Capitolo 12

Dinamica relativa

12.1 Le forze apparenti

1. Sappiamo dalla cinematica relativa che l'accelerazione $\vec{a}$ di un punto P in un riferimento K e l'accelerazione $\vec{a}'$ di P in un riferimento K' sono legate l'una all'altra dalla relazione

[A] $$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\mathrm{tr}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

dove $\vec{a}_{\mathrm{tr}}$ è *l'accelerazione di trascinamento* (l'accelerazione che il punto P avrebbe rispetto a K se, essendo rigidamente collegato a K', avesse in K' velocità $\vec{v}'$ zero e accelerazione $\vec{a}'$ zero), mentre il prodotto $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ (nel quale $\vec{\omega}$ è la velocità con cui K' ruota rispetto a K) rappresenta l'*accelerazione complementare* (o «di Coriolis»).

2. Se il moto di K' rispetto a K – e di K rispetto a K' – è traslatorio, $\vec{\omega}$ è zero e quindi è zero l'accelerazione complementare. Se poi il moto di traslazione di K' è rettilineo e uniforme, qualunque punto immobile in K' si muove in K di moto rettilineo uniforme, quindi oltre all'accelerazione complementare è zero anche l'accelerazione di trascinamento: pertanto $\vec{a} = \vec{a}'$, e dunque l'osservatore K e l'osservatore K' attribuiscono al punto P diversa velocità[1] ma uguale accelerazione. Se, più in particolare, uno dei due osservatori è inerziale (ed è quindi autorizzato a calcolare la forza applicata al punto P come prodotto tra massa e accelerazione, in accordo con la seconda legge di Newton), è inerziale anche l'altro, che alla stessa massa attribuisce la stessa accelerazione.

3. Supponiamo ora che K sia inerziale, ma che non lo sia K'. Il prodotto $m\vec{a}$ è in tal caso la forza vera, la forza $\vec{F}$ che effettivamente agisce su P, il prodotto $m\vec{a}'$ è invece la forza $\vec{F}'$ che K' ritiene erroneamente essere applicata a P.
Dalla [A] discende

[B] $$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{\mathrm{tr}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{C}.$$

Vale a dire: la forza $\vec{F}'$ rilevata da K' è in realtà la somma della forza effettiva $m\vec{a}$ e di due forze fittizie, inesistenti in quanto non legate a una interazione di P con altri corpi, ma solo al fatto che K', che non è inerziale, applica ciò nonostante – abusivamente – la seconda legge di Newton: tali forze apparenti (denominate a

[1] Si ricordi che è $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\mathrm{tr}}$, cioè la velocità in K è la somma della velocità in K' e della velocità di trascinamento, che è la velocità che il punto mobile avrebbe in K se in K' avesse velocità zero.

volte «forze d'inerzia»[2]) sono la **forza di trascinamento** $\vec{F}_{\mathrm{tr}} = -m\vec{a}_{\mathrm{tr}}$ e la **forza di Coriolis** $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$. Si noti che tali formule definiscono le forze apparenti che si osservano in K' in modo univoco, per il fatto che tutti gli osservatori inerziali attribuiscono a un dato riferimento non inerziale la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ e attribuiscono la stessa accelerazione $\vec{a}_{\mathrm{tr}}$ a un punto immobile in tale riferimento.

4. Dunque, in un riferimento non inerziale l'accelerazione di un punto si può ottenere dividendo per la massa del punto non la forza ad esso effettivamente applicata, ma la somma di tale forza con le forze apparenti. Più in generale: se, per spiegare o prevedere il moto dei corpi, vogliamo applicare le leggi della meccanica nei riferimenti non inerziali – cosa che a volte permette di arrivare più facilmente alla soluzione di un problema – dobbiamo mettere in conto, insieme alle forze effettive, anche le forze apparenti.

5. Si noti ancora che, mentre tutti gli osservatori inerziali attribuiscono a uno stesso punto la stessa accelerazione e vedono quindi la stessa forza (la forza vera), nei diversi riferimenti non inerziali (che possono muoversi l'uno rispetto all'altro nei modi più disparati) sono viceversa in generale *diverse* sia l'accelerazione $\vec{a}'$ di un punto, sia di conseguenza la forza $m\vec{a}'$ osservata.

6. Primo esempio. Pendolo su carrello che nel riferimento del laboratorio (riferimento che qui consideriamo inerziale) procede di moto rettilineo uniformemente vario con accelerazione $\vec{a}$: ciò che si osserva (fig. 1) è che il filo del pendolo tende ad assestarsi in una posizione in cui forma con la verticale un angolo θ definito da $\mathrm{tg}\theta = a/g$. Dal punto di vista degli osservatori inerziali ciò accade perché in tal modo il componente orizzontale della forza che il filo esercita sulla pallina è $m\vec{a}$ (il componente verticale è $-m\vec{g}$), il che rende conto dell'accelerazione $\vec{a}$ che gli osservatori inerziali (tutti) attribuiscono alla pallina. Dal punto di vista invece di un osservatore non inerziale solidale col carrello, la pallina è immobile, e la posizione anomala del filo si spiega col fatto che sulla pallina agiscono non solo il peso e la reazione del vincolo, ma anche una forza apparente di trascinamento $-m\vec{a}$ (la forza apparente di Coriolis è in questo caso zero sia perché è zero la velocità $\vec{v}'$ della pallina nel riferimento del carrello, sia perché è zero la velocità angolare del carrello).

