Capitolo 14
Urti

1. Il significato del termine «urto» non è, in fisica, rigidamente codificato, ma, quanto meno a livello macroscopico, è sostanzialmente quello stesso del linguaggio corrente: si pensi all'urto tra palle da biliardo, all'urto tra due automobili, agli urti subiti da una pallina che rimbalza sul pavimento. Parlare di urto tra due corpi significa dunque, anche in fisica, dire che i due corpi sono venuti a contatto, e che per effetto del contatto i due corpi interagiscono in senso repulsivo con forze di intensità molto grande in confronto a quella delle altre forze eventualmente ad essi applicate: cosicché nel tempo Δt dell'urto le condizioni del moto dei due corpi possono subire variazioni molto grandi in rapporto a quelle subite, prima dell'urto e dopo, in intervalli di tempo dello stesso ordine di grandezza, senza in pratica che subiscano variazioni le rispettive posizioni[1].
2. Tutto ciò si esprime dicendo che le forze che agiscono per effetto dell'urto hanno carattere *impulsivo*: se i corpi che si urtano sono vincolati, durante l'urto possono avere carattere impulsivo anche le reazioni vincolari. Due corpi *non vincolati* che si urtano costituiscono, durante l'urto, un sistema praticamente isolato, per il quale possiamo dunque assumere che si conservino l'energia complessiva, la quantità di moto e il momento angolare interno. In presenza invece di vincoli, tali grandezze possono non conservarsi.
3. Se le forze impulsive che si producono nell'urto di due corpi *non vincolati* sono conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva, e conseguentemente prima e dopo l'urto l'energia cinetica complessiva dei due corpi ha lo stesso valore: in tal caso l'urto si dice **elastico**. Altrimenti l'urto si dice **anelastico**, e *perfettamente anelastico* se per effetto dell'urto i due corpi restano uniti assieme (come accade quando una pallottola si conficca in un blocco di legno): in tale specifico caso la perdita di energia cinetica è la massima compatibile col fatto che, essendo per ipotesi il sistema dei due corpi, durante l'urto, sostanzialmente isolato, la quantità di moto del sistema e il suo momento angolare interno si devono conservare.

Si noti che nel caso di urto non perfettamente anelastico l'energia cinetica finale del sistema *potrebbe anche risultare superiore* a quella iniziale: si pensi per esempio al caso di due pattinatori che si urtano a bassa velocità e si respingono poi violentemente.

---

[1] In fisica si parla di «urto» anche a livello di particelle, per le quali il concetto di contatto perde evidentemente significato. Due particelle si «urtano» quando, col diminuire della distanza, l'intensità dell'interazione attrattivo-repulsiva tra di esse aumenta a un certo punto molto rapidamente producendo improvvise variazioni nello stato di moto. È in questo senso che «si urtano» le molecole di un gas, oppure un nucleo atomico e una particella α, oppure, in un filo metallico percorso da corrente elettrica, gli elettroni di conduzione e gli ioni positivi del reticolo cristallino.

4. L'urto si dice **centrale** quando la retta passante per i due centri di massa attraversa a 90° le superfici a contatto: in caso contrario l'urto si dice **obliquo**. L'urto tra due sfere omogenee, per esempio, è sempre un urto centrale, mentre l'urto tra i due blocchi di fig.1, supposti omogenei, non è centrale.

5. Si definisce **coefficiente di restituzione** il rapporto tra la velocità di separazione (velocità con cui, immediatamente dopo l'urto, la distanza tra i corpi aumenta) e la velocità di avvicinamento (velocità con cui, immediatamente prima dell'urto, la distanza tra i corpi diminuisce). Il valore del coefficiente di restituzione è chiaramente zero in un urto perfettamente anelastico, mentre in caso di urto elastico, come più avanti verrà dimostrato, vale 1.

