo dato dalla somma di tanti lavori parziali (ognuno espresso da relazioni del tipo della [A]) quante sono le coppie di cariche.

3. Supponiamo ad esempio che una carica puntiforme q si sposti (fig. 8) dalla posizione iniziale P' alla posizione finale P'' nel campo prodotto da due cariche puntiformi q_1 e q_2 che per semplicità supponiamo fisse: il lavoro delle forze elettrostatiche applicate a q sarà in tal caso

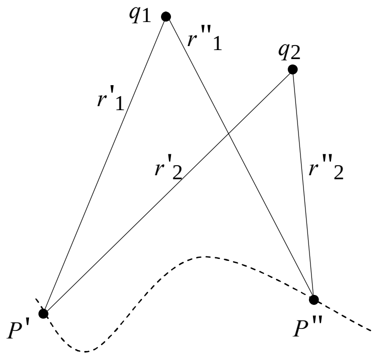

Fig. 8

[B] $$L = \frac{q\,q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r''_1}\right) + \frac{q\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r''_2}\right).$$

E) Energia potenziale elettrostatica

1. Essendo le forze elettrostatiche conservative, è possibile introdurre l'idea di energia potenziale elettrostatica come *lavoro eventuale delle forze elettrostatiche*. L'energia potenziale elettrostatica di una carica q in una posizione P rispetto al riferimento R è il *lavoro che le forze elettrostatiche applicate a q compirebbero in relazione a un eventuale spostamento di q da P a R*. L'energia potenziale elettrostatica di un sistema di N cariche è il lavoro che le forze elettrostatiche applicate alle N cariche compirebbero nel caso il sistema cambiasse configurazione, assumendo una certa configurazione di riferimento.

2. Ricollegandoci a quanto visto in meccanica, possiamo dire che il valore finale dell'energia potenziale elettrostatica è uguale al valore iniziale meno il lavoro delle forze elettrostatiche:

[A] $$EP_\mathrm{f} = EP_\mathrm{i} - L.$$

In modo equivalente, possiamo dire che il lavoro delle forze elettrostatiche (applicate a una carica, o a un sistema di cariche) è uguale alla *diminuzione* dell'energia potenziale elettrostatica (della carica o del sistema di cariche), intendendosi al solito per «diminuzione» la differenza tra il valore iniziale e quello finale:

[B] $$L = EP_\mathrm{i} - EP_\mathrm{f}.$$

Mentre dunque l'energia potenziale di una carica (o di un sistema di cariche) dipende dalla scelta del riferimento, le variazioni di energia potenziale ne sono del tutto indipendenti.

3. Esempio: si voglia esprimere l'energia elettrostatica *interna* di un sistema di 3 cariche puntiformi (fig. 9) rispetto all'infinito. Occorre determinare il lavoro che verrebbe compiuto da parte delle forze elettrostatiche interne in relazione all'aumento fino a un valore infinito della distanza di ogni carica dalle altre due: in base alla [A] del paragrafo precedente, tenuto conto che le distanze finali sono infinitamente grandi e quindi i loro reciproci sono zero, la risposta è

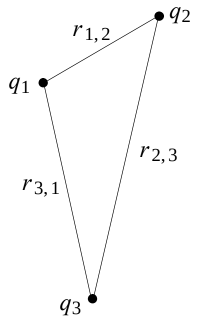

Fig. 9

[C] $$EP_\infty = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{2,3}} + \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{3,1}} \;.$$

4. Più in generale, per un sistema di N cariche puntiformi l'energia potenziale elettrostatica interna sarà la somma dell'energia potenziale di tutte le coppie di cariche del sistema:

[D] $$EP_\infty = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,j}}$$

dove gli indici i e j (che, come indicato nella formula, non devono mai essere uguali) assumono tutti i valori tra 1 ed N, e dove il simbolo $r_{i,j}$ indica la distanza tra la carica di indice i e la carica di indice j. Il coefficiente ½ tiene conto del fatto che nella [D] compare *due volte* il lavoro relativo alla separazione – fino a una distanza infinita – di una carica da un'altra (ad esempio, compaiono tanto il termine $q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}$ che il termine $q_2 q_1/4\pi\varepsilon_0 r_{2,1}$).

