Capitolo 2

Approssimazioni

2.1 Perché approssimare

1. Nella vita di ogni giorno è normale fare uso di numeri approssimati: se dico che per arrivare a casa ci ho messo 20 minuti, che ho dovuto parcheggiare a 300 m di distanza, che sono le 11, che io peso 80 kg e che sulla Terra siamo in 6 miliardi, è a tutti evidente che sto «arrotondando»: i numeri che ho fornito sono tutti più o meno diversi dal numero vero: ma rendono bene l'idea, e giustamente io non cerco di essere più preciso. Così, se chiamo il vetraio perché sostituisca il vetro rotto di una finestra, mi aspetto di vederlo prendere le misure con un semplice, normalissimo metro snodato, o con un metro a nastro, non certo di vederlo armeggiare con sofisticate apparecchiature laser capaci di rivelare il millesimo di millimetro... tanta ricerca di precisione sarebbe palesemente assurda perché del tutto inutile.

2. Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, lo stesso accade nei calcoli della fisica. A volte si usano valori esatti, ma è quasi un'eccezione: i lati di un pentagono non sono «circa cinque», ma proprio cinque; il numero delle operazioni di misura effettuate per determinare il valore di una grandezza è un numero esatto (che serve per calcolare il valore più probabile della grandezza misurata); anche il valore di alcune grandezze fisiche è fissato *per definizione*, e pertanto, se venisse scritto con tutte le cifre che gli competono, sarebbe un numero esatto: ad esempio, la velocità della luce nel vuoto è, per definizione, esattamente $c = 299792458$ m/s[1]. Tuttavia, usare questo valore senza approssimare sarebbe, nella stragrande maggioranza dei casi – per lo studente ma anche per i fisici e gli ingegneri – una follia.

3. C'è almeno un caso in cui la necessità dell'arrotondamento è evidente: quando i numeri sono costituiti da infinite cifre (si pensi al numero π, oppure al numero $\sqrt{2}$, oppure al numero e, base dei logaritmi naturali, oppure al risultato di un'operazione del tipo 10 diviso 3, o 10 diviso 7). Ma il problema che ci poniamo è ben più generale. Il valore delle «costanti» della fisica (vedi tabella 1) è in certi casi noto con otto, nove, dieci e più cifre: *quante dobbiamo tenerne nella risoluzione dei problemi?* le nostre calcolatrici tascabili ci presentano in genere sul display una gran quantità di cifre, fino a dieci: *è necessario, nei calcoli, riportarle tutte?* spesso, lo studente che ha difficoltà con la fisica tende a portarsi dietro un numero spropositato di cifre senza arrotondare (probabilmente spera che gli venga se non altro riconosciuto il merito dello zelo). In realtà, tutto questo non è solo terribilmente scomodo: è del tutto inutile, e rappresenta quasi sempre un vero e proprio errore concettuale. Fisici e ingegneri sanno bene che, in fatto di precisione, il

---

[1] Ne deriva la definizione di metro, una volta stabilito che cos'è un secondo.

meglio è ciò che è sufficiente. Enrico Fermi ammoniva: *mai più precisione di quanto strettamente necessario!*

VALORE DI ALCUNE COSTANTI DELLA FISICA
(2020)

Velocità della luce nel vuoto	$c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s (esatto)
Carica elementare	$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C (esatto)
Massa dell'elettrone	$m_e = 9{,}109\,383\,7015 \times 10^{-31}$ kg
Massa del protone	$m_p = 1{,}672\,621\,923\,69 \times 10^{-27}$ kg
Massa del neutrone	$m_n = 1{,}674\,927\,498\,04 \times 10^{-27}$ kg
Costante dielettrica del vuoto	$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,8128 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 1{,}256\,637\,062\,12 \times 10^{-6}$ N·A^{-2}
Costante di Planck	$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J·s (esatto)
Costante dei gas	$R = 8{,}314\,462\,618...$ J·mol^{-1}·K^{-1} (esatto)
Numero di Avogadro	$N_A = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol^{-1} (esatto)
Costante di Boltzmann	$k = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J·K^{-1} (esatto)
Costante universale di gravitazione	$G = 6{,}674\,30 \times 10^{-11}$ m^3·s^{-2}·kg^{-1}

2.2 Come approssimare

1. Nel caso di un numero decimale, arrotondare significa eliminare uno o più decimali a partire dall'ultimo a destra. Si approssima *per difetto* quando la cifra che precede le cifre soppresse viene lasciata uguale, si approssima *per eccesso* quando tale cifra viene aumentata di 1. Tra l'approssimazione per eccesso e quella per difetto si sceglie ovviamente quella che porta a uno scarto minore tra numero originario e numero approssimato: così, se voglio eliminare un unico decimale nel numero 31,663 scrivo 31,66 (approssimazione per difetto). Se voglio eliminare due decimali, scrivo 31,7 (approssimazione per eccesso).