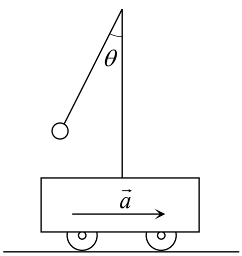

Fig. 1

[2] In quanto proporzionali alla massa (o quantità di inerzia) dei corpi su cui agiscono.

7. Secondo esempio: un carrello procede nel riferimento (inerziale) del laboratorio di moto rettilineo con accelerazione $\vec{a}$ costante equiversa alla velocità (la quale quindi aumenta linearmente nel tempo). A un tratto, dalla sommità di un'asta verticale di altezza h fissata al carrello si stacca una pallina che cade perdendo terreno rispetto al carrello: si osserva che, se la presenza d'aria è ininfluente, il punto di caduta della pallina sul carrello dista $h\,a/g$ dalla base dell'asta. Nel riferimento del laboratorio (fig. 2) la circostanza si spiega col fatto che, dal momento in cui la pallina si stacca dall'asta, la sua velocità orizzontale resta costante, mentre la velocità del carrello continua ad aumentare: nel tempo $T = \sqrt{2h/g}$ necessario alla pallina per arrivare a destinazione, lo spostamento orizzontale della pallina è $v_0 T$, quello del carrello è $v_0 T + a T^2/2$ (la differenza è $a T^2/2 = [a/2]\, 2h/g = h\,a/g$).

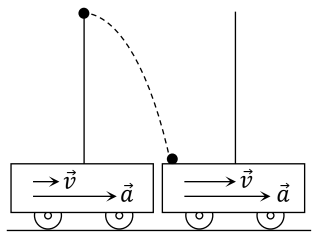

Fig. 2 – *Che cosa si osserva nel riferimento del laboratorio.*

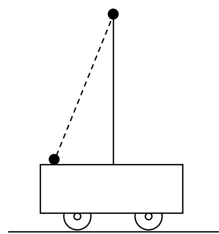

Fig. 3 – *Che cosa si osserva nel riferimento del carrello.*

Nel riferimento invece del carrello (fig. 3) le leggi di Newton (utilizzate abusivamente, perché il riferimento non è inerziale) portano a concludere che sulla pallina agisce oltre al peso mg anche una forza orizzontale $-m\vec{a}$ equiversa alla velocità che, nel riferimento del carrello, viene attribuita al laboratorio.

8. Terzo esempio (fig. 4): piattaforma che nel riferimento (inerziale) del laboratorio ruota con velocità angolare costante ω attorno al proprio asse geometrico: un blocchetto di massa m, appoggiato senza attrito sulla tavola rotante e vincolato con una molla all'asse di rotazione, ruota a sua volta con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio r, risultando immobile rispetto alla tavola. Per gli osservatori inerziali, il blocchetto ha un'accelerazione $\vec{a}$ di valore $\omega^2 r$ diretta in senso centripeto, e l'unica forza orizzontale ad esso applicata è la forza $m\omega^2 r$ proveniente dalla molla.

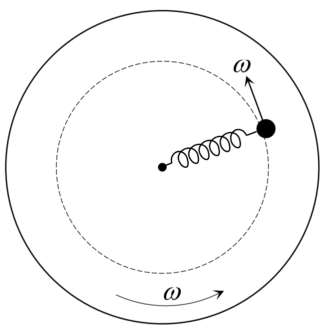

Fig. 4

Viceversa, un osservatore posto sulla piattaforma rotante (e in quiete rispetto ad essa) considera il blocchetto immobile, e se applica le leggi di Newton spiega tale immobilità col fatto che la forza proveniente dalla molla è esattamente compensata da una forza $-m\vec{a}$ di valore $m\omega^2 r$ diretta in senso centrifugo. È chiaro allora che nei riferimenti che, rispetto ai riferimenti inerziali, ruotano con velocità angolare costante attorno a un asse fisso, la forza di trascinamento (la forza apparente su un punto immobile nel riferimento rotante) ha il carattere di forza centrifuga.

9. Quarto esempio: dal centro della piattaforma rotante di cui sopra, l'osservatore non inerziale lancia con velocità $\vec{v}_0$ un blocchetto facendolo scivolare lungo il diametro d. Se non c'è attrito, nel riferimento «fisso» del laboratorio (fig. 5) il blocchetto è libero da forze orizzontali e percorre con velocità costante $\vec{v}_0$ una traiettoria rettilinea mentre la piattaforma gli ruota sotto. Dal punto di vista invece dell'osservatore non inerziale che ha effettuato il lancio (fig.6) la piattaforma è immobile, mentre il blocchetto percorre con velocità crescente una traiettoria che si incurva o verso destra o verso sinistra (a seconda che, vista dall'alto del laboratorio, la piattaforma appaia ruotare in senso antiorario oppure orario).