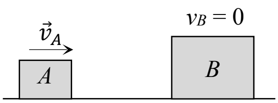

Fig. 1

6. Studiamo, ad esempio, l'urto elastico tra un blocco A avente velocità $\vec{v}_A$ in direzione x (fig. 1) e un blocco B inizialmente fermo, supponendo che possano entrambi scivolare, con o senza attrito, su un piano orizzontale. Denotiamo con v le componenti x delle velocità, e denotiamo con un apice le velocità dei blocchi dopo l'urto. Trattandosi per ipotesi di urto elastico, si conserva l'energia cinetica: $m_A v^2_A/2 = m_A v'^2_A/2 + m_B v'^2_B/2$, da cui segue

[A] $\quad m_A(v_A + v'_A)(v_A - v'_A) = m_B v'^2_B.$

Si conserva inoltre la quantità di moto, e in particolare la sua componente x: dunque $m_A\, v_A = m_A\, v'_A + m_B\, v'_B$, che significa

[B] $\quad m_A(v_A - v'_A) = m_B v'_B$. Se dividiamo la [A] per la [B] otteniamo

[C] $\quad v_A + v'_A = v'_B.$

Ponendo questa espressione di v'_B nella [B] otteniamo

[D] $\quad v'_A = v_A\,(m_A - m_B)\,/\,(m_A + m_B)$

Tenuto infine conto della [C] possiamo scrivere

[E] $\quad v'_B = v_A\, 2m_A\,/\,(m_A + m_B)$

La [C] significa che, *indipendentemente dal valore delle masse*, nel caso qui considerato di corpo B inizialmente immobile è sempre $v_A = v'_B - v'_A = v'_{B(A)}$, cioè la velocità con cui A si avvicina a B prima dell'urto è uguale alla velocità con cui B si allontana da A successivamente all'urto. Si noti che, essendo le velocità parallele a x, la [C] può essere anche scritta nella forma vettoriale

[F] $\quad \vec{v}_A + \vec{v}'_A = \vec{v}'_B.$

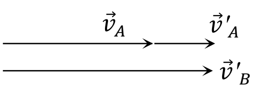

Fig. 2 – *La massa urtante m_A è più grande della massa urtata m_B.*

La [D] significa che con l'urto il blocco A perde in ogni caso velocità, e prosegue nella stessa direzione, oppure si ferma, oppure rimbalza all'indietro a seconda che m_A sia maggiore di m_B (fig. 2), uguale a m_B oppure minore di m_B (fig. 3): quando le due masse sono uguali si verifica quindi il *massimo*

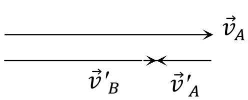

Fig. 3 – *La massa urtante m_A è più piccola della massa urtata m_B.*

possibile trasferimento di energia dalla massa urtante alla massa urtata. Se m_A/m_B tende a zero, v'_A tende a $-v_A$, se m_A/m_B tende a infinito v'_A tende a v_A (fig. 4).

La [E] mostra invece che la velocità acquisita da B con l'urto tende a zero (fig. 4) quando m_A/m_B tende a zero, è uguale a quella di A quando le due masse sono uguali, e tende a $2v_A$ quando m_A/m_B tende a infinito. Dunque, la velocità acquisita con l'urto (elastico) dal corpo urtato è *sempre inferiore al doppio* della velocità del corpo urtante.

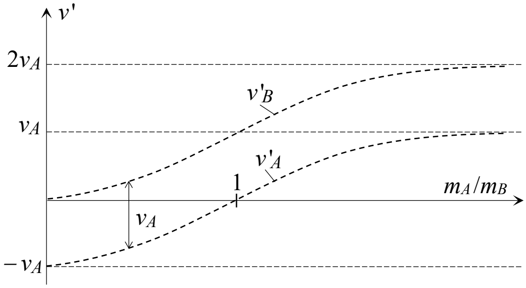

Fig. 4

7. Nel caso anche il blocco B fosse in movimento (parallelamente a x) prima dell'urto, in modo del tutto analogo si trova

[G] $\vec{v}_A + \vec{v}'_A = \vec{v}_B + \vec{v}'_B$

vale a dire

[H] $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}'_B - \vec{v}'_A$

relazione quest'ultima che ha il seguente significato: la velocità di A rispetto a B prima dell'urto e la velocità di B rispetto ad A dopo l'urto sono uguali. Il che corrisponde a dire che *nell'urto centrale elastico le velocità di avvicinamento e di separazione sono, indipendentemente dal valore delle masse, sempre uguali* (ed è quindi 1 il valore del coefficiente di restituzione).