Altro esempio: supponiamo che il numero da arrotondare sia 2,99792458 (velocità della luce nel vuoto espressa in centinaia di milioni di metri al secondo, 10^8 m/s). I passaggi successivi (eliminazione di un numero di decimali via via più grande, fino a ottenere un numero intero) sono mostrati nella tabella a lato.

a)	2,997 924 58
b)	2,997 924 6
c)	2,997 925
d)	2,997 92
e)	2,997 9
f)	2,998
g)	3,00
h)	3,0
i)	3

Tabella 2 – *Arrotondamenti successivi nel valore della velocità della luce.*

2. La «regola pratica» è dunque chiara. Se, nel gruppo di cifre che vengono eliminate, la prima a sinistra è un 5 (*seguito da altre cifre*) o una cifra maggiore (seguita o no da altre cifre), si approssima per eccesso (la cifra che precede viene aumentata di 1, se tale cifra è 9 diventa zero e quella che precede aumenta di 1): si vedano ad esempio nella tabella i passaggi $a \to b$ (dove è stato eliminato l'ultimo decimale, 8, e il 5 che lo precede è diventato 6) e $a \to c$ (eliminazione di due decimali il primo dei quali è 5, il 4 che precede è diventato 5). Se invece, nel gruppo delle cifre che vengono eliminate, la prima è 4 o meno di 4, si approssima per difetto (la cifra che precede viene lasciata uguale): si veda nel riquadro il passaggio $a \to d$ (eliminazione di tre decimali il primo dei quali è 4, la cifra precedente è rimasta 2).

3. Un caso particolare si presenta quando l'approssimazione consiste nell'eliminare o semplicemente un 5 (passaggio $c \to d$ in tabella), oppure un 5 seguito solo da zeri: si approssima allora per difetto se si sa che il 5 proviene da un'approssimazione per eccesso (come in tabella), si approssima invece per eccesso se il 5 proviene da un'approssimazione per difetto. Ad esempio, 31,50 diventa 32 se il numero originario era 31,503, diventa 31 se il numero originario era 31,497. Se non sappiamo niente della storia precedente del numero, siamo liberi di approssimare per difetto o per eccesso.

4. Nel caso invece di un numero intero, l'arrotondamento consiste nel sostituire l'ultima cifra, o le due ultime, o le tre ultime… o tutte (tranne ovviamente la prima) con altrettanti zeri (se già non lo sono). Per il numero che precede la cifra che viene sostituita con uno zero, o la prima delle cifre sostituite con zero, ci si regola esattamente come si fa, nel caso dei numeri decimali, con la cifra che precede il decimale eliminato. Esempi:

427091 → 427090 → 427100 → 427000 → 430000 → 400000

506289 → 506290 → 506300 → 506000 → 510000 → 500000

324715 → 324710 (oppure 324720, se non conosciamo il precedente arrotondamento sui decimali, se cioè non sappiamo se il numero dato è stato reso intero arrotondando per eccesso o difetto: se il numero originario fosse stato 324714,8 dovremmo arrotondare a 324710, se fosse stato 324715,2 dovremmo arrotondare a 324720). In ogni caso, gli arrotondamenti successivi sono 324700 → 325000 → 320000 (qui si è approssimato per difetto perché in precedenza si è approssimato per eccesso: il numero originario 324715 è in effetti più vicino a 320000 che a 330000).

2897 → 2900 → 3000 (in questo caso l'arrotondamento sulla quarta cifra determina la variazione sia della terza che della seconda).

2998 → 3000 (in questo caso l'arrotondamento sulla quarta cifra determina la variazione di tutte le altre).

5. A volte un numero viene brutalmente arrotondato alla potenza di 10 più vicina: si dice in tal caso che del numero in questione si è dato l'**ordine di grandezza**: così, l'ordine di grandezza del numero 3627 è 1000, l'ordine di grandezza del numero 69617 è 100000. Ciò è utile quando (come in fisica avviene abbastanza spesso) interessano solo stime puramente indicative. Per esempio, l'ordine di

grandezza della massa espressa in kilogrammi è 10^{-30} per l'elettrone, 10^{-27} per il protone, 10^{-4} per una goccia d'acqua, 10^{2} per l'uomo, 10^{24} per la Terra, 10^{30} per il Sole, 10^{41} per la nostra galassia (la Via Lattea), 10^{52} per l'Universo.

6. Spesso in fisica si presenta l'opportunità di approssimare non un numero x, ma una funzione di x. Sono tipici i casi mostrati nella tabella 3 qui a lato, in cui si suppone che x sia piccolo in rapporto a 1 (l'errore introdotto con l'approssimazione tende a zero se x tende a zero).

Nella prima relazione n può essere sia positivo che negativo. Le tre ultime relazioni presuppongono che x sia la misura di un angolo *in radianti*. Per un angolo di 5°, ad esempio, possono essere senz'altro utilizzate: 5 non è affatto piccolo in rapporto a 1, ma 5 gradi corrispondono a 0,087 radianti, e 0,087 è meno di un decimo di 1.