5. L'**energia elettrica** che viene prodotta nelle centrali, e che (con relativa bolletta di addebito) viene consumata nei diversi apparecchi utilizzatori, è proprio energia potenziale elettrostatica. Un apparecchio produce energia elettrica quando nell'apparecchio le cariche mobili procedono in senso contrario al senso delle forze elettrostatiche: essendo infatti in tal caso negativo il lavoro L nella [A], l'energia potenziale con cui le cariche escono dall'apparecchio è *superiore* a quella con cui sono entrate. Se invece le cariche mobili procedono nel senso stesso delle forze elettrostatiche, l'apparecchio consuma energia elettrica perché le cariche mobili escono dall'apparecchio con energia potenziale elettrostatica inferiore a quella con cui sono entrate.

6. Come si è già anticipato, le forze del campo elettrico indotto (il campo elettrico prodotto dalle variazioni di un campo magnetico) *non sono conservative*. Per una carica posta in un campo elettrico indotto non ha quindi senso parlare di energia potenziale.

F) Il potenziale elettrostatico

1. Come l'intensità del campo elettrico è la forza del campo per unità di carica, analogamente il potenziale è il lavoro delle forze del campo elettrostatico per unità di carica. Più precisamente, nel campo prodotto da un dato sistema S di cariche elettriche si definisce **potenziale elettrostatico** in A rispetto a R la grandezza

[A] $$V_{A(R)} = \frac{L_{A\to R}}{q_p}$$

in cui la carica a denominatore è una qualsiasi carica puntiforme di prova, mentre il lavoro a numeratore è quello che le forze elettrostatiche provenienti dalle cariche del sistema S compirebbero in relazione all'eventuale spostamento della carica di prova dalla posizione A alla posizione di riferimento R. Tenuto conto che $L_{A\to R}$ non è altro che l'energia potenziale della carica di prova in A rispetto a R, possiamo anche scrivere

[B] $$V_{A(R)} = \frac{EP_{A(R)}}{q_p}.$$

2. Le dimensioni fisiche del potenziale sono quelle di un lavoro diviso una carica elettrica. L'unità internazionale è il joule/coulomb, denominato volt (simbolo V). Si noti che, come l'energia potenziale elettrostatica, il potenziale elettrostatico *non può essere definito* per un campo elettrico indotto.

3. Esempio: nel campo prodotto da una carica puntiforme q, il potenziale in un punto A posto a distanza r da q rispetto a un punto di riferimento R posto a distanza r_R da q è

[C] $$V_R = \frac{\frac{q q_p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_R}\right)}{q_p} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_R}\right).$$

Se poi il riferimento R viene posto a distanza infinita, il potenziale in A rispetto a R (nel particolare campo qui considerato) diventa semplicemente

[D] $$V_\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

4. Per il principio di indipendenza delle interazioni elettrostatiche, *il potenziale è una grandezza additiva*: nel campo prodotto da N cariche, il potenziale è semplicemente la somma dei potenziali dovuti individualmente a ciascuna della N cariche. Ad esempio: nel campo prodotto da due cariche puntiforme q_A e q_B, in un generico punto P il potenziale rispetto all'infinito è

$V_\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B}\right)$, avendo indicato con r_A ed r_B le distanze di P da q_A e q_B rispettivamente.

5. Per la [B], l'energia potenziale rispetto a R di una carica puntiforme q posta in A è il prodotto di q per il potenziale in A rispetto a R. Se allora una carica puntiforme q si sposta da A a B, il lavoro delle forze elettrostatiche applicate a q è

[E] $$L_{A\to B} = EP_A - EP_B = q\,V_A - q\,V_B = q\,(V_A - V_B).$$

La differenza di potenziale $V_A - V_B$ viene spesso denominata *tensione* tra A e B.

6. Si osservi che l'energia elettrostatica interna di un sistema di cariche puntiformi (formula [D], pag. 194) può essere espressa nella forma equivalente

[F] $$EP_\infty = \frac{1}{2}\sum_i q_i\,V_{i(\infty)}$$

dove il simbolo u_i indica il potenziale (rispetto all'infinito) generato, nel punto in cui è posta la carica di indice i, da tutte le altre cariche (vale a dire, il lavoro che le forze provenienti dalle altre cariche compirebbero, per unità di carica, nel caso una carica puntiforme si spostasse da quel punto fino a una distanza infinitamente grande). Ad esempio, nel caso di tre cariche puntiformi il potenziale u_1 da porre nella relazione [F] è dato da $\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r_{1,2}} + \dfrac{q_3}{4\pi\varepsilon_0\, r_{1,3}}$.

Da quanto precede, e in particolare dalla [E], possono trarsi alcune deduzioni notevoli, che qui di seguito vengono esposte.