Per le velocità dopo l'urto si trova

[L] $$v'_A = \frac{v_A(m_A - m_B) + 2v_B m_B}{m_A + m_B} \qquad v'_B = \frac{v_B(m_B - m_A) + 2v_A m_A}{m_A + m_B}$$

avendo assegnato a v_A e v_B lo stesso segno se equiverse.

Se ne può in particolare dedurre quanto segue:

- se le due masse sono uguali l'urto produce lo scambio delle velocità: $v'_A = v_B$, $v'_B = v_A$;
- se m_B è trascurabile rispetto a m_A la velocità di A resta pressoché invariata e quella di B diventa $v'_B \approx 2v_A - v_B$ (es. v_A = 5 cm/s, v_B = 1 cm/s, $v'_A \approx$ $\approx$ 5 cm/s, $v'_B \approx$ 9 cm/s; in ogni caso, velocità di allontanamento = velocità di avvicinamento = 4 cm/s);
- se m_A è trascurabile rispetto a m_B la velocità di B resta pressoché invariata e quella di A diventa $v'_A \approx 2v_B - v_A$ (es. v_A = 3 cm/s, $v_B = -10$ cm/s, $v'_A \approx -23$ cm/s, $v'_B \approx -10$ cm/s; in ogni caso, velocità di allontanamento = velocità di avvicinamento = 13 cm/s).
- in ogni caso, la velocità $v - v_{CM}$ (velocità di segno uguale se equiverse) con cui un corpo si avvicina al centro di massa del sistema prima dell'urto è uguale alla velocità $v_{CM} - v'$ cui dopo l'urto se ne allontana. Tenuto conto delle [L] e del fatto che è $v_{CM} = (m_A v_A + m_B v_B) / (m_A + v_B)$, la verifica è immediata. Una dimostrazione alternativa è data al problema 8.

8. Consideriamo infine l'urto tra sfere omogenee perfettamente lisce (niente attrito) con riferimento al caso generale di urto in due dimensioni (una almeno delle due velocità di impatto è dunque sghemba rispetto alla retta che passa per i due centri). Diamo senza dimostrazione gli intuitivi risultati sulla velocità dei due centri.

(*a*) Urto perfettamente anelastico. Sia α il piano tangente alle due sfere nel punto di contatto: a seguito dell'urto, i componenti di velocità paralleli ad α restano inalterati, quelli perpendicolari ad α diventano tra loro uguali (con un valore che si ottiene subito imponendo la conservazione della quantità di moto complessiva in tale direzione).

(*b*) Urto perfettamente elastico. I componenti di velocità paralleli ad α restano inalterati, quelli perpendicolari ad α variano nel modo più sopra indicato dalle relazioni [L].

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 In caso di urto tra due corpi, la quantità di moto si conserva solo se il sistema dei due corpi è isolato, e cioè non è soggetto a forze esterne (*vero* / *falso*).

2 L'urto tra due sfere è sempre un urto «centrale» (*vero* / *falso*).

3 Un blocco, fermo sul pavimento, viene colpito da una pietra la cui velocità ha sia un componente orizzontale che un componente verticale diretto verso il basso. Possiamo ritenere che, in assenza di attrito tra blocco e pavimento, la quantità di moto del sistema blocco+pietra si conservi nell'urto?

4 In un'esperienza di laboratorio, un carrello A di massa 1 kg e velocità 81cm/s raggiunge e colpisce un carrello B di massa 2 kg e velocità 30 cm/s, che procede nello stesso senso sullo stesso binario: sapendo che i due carrelli restano poi agganciati, determinarne la velocità dopo l'urto. Quanta energia cinetica, in percentuale, è andata perduta?