$(1 \pm x)^n$	$\approx$	$1 \pm nx$
e^x	$\approx$	$1 + x$
$\ln(1 \pm x)$	$\approx$	$\pm x$
$\mathrm{sen}\,x$	$\approx$	x
$\cos x$	$\approx$	1
$\mathrm{tg}\,x$	$\approx$	x

Tabella 3 - *Approssimazioni valide per x << 1.*

7. La differenza (presa in valore assoluto) tra valore originario e valore approssimato è l'**errore assoluto** del valore approssimato. Il rapporto tra l'errore assoluto e il valore originario (preso in valore assoluto se espresso da un numero negativo, come ad esempio può accadere per una carica elettrica) è l'**errore relativo**. Moltiplicando l'errore relativo per 100 si ottiene l'**errore percentuale**. Chiaramente, l'entità dell'errore assoluto è poco indicativa: ben più significativi sono l'errore relativo e quello percentuale. Non diversamente, uno sconto di 1 € può avere un qualche rilievo se abbiamo mangiato una pizza, ma non è altrettanto interessante se stiamo comprando un'automobile.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 1,380 649, che moltiplicato per 10^{-23} esprime in unità internazionali il valore della costante di Boltzmann.

2 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 6,672 59, che moltiplicato per 10^{-11} esprimeva (2006) il valore della costante universale di gravitazione in unità internazionali.

3 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 2,997 924 58, che moltiplicato per 10^{8} dà il valore (esatto, per definizione) della velocità della luce nel vuoto in m/s.

4 Una vecchia quotazione della lira (moneta italiana) contro il marco (moneta tedesca) era 989,99 lire/marco. Si elimini in tale numero prima la cifra dei centesimi, poi anche quella dei decimi.

5 Determinare l'errore percentuale che si introduce assumendo che sia $\ln(1-x) = -x$
(a) quando $x = 0{,}5$ (b) quando $x = 0{,}1$ (c) quando $x = 0{,}05$.

6 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $e^x = 1 + x$
(a) quando $x = 1$ (b) quando $x = 0{,}5$ (c) quando $x = 0{,}1$.

7 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $(1+x)^n =$
$= 1 + nx$, quando $n = 3$ e quando è
(a) $x = 0{,}5$ (b) $x = 0{,}1$ (c) $x = 0{,}05$.

8 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $\operatorname{sen} x = x$
(a) quando $x = 1$ rad (b) quando $x = 0{,}5$ rad (c) quando $x = 0{,}1$ rad.

9 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $\cos x = 1$
(a) quando $x = 0{,}5$ rad (b) quando $x = 0{,}1$ rad (c) quando $x = 0{,}05$ rad.

10 Determinare quale errore percentuale si introduce attribuendo alla costante dei gas (R = 8,314510 J/mol·K, valore 2006) il valore di 8,31 J/mol·K.

SOLUZIONI

1 $1{,}380\,649 \to 1{,}380\,65 \to 1{,}380\,6 \to 1{,}381 \to 1{,}38 \to 1{,}4 \to 1$.

2 $6{,}672\,59 \to 6{,}672\,6 \to 6{,}673 \to 6{,}67 \to 6{,}7 \to 7$.

3 $2{,}997\,924\,58 \to 2{,}997\,924\,6 \to 2{,}997\,925 \to 2{,}997\,92 \to 2{,}997\,9 \to$
$\to 2{,}998 \to 3{,}00 \to 3{,}0 \to 3$.

4 $989{,}99 \to 990{,}0 \to 990$.

5 (a) Valore vero $-0{,}693\,1$..., valore approssimato $-0{,}5$, errore 0,193... (27,9%).
(b) Valore vero $-0{,}105$..., valore approssimato $-0{,}1$, errore 0,005... (5,09%).
(c) Valore vero $-0{,}051\,29$..., approssimato $-0{,}05$, errore 0,001 29... (2,52 %).

6 (a) Valore vero 2,718..., valore approssimato 2, errore 0,718... (26,4%).
(b) Valore vero 1,648..., valore approssimato 1,5, errore 0,148... (9,02%).
(c) Valore vero 1,105... valore approssimato 1,1, errore 0,005... (0,468 %).

7 (a) Valore vero 3,375, valore approssimato 2,5, errore 0,875 (25,9%).
(b) Valore vero 1,331, valore approssimato 1,3, errore 0,031 (2,33%).
(c) Valore vero 1,157 6..., approssimato 1,16, errore 0,002 3... (0,659%).

8 (a) Valore vero 0,841..., valore approssimato 1, errore 0,158... (18,8%).
(b) Valore vero 0,479..., valore approssimato 0,5, errore 0,020... (4,29%).
(c) Valore vero 0,099 8..., valore approssimato 0,1, errore 0,000 2 (0,167%).

9 (a) Valore vero 0,877 5..., valore approssimato 1, errore 0,122... (13,9%).
(b) Valore vero 0,995 0..., valore approssimato 1, errore 0,004 9... (0,502%).
(c) Valore vero 0,998 7..., valore approssimato 1, errore 0,001 2... (0,125%).

10 Valore noto 8,314510, valore approssimato 8,31, errore 0,00451 (0,0542%).

2.3 Errori di misura

1. Il valore *vero* di una grandezza è una pura astrazione: nella pratica, se si ripete molte volte il tentativo di ottenere la misura precisa di una data grandezza fisica, si ottiene ogni volta un valore un po' diverso, il che chiaramente significa che tutti i valori ottenuti, tranne eventualmente uno, sono sbagliati. Per quanto infatti si cerchi, nelle operazioni di misura, di essere attenti e meticolosi, l'esattezza del risultato è sempre limitata da cause di errore che sfuggono al controllo e che non è possibile eliminare.