7. *L'elettronvolt*. Il lavoro di 1 J corrisponde al prodotto di 1 C per 1 V (cioè: 1 J è il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche quando la differenza di potenziale tra posizione iniziale e posizione finale di una carica puntiforme di 1 C è 1 V). Se invece la differenza di potenziale è 1 V, ma la carica è uguale a quella di un elettrone, il lavoro delle forze elettrostatiche si chiama **elettronvolt** (simbolo eV): essendo $1{,}60\times10^{-19}$ C il valore assoluto della carica di un elettrone, sarà analogamente

[G] $$1\ \text{eV} = 1{,}60\times10^{-19}\ \text{J}.$$

L'elettronvolt è una nuova unità di misura per il lavoro e per l'energia, molto usata (perché molto comoda) in fisica atomica, nucleare e delle particelle.

8. *Direzione delle forze elettrostatiche*. Come tutte le forze, anche le forze elettrostatiche tendono a spostare il punto su cui agiscono nella loro stessa direzione: tendono, in altre parole, a compiere un lavoro positivo. Per la [E], ciò si può esprimere dicendo che le forze elettrostatiche tendono a spostare le cariche positive verso posizioni a potenziale minore, le cariche negative verso posizioni a potenziale più elevato. Si noti attentamente che si tratta di una proprietà *puramente tendenziale*: anche se agiscono solo forze elettrostatiche, è sempre possibile che lungo la traiettoria di una carica positiva il potenziale vada almeno temporaneamente crescendo

anziché diminuendo, e cioè che il lavoro delle forze elettrostatiche risulti negativo anziché positivo.[10]

9. *Potenziale lungo le linee di forza*. Se percorriamo una qualsiasi linea di forza nel suo senso, troveremo che il valore del potenziale continua a diminuire. Una carica puntiforme positiva portata sulla linea è infatti soggetta a una forza diretta come la linea: se la carica viene spostata lungo la linea nel senso della linea, il lavoro della forza è positivo. Per la [E], anche la differenza tra i potenziali precedenti e quelli successivi deve quindi risultare positiva.

10. *Interdipendenza tra potenziale e vettore campo elettrico.*
Supponiamo di spostare una carica positiva puntiforme q lungo una linea di forza (del campo creato da altre cariche) nel senso stesso della linea, da una posizione P' a una posizione P'' posta a distanza infinitesima dl da P'. Se in P' il campo elettrostatico (prodotto dalle altre cariche) ha modulo E, la forza elettrostatica su q sarà qE, e il lavoro di tale forza in corrispondenza allo spostamento di q sarà $qE\,\mathrm{d}l$. D'altra parte, se nel passaggio da P' a P'' il potenziale subisce l'incremento du (e quindi la diminuzione $-\mathrm{d}V$), per la [E] lo stesso lavoro può anche essere espresso come $q(V'-V'') = q(-\mathrm{d}V)$. Per confronto tra le due espressioni del lavoro otteniamo

[H] $$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}.$$

In tale relazione, dl è la misura di uno spostamento infinitesimo nella direzione del vettore $\vec{E}$, e dV è il corrispondente incremento del potenziale. Essendo l'incremento dV negativo, la grandezza a secondo membro risulta positiva (come richiesto dal fatto che a primo membro figura il modulo di una grandezza vettoriale).

11. La [H] esprime una fondamentale correlazione tra la funzione scalare «potenziale elettrostatico» e la funzione vettoriale «campo elettrostatico». Il suo significato è il seguente: l'intensità del campo elettrico rappresenta (oltre che la forza del campo per unità di carica su una carica puntiforme di prova) anche la *rapidità di variazione del potenziale nella direzione del campo*, la rapidità cioè con cui diminuisce il potenziale (nel Sistema Internazionale, i «volt in meno a metro») lungo le linee del campo. In effetti, nel Sistema Internazionale l'intensità del campo elettrostatico viene molto spesso espressa in V/m anziché in N/C.
Esempio notevole: in un campo uniforme, se d è la distanza tra punti posti sulla stessa linea di forza e V è la corrispondente differenza di potenziale (valore assoluto), V/d è senz'altro l'intensità del campo.

12. Il significato della [H] può essere ulteriormente chiarito dalla seguente considerazione. Supponiamo di spostarci nel campo elettrostatico lungo una linea di forza,

---

[10] Esattamente come nel campo gravitazionale: nella sua orbita attorno al Sole, un pianeta si muove alternativamente in avvicinamento e in allontanamento.

e supponiamo di riportare in un diagramma cartesiano, in funzione della distanza percorsa, il valore del potenziale nei punti via via incontrati: avremo chiaramente un grafico a pendenza sempre negativa. Per la [H], la pendenza del grafico – cioè il coefficiente angolare della tangente al grafico – misura (a parte il segno) il modulo del vettore campo elettrico nei diversi punti della linea di forza considerata. Se ad esempio il campo è uniforme, il grafico del potenziale (fig. 10) ha pendenza (negativa) costante.