5 Supponiamo che i due carrelli del quesito precedente non restino agganciati, e che il carrello A perda nell'urto 44 cm/s di velocità. Come varierà in tal caso la velocità del carrello B? Quanta energia cinetica è andata perduta? Quanto vale il coefficiente di restituzione? Quanto varrebbe in caso di urto perfettamente elastico?

6 Due particelle identiche, A e B, si urtano in modo elastico: si dimostri che, se B è inizialmente immobile, dopo l'urto le due velocità sono ortogonali; a meno che la velocità di A non diventi zero, nel qual caso la velocità finale di B è identica in valore e direzione alla velocità originaria di A.

7 In un'esperienza di laboratorio, due carrelli sono stati lanciati nella stessa direzione sullo stesso binario: prima il carrello A, subito dopo, con velocità superiore, il carrello B, che dopo aver raggiunto A dovrebbe, nel programma dell'esperienza, restare agganciato ad esso. Sapendo che i due carrelli hanno uguale massa m = 2,00 kg, che immediatamente prima dell'urto le velocità sono rispettivamente v_A = 0,30 m/s e v_B = 1,00 m/s, e che subito dopo l'urto l'energia cinetica complessiva del sistema è 0,950 J, stabilire se i due carrelli

sono effettivamente rimasti attaccati l'uno all'altro. Si consideri ininfluente, ai fini della risposta, l'attrito radente sulle ruote dei carrelli.

8 Si dimostri che, in caso di urto elastico di due corpi che costituiscono un sistema isolato, la velocità con cui un corpo si avvicina al centro di massa del sistema prima dell'urto è uguale alla velocità con cui se ne allontana dopo l'urto.

9 In un parco giochi, una piattaforma girevole di raggio R si trova inizialmente in quiete. A un tratto, un bambino che corre lungo una retta tangente alla piattaforma salta sul suo bordo, cosicché piattaforma e bambino entrano assieme in rotazione. Posto che nessun attrito contrasti tale movimento di rotazione, si chiarisca:
(a) in quanto tempo il sistema compie un giro completo in assenza di attriti,
(b) che cosa accade, con l'urto, della quantità di moto del sistema,
(c) che cosa accade dell'energia, (d) a quale forza è sottoposta, durante la rotazione, la sbarra verticale su cui la piattaforma è imperniata.

10 Un'asta rigida omogenea di legno avente lunghezza h e massa M, disposta orizzontalmente come in fig. 5, può ruotare senza attrito attorno a un asse verticale z passante per il suo centro geometrico. Si trovi quale velocità di rotazione viene acquisita dall'asta se una pallina di cera di massa m la colpisce a un estremo con velocità orizzontale $\vec{v}$ perpendicolare all'asta rimanendo ad essa attaccata. Si chiarisca se nell'urto si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto.

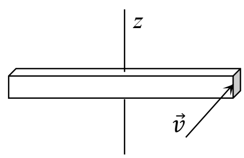

Fig. 5

11 Si supponga ora che l'asta del problema precedente appoggi senza attrito su una superficie orizzontale, e che la sua massa sia tre volte superiore alla massa m della pallina. Si valuti la perdita subita dall'energia cinetica nel riferimento del centro di massa.

12 Si consideri una massa gassosa confinata entro un recipiente cilindrico chiuso superiormente da un pistone mobile, e si studi come varia la velocità di una molecola a seguito di un urto elastico contro il pistone.

13 Una sferetta di massa M è fissata, come in fig. 6, all'estremo inferiore di un'asta rigida verticale, di lunghezza L e massa trascurabile, vincolata all'altro estremo a un perno P attorno al quale può ruotare senza attrito. Si calcoli con quale ampiezza angolare il sistema oscilla dopo che l'asta, inizialmente immobile, viene urtata in modo totalmente anelastico a metà della sua altezza da un corpo puntiforme K di massa $m = M/2$ in moto con velocità orizzontale $\vec{v}$. Si chiarisca inoltre se rispetto al CM il momento angolare si conserva, e si valuti in che modo l'urto influisce sull'energia cinetica e sulla quantità di moto del sistema.