2. Quando, su una stessa grandezza, effettuiamo una serie di misure, i cosiddetti **errori sistematici** spostano il risultato sempre in difetto oppure sempre in eccesso rispetto al valore vero, con uno scarto ogni volta uguale. Per questo motivo può essere molto difficile – se il valore vero non è già noto per altra via, e se non si procede alla stessa misura con altro procedimento o altra strumentazione – accorgersi della presenza di errori di questo tipo: al limite, in presenza di errori solo sistematici (eventualità puramente teorica), ripetendo le stesse operazioni si otterrebbe ogni volta lo stesso risultato, cosicché non avremmo alcun indizio circa la presenza di errori.

3. Viceversa, gli **errori casuali** (o **accidentali**, o **statistici**) spostano il risultato della misura a volte in difetto, a volte – con uguale probabilità – in eccesso rispetto al valore che si otterrebbe in assenza di errori casuali, con uno scarto ogni volta diverso: se gli errori sono solo casuali, in una serie di misure sulla stessa grandezza (e con la stessa procedura) la media aritmetica degli errori tende a zero quando il numero delle misure tende a infinito. Errori di questo genere si dicono *statistici* per il fatto che, *se la misura viene ripetuta molte volte*, i valori ottenuti possono essere sottoposti ad analisi statistica, ricavandone indicazioni di tipo probabilistico sia sul valore che si otterrebbe se gli errori casuali non ci fossero, sia sull'entità e la frequenza dei possibili risultati di nuove, eventuali operazioni di misura.

4. Sono tipici errori sistematici quelli imputabili a difetti dello strumento di misura: un righello poco preciso, un orologio che «va avanti», una bilancia che si è «starata» e quindi non segna zero quando dovrebbe... Sistematici sono anche gli errori che provengono da un uso errato della strumentazione, o dall'avere assunto nei calcoli un valore sbagliato per una delle grandezze da cui dipende il risultato (per esempio, la velocità del suono in quelle specifiche condizioni atmosferiche), nonché gli errori concettuali insiti nel procedimento di misura (determinazione dell'accelerazione di gravità misurando il tempo di caduta di un oggetto in presenza d'aria anziché nel vuoto). Un abile sperimentatore è normalmente in grado di controllare e ridurre praticamente a zero le cause di errore sistematico.

5. Sono invece di tipo casuale molti degli errori dovuti all'intervento dell'operatore (giudizio ogni volta un po' diverso sul tempo di inizio o di fine di un processo, valutazione ogni volta un po' diversa della posizione di un indice su una scala graduata, anticipi o ritardi ogni volta un po' diversi nell'azionamento dei pulsanti di un cronometro...). Possono essere causa di errori casuali anche le piccole, continue, inevitabili variazioni delle condizioni fisiche in cui si opera (temperatura, umidità, pressione atmosferica, tensione di alimentazione degli apparecchi

elettrici, campo magnetico...).

6. Se gli errori sistematici sono trascurabili, il procedimento di misura si dice *accurato*: in tal caso le misure ottenute – più o meno vicine tra di loro – risultano, se sono sufficientemente numerose, distribuite in modo simmetrico attorno al valore vero. Quando invece sono piccoli gli errori casuali, il procedimento di misura si dice *preciso*: in tal caso le misure ottenute, più o meno vicine al valore vero, sono comunque tutte molto vicine l'una alle altre.

7. La fig. 1 rappresenta i possibili errori in un esperimento di tiro a segno.
Nel caso *a*) gli errori sono equamente ripartiti nelle diverse direzioni (sopra e sotto, a destra e a sinistra del bersaglio): probabilmente il fucile è ottimo, ma il tiratore ha poca mira. Con la terminologia della teoria degli errori parleremmo di un esperimento accurato ma poco preciso.

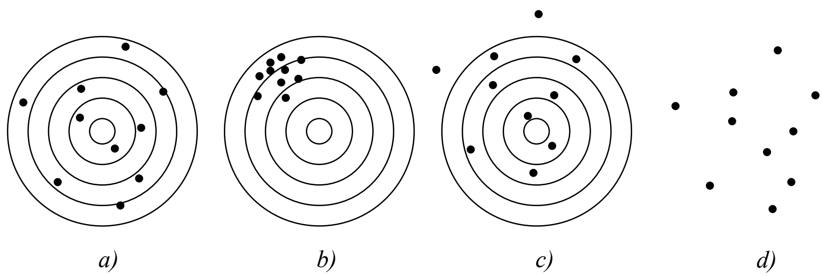

Fig. 1 – *Tiro a segno. Il risultato a) è determinato da errori di tipo casuale; il risultato b) è prodotto da errori di tipo sistematico; nel risultato c) si nota la presenza di errori sia casuali che sistematici; nel caso d) la posizione del bersaglio non è conosciuta: la presenza di errori casuali è evidente, ma nulla può essere detto circa la presenza di errori sistematici.*

Nel caso *b*) gli errori sono grandi, ma i punti colpiti sono tutti molto vicini tra di loro: il tiratore è bravo, ma forse il fucile non è all'altezza. È il corrispettivo di un esperimento di misura preciso ma poco accurato.