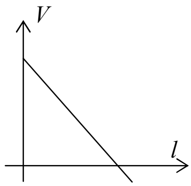

Fig. 10

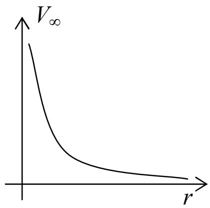

Fig. 11

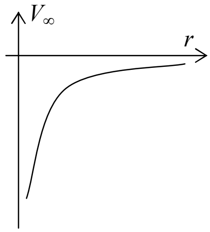

Fig. 12

Se il campo è quello creato da una carica puntiforme positiva, il potenziale rispetto all'infinito varia lungo una linea di forza secondo un'iperbole equilatera, la cui pendenza via via minore (fig. 11) mostra che al crescere della distanza r il campo è sempre più debole. Se la carica che crea il campo è negativa, il potenziale rispetto all'infinito è dato in funzione della distanza r da un'iperbole equilatera a valori negativi (fig. 12): in questo caso procedere lungo una linea di forza nel senso della linea significa considerare distanze sempre più piccole, e quindi pendenze sempre più forti nel grafico del potenziale, in accordo col fatto che in questo caso se ci si sposta nella direzione del campo si trovano intensità di campo via via più grandi.

13. *Superfici equipotenziali.* Se ci si sposta nel campo elettrostatico perpendicolarmente alla direzione del campo, si trovano punti a potenziale sempre uguale. Se infatti una carica di prova viene spostata perpendicolarmente alla forza che il campo esercita su di essa, il lavoro di tale forza è zero: e se il lavoro è zero, è zero la differenza di potenziale nella relazione $L_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$. Una qualsiasi superficie ortogonale in ogni suo punto alle linee del campo è quindi una superficie a potenziale costante: una **superficie equipotenziale**. *In particolare, è equipotenziale la superficie di un conduttore in equilibrio,* visto che su di essa il campo elettrico o è zero (nel qual caso lo spostamento di una carica puntiforme sulla superficie non implica lavoro, il che corrisponde a dire che tra un punto e un altro della superficie non ci sono differenze di potenziale), oppure è ortogonale alla superficie.

14. Viceversa, *una superficie equipotenziale è sempre ortogonale, in ogni suo punto, alle linee di forza:* per la relazione $L_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$, se una carica di prova viene spostata lungo una superficie equipotenziale la differenza a secondo membro è sempre zero, e quindi la forza elettrostatica applicata alla carica non compie mai lavoro: ciò significa che, spostandosi su una superficie equipotenziale, la carica di prova si sposta sempre perpendicolarmente alla forza, e quindi al campo $\vec{E}$.

15. Dovendo essere in ogni punto ortogonali alla direzione del campo, le superfici equipotenziali di un campo uniforme sono evidentemente piani paralleli. Nel campo prodotto da una carica puntiforme q, le superfici equipotenziali sono sfere aventi centro in q.

16. La direzione del campo $\vec{E}$ è la direzione in cui è massima la rapidità di diminuzione del potenziale. Si consideri infatti una porzione del campo elettrico abbastanza piccola da poter ritenere localmente uniforme il campo: se, a partire da un determinato punto, ci si sposta in una data misura nella direzione di $\vec{E}$ (o nella direzione opposta), ci si porta su una determinata superficie equipotenziale: se ci si sposta nella *stessa* misura in una *diversa* direzione, si arriva su una superficie equipotenziale intermedia tra quella iniziale e quella su cui si era giunti in precedenza, il che significa che la variazione del potenziale è questa volta inferiore.

17. Col formalismo differenziale la relazione tra la funzione $\vec{E}$ e la funzione V è espressa dalla relazione $\vec{E} = -\text{grad}\ V$ (il campo è il *gradiente* del potenziale col segno cambiato), il cui significato è sostanzialmente questo: $E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, dove x indica una generica direzione, dx uno spostamento infinitesimo in direzione x, dV il corrispondente incremento del potenziale. In ogni punto quindi del campo elettrostatico, il valore della componente x del vettore $\vec{E}$ si può ottenere cambiando segno al valore locale della *derivata parziale* del potenziale rispetto a x (con notazione più rigorosa, $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$).