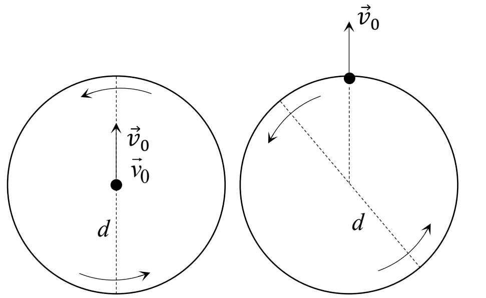

Fig. 5 – *Il punto di vista dell'osservatore fisso*

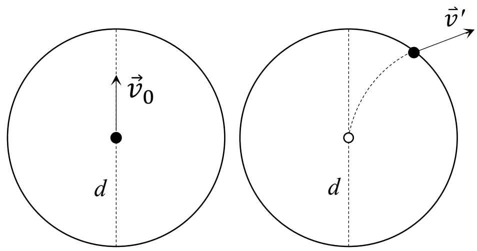

Fig. 6 – *Il punto di vista dell'osservatore rotante*

Se vuole spiegare il moto del blocchetto sulla base delle leggi di Newton, l'osservatore non inerziale deve mettere in conto una forza $m\omega^2 r$ diretta radialmente verso il bordo della piattaforma (forza centrifuga di trascinamento), e una forza di Coriolis di valore $2m\omega v'$ (dove v' è il modulo del vettore $\vec{v}\,' = \vec{v}_0 - \vec{v}_{tr}$) diretta perpendicolarmente alla traiettoria (in quanto perpendicolare a $\vec{v}\,'$) verso l'interno della curva.

Nota: la velocità di lancio è *la stessa* nei due riferimenti perché nella posizione iniziale la velocità di trascinamento è zero.

10. Osservazione. Il teorema dell'energia cinetica vale nei riferimenti non inerziali *solo se si tiene conto del lavoro della forza apparente di trascinamento* (la forza di Coriolis non compie lavoro essendo sempre perpendicolare alla velocità relativa $\vec{v}\,'$). Si ricordi che il lavoro delle forze e l'incremento dell'energia cinetica sono in generale *diversi* nei diversi riferimenti (dove sono uguali le forze applicate a un punto *P* ma risultano ovviamente diversi gli spostamenti subiti da *P*). Nel caso sopra esaminato, la forza di trascinamento ha direzione centrifuga: dato che, rispetto alla piattaforma, la velocità del blocchetto ha un componente radiale diretto anch'esso in senso centrifugo, il lavoro della forza di trascinamento è positivo, il che giustifica, dal punto di vista dell'osservatore solidale con la piattaforma, l'aumento della velocità.

12.2 Il riferimento Terra

1. Dal punto di vista degli osservatori inerziali (tutti), il movimento della Terra può essere schematizzato come una rotazione con velocità angolare costante ω = (2π rad) / (86400 s) = $7{,}29\times10^{-5}$ rad/s = 15°/h attorno a un asse – l'asse polare – che in un anno percorre una circonferenza attorno al Sole mantenendo una direzione fissa[3].

Perciò, l'osservatore terrestre (l'osservatore rispetto al quale la Terra è immobile) *non è inerziale*: e in molti casi non può spiegare ciò che osserva – o prevedere ciò che osserverà – se nelle leggi della meccanica non introduce, accanto alle forze effettive, le opportune forze apparenti.

2. Supponiamo dapprima che un corpo *C*, posto in prossimità della superficie della Terra, sia soggetto solo all'attrazione gravitazionale proveniente dalla Terra. La sua accelerazione nei riferimenti inerziali è $\vec{g}$, diretta verso il centro della Terra (che schematizziamo come una sfera). La sua accelerazione nel riferimento Terra è invece

[A] $$\vec{g}\,' = \vec{g} + \omega^2 R\cos\lambda\,\vec{u}_x - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

dove ω è la velocità angolare della Terra, R il raggio della Terra, λ la latitudine a cui *C* si trova, $\vec{u}_x$ il versore centrifugo (versore di un asse *x* che esce a 90° dall'asse terrestre, fig. 7), $\vec{v}\,'$ la velocità di *C* rispetto alla Terra.

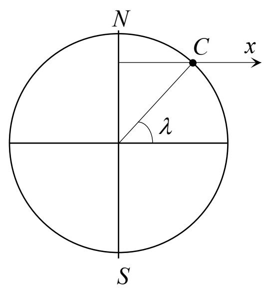

Fig. 7

Dunque, dal punto di vista dell'osservatore terrestre tutto va come se su *C* agissero, oltre al peso, *a*) una forza «di trascinamento» $m\omega^2 R\cos\lambda$ diretta perpendicolarmente all'asse terrestre in senso centrifugo; *b*) una forza «di Coriolis» perpendicolare all'asse terrestre e alla velocità relativa $\vec{v}\,'$, proporzionale al valore di

[3] Il moto *vero* della Terra è naturalmente più complicato: tra l'altro, la traiettoria della Terra non è una circonferenza ma un'ellisse, e la direzione dell'asse polare non è costante.