Nel caso *c*) gli errori sono grandi e non sono distribuiti con simmetria attorno al bersaglio: il tiratore non vale molto, ma anche il fucile non è un granché. Esperimento poco accurato e poco preciso.

Nel caso *d*) la posizione del bersaglio è ignota: la presenza di errori casuali è evidente (sparpagliamento dei colpi), ma non è possibile stabilire se ci siano anche errori sistematici. Analogia: se il valore vero di una grandezza non è conosciuto, l'analisi dei valori ottenuti ripetendo una misura non è in grado di rivelare la presenza di errori sistematici.

2.4 Dichiarazione dell'incertezza

1. Per il fatto che gli errori di misura sono inevitabili, i numeri che esprimono il risultato di operazioni di misura contengono sempre un margine di dubbio, un'incertezza più o meno grande. A volte l'entità dell'incertezza viene dichiarata esplicitamente, scrivendo il valore trovato nella forma $x \pm \Delta x$, dove x è il valore che si ritiene più probabile, e Δx (quantità sempre positiva) è per l'appunto l'incertezza da cui si ritiene possa essere affetta la misura ottenuta: più esattamente, l'**incertezza assoluta**, indicata spesso anche come *errore* assoluto[2]. Per esempio, se la misura di una lunghezza viene data, in una determinata unità, come 73,4 ± 0,9 significa che, a giudizio di chi ha effettuato la misura, il valore vero dovrebbe essere 73,4, e dovrebbe comunque trovarsi nell'intervallo tra 73,4 – 0,9 = 72,5 e 73,4 + 0,9 = 74,3.

2. Il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore più probabile (preso in valore assoluto se espresso da un numero negativo) rappresenta l'**incertezza relativa**:

$$\text{incertezza relativa} = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Chiaramente, la «validità» di una misura dipende non dall'incertezza assoluta, ma dall'incertezza relativa: se misuriamo una lunghezza di 10 km con un'incertezza di 1 m facciamo un lavoro molto più preciso che misurando una lunghezza di 10 m con l'incertezza di 1 cm (l'incertezza relativa è 1 su 10000 nel primo caso, 1 su 1000 – dieci volte più grande – nel secondo).

L'**incertezza percentuale** si ottiene moltiplicando per cento l'incertezza relativa:

$$\text{incertezza percentuale} = 100\,\frac{\Delta x}{|x|}.$$

Ad esempio, in una misura espressa come 73,4 ± 0,9 l'incertezza relativa è 0,9/73,4 = 0,012 e c'è un'incertezza percentuale dell'1,2%.

3. A volte, nelle misure di estrema precisione, l'incertezza relativa è così piccola che è conveniente esprimerla moltiplicandone il valore non per cento, ma per un milione: al posto dell'incertezza percentuale (che esprime l'incertezza in termini di *parti per cento*) si ottiene allora l'incertezza in *parti per milione*. Ad esempio, il valore trovato nel 1986 per la carica elettrica elementare (la carica del protone o, con segno negativo, dell'elettrone) era $1{,}602\,177\,33 \times 10^{-19}$ con un'incertezza relativa di 0,30 parti per milione ($0{,}30 \times 10^{-6}$), e quindi un'incertezza assoluta di $4{,}8 \times 10^{-26}$ (nel valore indicato, il 733 finale doveva in definitiva leggersi 733 ± 48).

4. La dichiarazione esplicita dell'incertezza è tipica del lavoro di laboratorio: *il valore più probabile coincide in questo caso con la media aritmetica x_m degli n valori ottenuti*; l'incertezza è di solito costituita dalla **deviazione standard** (simbolo σ), che corrisponde allo **scarto quadratico medio**: vale a dire, è la radice

---

[2] Il termine *errore* può dunque significare, a seconda del contesto, sia «differenza di valore prodotta da un arrotondamento» sia anche «incertezza» di una misura.

quadrata della media dei quadrati delle differenze tra valori ottenuti e valore medio. In formula:

[A] $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_m)^2}{n}}\ ,$$

dove $\sum$ è una somma i cui n addendi si ottengono attribuendo successivamente all'indice i tutti i valori interi da 1 a n (estremi inclusi):

$$\sum (x_i - x_m)^2 = (x_1 - x_m)^2 + (x_2 - x_m)^2 + (x_3 - x_m)^2 + \ldots + (x_n - x_m)^2 .$$ [3]

5. Il significato della deviazione standard è questo: se le misurazioni effettuate sono abbastanza numerose (diciamo non meno di qualche decina), il 68% dei valori ottenuti rientra nell'intervallo tra $x_m - \sigma$ e $x_m + \sigma$. Ovvero: se si procede a un'ulteriore misura – con le stesse modalità – della grandezza in esame, esiste il 68% di probabilità di ottenere un valore compreso entro tale intervallo.

6. In alternativa, l'incertezza può essere costituita dalla **deviazione standard della media** (simbolo σ_m), che si ottiene dividendo la deviazione standard σ per la radice quadrata del numero n delle misurazioni effettuate ($\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$) e *rappresenta l'incertezza (il grado di affidabilità) del valore medio x_m ottenuto*: se si effettuasse una serie di determinazioni del valore medio, ognuna costituita da un ugual numero n di misure, probabilmente il 68% dei valori medi così ottenuti differirebbe per meno di σ_m dalla loro media[4]. Ovviamente, l'incertezza sul valore medio è molto più piccola dell'incertezza relativa a una singola misura (il 68% di probabilità riguarda, nel caso del valore medio, un campo di valori $\sqrt{n}$ volte più ristretto).