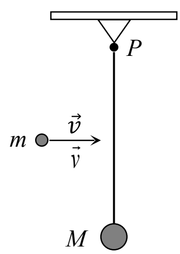

Fig. 6

SOLUZIONI

1 Falso: la quantità di moto si conserva se l'impulso delle forze esterne è zero, se cioè è zero il risultante di tali forze (come ad esempio nel caso ipotetico dell'urto tra due blocchi che scivolano lungo un piano orizzontale in assenza di attrito e di resistenza dell'aria). In realtà, nella risoluzione dei problemi accade spesso di poter considerare *praticamente isolato*, durante l'urto, un sistema non isolato in considerazione del fatto che l'impulso esercitato durante l'urto dalle forze esterne (ad esempio la resistenza dell'aria, oppure l'attrito, oppure la forza peso) è trascurabile in rapporto all'impulso delle forze interne.

2 Falso: l'urto si definisce centrale quando la normale alle due superfici nel punto di contatto contiene i due centri di massa. L'urto tra due sfere è quindi sicuramente centrale solo se i centri di massa sono localizzati nei rispettivi centri geometrici: ad esempio, se le due sfere sono omogenee.

3 No: durante l'urto, il componente verticale della quantità di moto del sistema viene modificato dall'impulso esercitato verso l'alto dal componente verticale della reazione del piano d'appoggio.

4 Prima dell'urto la quantità di moto del sistema è $m_A v_A + m_B v_B = 141\ \text{kg}\cdot\text{cm/s}$. Dato che la quantità di moto finale $(m_A + m_B)v$, con v incognita, ha lo stesso valore di quella iniziale, se ne deduce che è $v = (141\ \text{kg}\cdot\text{cm/s}) / (1\ \text{kg} + 2\ \text{kg}) =$
$= 47\ \text{cm/s}$. Prima dell'urto l'energia cinetica complessiva era
$m_A v_A^2/2 + m_B v_B^2/2 = (3280{,}5 + 900)\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2 = 4180{,}5\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$.
Dopo l'urto l'energia cinetica è $(m_A + m_B)v^2/2 = 3\ \text{kg} \times (47\ \text{cm/s})^2/2 =$
$= 3313{,}5\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$.
La perdita di energia cinetica è quindi $(4180{,}5 - 3313{,}5)\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2 =$
$= 867\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$; la perdita percentuale è $(867 \times 100 / 4180{,}5)\,\% = 20{,}7\,\%$.

5 La quantità di moto del sistema resta invariata: pertanto, se la velocità del carrello *A* diminuisce di 44cm/s, quella del carrello *B*, che ha massa doppia, deve aumentare di 22 cm/s. Il nuovo valore dell'energia cinetica è quindi 3388,5 $\text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$, con una perdita di $(4180{,}5 - 3388{,}5)\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2 = 792\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$, e una perdita percentuale del $(792/4180{,}5)\times100 = 18{,}9\%$. Come si vede, se l'urto non è totalmente anelastico la perdita di energia cinetica è inferiore: si conserva infatti non solo l'energia cinetica associata al moto del centro di massa, ma anche una parte più o meno grande dell'energia cinetica che il sistema possiede nel riferimento del CM[2]. Prima dell'urto la velocità di avvicinamento (la rapidità con cui la distanza tra i due carrelli diminuisce) è $(81-30)$ cm/s = 51 cm/s, dopo l'urto la velocità di separazione (la rapidità con cui la distanza tra i due carrelli aumenta) è invece $[(30+22) - (81-44)]$ cm/s = 15cm/s. Il coefficiente di restituzione vale perciò 15/51 = 0,294. In caso di urto elastico il suo valore sarebbe stato 1.

[2] Pro memoria: l'energia cinetica di un sistema si può sempre esprimere (teorema di König per l'energia cinetica) come somma dell'energia cinetica che avrebbe il CM se in esso fosse localizzata tutta la massa del sistema più l'energia cinetica che il sistema possiede nel riferimento del CM.