7. A livello di esercitazione scolastica, il valore fornito per l'incertezza dal calcolo viene normalmente indicato approssimandone il valore con un numero contenente, dopo gli eventuali zeri iniziali, *una sola cifra diversa da zero*: a meno che tale cifra non sia 1 o eventualmente 2, nel qual caso, per non modificarne in modo troppo brutale il valore (sia la sottostima che la sovrastima dell'incertezza sono da evitare), può essere meglio indicare l'incertezza con due cifre diverse da zero. Ad esempio:

0,0341 → 0,03   0,0281 → 0,03   0,771 → 0,8   6,18 → 6
93,2 → 90 (si noti, una sola cifra diversa da zero)   519 → 500 (come prima)
0,138 → 0,14 (due cifre diverse da zero: approssimando 0,138 a 0,1 avremmo introdotto nel valore dell'incertezza una variazione di 38 su 138 (28%).

8. In linea generale, *la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa nel valore medio e nell'incertezza*. Se il valore medio è 186,77

---

[3] Alcuni Autori preferiscono porre $n-1$ a denominatore della [A]. Se le misure effettuate sono «sufficientemente numerose», la differenza è in pratica inapprezzabile.

[4] Ne deriva che, *in assenza di errori sistematici*, esiste il 68% di probabilità che il valore vero (la cui miglior stima è in questo caso il valore medio) sia compreso nell'intervallo $x_m \pm \sigma_m$.

e l'incertezza è stata approssimata a 0,3, scrivere la misura nella forma 186,77 ± 0,3 è *concettualmente errato*: dato che l'incertezza è una questione di decimi, il valore più probabile può ragionevolmente contenere informazioni sui decimi, ma non sui centesimi: la forma corretta è quindi 186,8 ± 0,3. Se, nella stessa misura, l'incertezza fosse 3 (quindi nelle unità), il valore più probabile può dare informazioni sulle unità ma non sui decimi: quindi non 186,77 ± 3 e neanche 186,8 ± 3, ma 187 ± 3. Se l'incertezza fosse 30 (nelle decine), il risultato può dare informazioni sulle decine ma non sulle unità: non 187 ± 30 ma 190 ± 30 (in tal modo, l'ultima cifra diversa da zero corrisponde alle decine sia nel valore medio che nell'incertezza).

9. Eccezione: se l'incertezza è espresso da un numero molto piccolo (1 o anche 2), può essere conveniente tenere nel valore medio una cifra significativa in più. Un risultato come 33,7 ± 5 non avrebbe molto senso (e dovrà quindi essere espresso come 34 ± 5), dato che l'incertezza (5) è molto più grande della variazione (0,3) che dobbiamo introdurre nel valore medio per approssimarlo all'unità superiore (non c'è dunque motivo per non approssimare). Potrebbe invece avere senso un risultato come 33,7 ± 1, perché se approssimiamo a 34 ± 1 il valore medio viene spostato verso l'alto di una quantità (0,3) non sufficientemente piccola in rapporto all'incertezza.

10. L'entità dell'incertezza di misura dipende da molte circostanze. Incertezze del 10%, che in linea generale sono l'effetto di procedimenti di misura alquanto grossolani, nel caso di misure molto difficili potrebbero rappresentare un successo. Reciprocamente, incertezze dell'1%, che a livello di laboratorio scolastico rappresentano di solito un risultato già buono, possono a volte essere ottenuti con operazioni di misura abbastanza elementari. Ad esempio, per misurare un intervallo di tempo di un'ora con un errore di un secondo serve solo un buon cronometro: in tal caso l'errore percentuale è estremamente piccolo, appena lo 0,03%.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

11 Si determini l'incertezza relativa e l'incertezza percentuale in una misura espressa dal numero 210,4 ± 0,9.

12 Si mostri come deve venire espressa l'incertezza se dal calcolo il suo valore risulta
(*a*) 0,538 (*b*) 2,69 (*c*) 0,140 (*d*) 18,06 (*e*) 1,28 (*f*) 0,0247 (*g*) 0,090.

13 Per il valore medio di una certa grandezza la calcolatrice ha fornito il valore 823,637. Si mostri come tale valore dovrebbe venire espresso se l'incertezza fosse
(*a*) 0,3 (*b*) 3 (*c*) 0,06 (*d*) 40 (*e*) 110 (*f*) 1,2 (*g*) 0,1.

14 Supponiamo che nella misura di una certa grandezza si siano successivamente ottenuti i seguenti valori numerici:
89,3 89,7 88,8 89,1 89,5 88,2 88,9 89,2 89,0 88,9.
Come dovrebbe essere espresso, allora, il risultato della misura? Si assuma come incertezza la deviazione standard (scarto quadratico medio) σ, e si calcoli il valore di σ basandosi sulla sua definizione.

SOLUZIONI

11 Incertezza relativa 0,9/210,4 = 0,0042, incertezza percentuale 0,42%.

12 (*a*) 0,5 (*b*) 3 (*c*) 0,14 (*d*) 20 (*e*) 1,3 (*f*) 0,025 (*g*) 0,090.
Nei casi (*a*), (*b*), (*d*), (*g*) è stata applicata la regola generale (una sola cifra diversa da zero dopo gli eventuali zeri iniziali). Negli altri casi si sono tenute due cifre diverse da zero, per evitare arrotondamenti troppo brutali.

13 (*a*) $823{,}6 \pm 0{,}3$ (*b*) 824 ± 3 (*c*) $823{,}64 \pm 0{,}06$ (*d*) 820 ± 40
(*e*) 820 ± 110 (*f*) $823{,}6 \pm 1{,}2$ (*g*) $823{,}63 \pm 0{,}1$ (approssimando a 823,6 avremmo spostato il valore medio verso il basso di 3 centesimi, una quantità non abbastanza piccola rispetto all'incertezza).

14 Il valore medio è 89,06. Gli scarti (valore assoluto) sono rispettivamente
0,24 0,64 0,26 0,04 0,44 0,86 0,16 0,14 0,06 0,16.
La somma dei quadrati dei dieci scarti è 1,544. Dividendo per 10 ed estraendo la radice quadrata si ottiene 0,393: questa è la deviazione quadratica media, che possiamo assumere come misura dell'incertezza scrivendo 0,4. In definitiva il risultato della misura è $89{,}1 \pm 0{,}4$.

2.5 Propagazione dell'incertezza

1. In molti casi, sottoporre una grandezza a misurazione diretta non è possibile, o almeno non è conveniente: la misura si può invece ottenere (è il concetto di *misura indiretta*, cfr. pag. 2) combinando opportunamente le misure di altre grandezze. L'area di un foglio si potrebbe determinare in modo diretto per confronto con un campione di area, ad esempio con un quadratino di carta ritagliato da un foglio di carta millimetrata: contando quante volte occorre sovrapporre il quadratino (o quanti quadratini occorre sovrapporre) per ricoprire l'intero foglio e moltiplicando poi per l'area del nostro campione otterremmo l'area del foglio. Ma possiamo arrivare al risultato in modo più rapido e più preciso per via indiretta, misurando la base e l'altezza del rettangolo e moltiplicando le due misure. Il volume di una sfera si può determinare indirettamente misurando il diametro, dividendo per due, elevando al cubo e moltiplicando per $4\pi/3$. Una velocità media si può ottenere misurando la lunghezza del percorso e il tempo impiegato, e dividendo la prima misura per la seconda. E così via.

2. Sennonché, ogni misura contiene un'incertezza (un errore) più o meno grande: come si combinano le incertezze quando due o più misure vengono sommate o moltiplicate? Come *si propagano* le incertezze dai dati iniziali al risultato finale? Fortunatamente, le relative regole sono molto semplici.
(*a*) Prodotto di una grandezza per un numero esatto N: l'incertezza contenuta nel risultato è N volte più grande di quella contenuta nella misura della grandezza. Esempio: se, in una certa unità, la lunghezza del lato di un triangolo regolare è $12{,}4 \pm 0{,}9$, il perimetro del triangolo è $(3 \times 12{,}4) \pm (3 \times 0{,}9) = = 37{,}2 \pm 2{,}7$ (che diventa 37 ± 3).

(*b*) Somma o differenza di grandezze: l'incertezza contenuta nel risultato è la somma delle incertezze contenute nelle misure originarie. Se la misura della grandezza

A è 25,2 ± 0,6 e la misura della grandezza B è 16,7 ± 0,3, la misura della differenza $A - B$ è (25,2 − 16,7) ± (0,6 + 0,3) = 8,5 ± 0,9.

(*c*) Prodotto o quoziente di grandezze: l'incertezza *relativa* del risultato è la somma delle incertezze relative delle misure originarie (e lo stesso vale per le incertezze percentuali). Esempio: se la misura della grandezza A è 731 ± 6 e la misura della grandezza B è 127 ± 2, nella misura del rapporto A/B l'incertezza relativa è $\frac{6}{731} + \frac{2}{127} = 0{,}008 + 0{,}016 = 0{,}02 = 2\%$. Perciò nella misura del rapporto A/B il valore più probabile è 731/127 = 5,76, e l'incertezza assoluta è 5,76 × 0,02 = 0,1. In definitiva, la misura di A/B è 5,8 ± 0,1.

(*d)* Grandezza elevata alla N: l'errore *relativo* nel risultato è uguale a N volte l'errore contenuto nella misura della grandezza. Se, ad esempio, la misura del lato di un cubo in millimetri è 23,8 ± 0,3, l'errore relativo è 3/238 = 0,0126. Perciò, il volume è noto con un'incertezza relativa 3 × 0,0126 = 0,0378. Il valore più probabile per il volume è $23{,}8^3$ mm^3 = 13 481,272 mm^3. Moltiplicando tale valore per l'incertezza relativa si ottiene che il volume del cubo è noto con un'incertezza assoluta di 509 mm^3. In definitiva, il volume del cubo deve essere espresso come (13500 ± 500) mm^3 (se l'incertezza è una questione di centinaia, il valore più probabile non può dare informazioni su decine e unità).

3. Osservazione: se le incertezze delle misure originarie si possono considerare indipendenti l'una dall'altra, e se è ragionevolmente sicura l'assenza di errori sistematici, nelle regole (*b*) e (*c*) conviene sostituire la semplice somma aritmetica degli errori (o degli errori relativi) con la somma «in quadratura» (o *somma quadratica*): vale a dire, con la radice quadrata della somma dei quadrati. Con ciò, il valore dell'incertezza risulta sempre diminuito (anche se non sempre in modo significativo), il che risulta opportuno da considerazioni relative alla probabilità del combinarsi degli errori casuali.

L'idea della somma in quadratura *non può* evidentemente applicarsi alla potenza di una grandezza: elevare alla N la misura una grandezza significa moltiplicare N volte per sé stessa quella misura, ed è ben chiaro che in tale prodotto le misure che vengono moltiplicate non sono indipendenti l'una dalle altre.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

15 Per il volume interno di una bombola è stato trovato il valore (30,18 ± ± 0,04) ℓ. Qual è allora il volume complessivo di 12 bombole identiche?

16 Il peso di un foglio di carta di area 1m^2 è stato valutato come (80,4 ± ± 0,7) g. Che cosa si può dire del peso di 1 cm^2 di quella carta?

17 Per i lati a, b, c di un triangolo si sono ottenute le seguenti misure (in cm): (*a*) 15,12 ± 0,07 (*b*) 8,71 ± 0,05 (*c*) 10,44 ± 0,09.
Qual è la misura del perimetro?

18 Il peso di un secchio vuoto è (1,44 ± 0,03) kg, il peso dello stesso secchio pieno d'acqua è (12,38 ± 0,06) kg. Qual è il peso dell'acqua?

SOLUZIONI

15 L'incertezza sul volume totale è $(12 \times 0{,}04)\ \ell = 0{,}48\ \ell$ che scriviamo come $0{,}5\ \ell$. Il volume totale più probabile è $(12 \times 30{,}18)\ \ell = 362{,}16\ \ell$. La misura del volume totale è pertanto $(362{,}2 \pm 0{,}5)\ \ell$.

16 Dato che 1 cm^2 è 10 000 volte più piccolo di 1 m^2, il valore più probabile per il peso di 1 cm^2 è $80{,}4 \times 10^{-4}$ g, l'incertezza è $0{,}7 \times 10^{-4}$ g.

17 L'incertezza è la somma delle incertezze: $0{,}07 + 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}21 \rightarrow 0{,}2$. Il valore più probabile è la somma dei valori più probabili: $15{,}12 + 8{,}71 + 10{,}44 = 34{,}27$. Allora la lunghezza del perimetro (in cm) è 34,3 $\pm$ 0,2. Sommando invece le incertezze in quadratura (come normalmente è meglio fare) avremmo ottenuto $\sqrt{0{,}07^2 + 0{,}05^2 + 0{,}09^2} = 0{,}124$, da arrotondarsi a 0,12 (sommando in quadratura si ottiene sempre un valore minore). La misura del perimetro sarebbe stata espressa da $(34{,}27 \pm 0{,}12)$ cm.

18 Il valore più probabile è $(12{,}38 - 1{,}44)$ kg = 10,94 kg, l'incertezza è la somma delle incertezze: $(0{,}03 + 0{,}06)$ kg = 0,09 kg. L'acqua contenuta nel secchio pesa quindi $(10{,}94 \pm 0{,}09)$ kg. Sommando le incertezze in quadratura (meglio) avremmo ottenuto $\sqrt{0{,}03^2 + 0{,}06^2} = 0{,}07$.

2.6 Approssimazione implicita

È la stessa cosa scrivere 5 km oppure 5000 m? È la stessa cosa scrivere 53 kg, o 53,0 kg, o 53,00 kg? Da un punto di vista aritmetico sì, in fisica no. Quando, nei dati di un problema, l'incertezza di una misura non è indicata in modo esplicito, è di solito sottinteso che *l'ultima cifra del numero definisce, con la sua posizione decimale, il grado di approssimazione*. Ciò è del tutto ovvio: se il numero 73,4 – nel quale l'ultima cifra corrisponde a decimi – è il risultato di un'approssimazione, e se l'approssimazione è stata effettuata correttamente, il numero originario non poteva che essere compreso tra 73,35 e 73,45. Scrivendo quindi 73,4 l'errore introdotto risulta certamente inferiore ai 10 centesimi (= 1 decimo): il numero 73,4 è, come si dice, *approssimato a meno di un decimo*.

Nel numero 24 l'ultima cifra è quella delle unità. La misura è quindi approssimata all'unità più vicina, o *a meno di un'unità*: l'errore che possiamo commettere prendendo per buono il numero 24 dovrebbe essere inferiore a 1. In effetti, se il risultato di una misura viene dato come 24, dobbiamo pensare che – nella stima di chi fornisce la misura – il valore vero della grandezza misurata è più vicino a 24 che a 23 o a 25, e quindi dovrebbe porsi tra 23,5 e 24,5.

Nel numero 24,0 l'approssimazione è nei decimi, perciò l'incertezza è 10 volte più piccola che nel numero 24. Qui poi si verifica una particolare circostanza: dato