Capitolo 10

Attrito

PARAGRAFI DEL TESTO

10.1 Che cos'è l'attrito

10.2 Attrito radente

10.3 Il lavoro dell'attrito radente

10.4 Attrito volvente

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 L'attrito radente si manifesta quando un corpo striscia, l'attrito volvente quando un corpo rotola (*vero*/*falso*).

2 Una pallina scende rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato. L'attrito che produce il rotolamento deve considerarsi statico o dinamico?

3 Un blocco K di peso 20 kg è immobile su un piano orizzontale, soggetto solo al peso e alla reazione del piano d'appoggio: il coefficiente d'attrito statico tra le superfici a contatto è $\mu_0 = 0{,}4$. Si determini:
(*a*) la forza d'attrito sul blocco,
(*b*) il massimo valore di una forza orizzontale sul blocco se vogliamo che l'equilibrio non sia compromesso,
(*c*) il valore della forza d'attrito se al blocco viene applicata una forza orizzontale di 5 kg.

4 La forza d'attrito statico tra due superfici assegnate può teoricamente raggiungere valori grandi a piacere (*vero*/*falso*).

5 Un blocco di peso 60 kg è appoggiato sul pavimento di un ascensore. Trovare il massimo valore per la forza di attrito statico (coefficiente $\mu_0 = 0{,}5$):
(*a*) quando l'ascensore viaggia con velocità costante,
(*b*) quando l'accelerazione dell'ascensore è $a = (9{,}81/5)$ m/s^2 verso l'alto (o verso il basso).

6 Un blocco è soggetto solo al peso e alla reazione di un piano d'appoggio. Sapendo che il blocco resta in equilibrio fino a che l'angolo θ del piano d'appoggio sul piano orizzontale non supera i 34°, si determini il coefficiente d'attrito statico tre le due superfici a contatto.

7 Nella stessa situazione della domanda precedente, come si potrebbe determinare il coefficiente d'attrito dinamico in base all'inclinazione del piano?

8 (*a*) In che direzione agisce sulle ruote la forza d'attrito radente alla partenza di un'automobile? (*b*) In che direzione, se l'automobilista toglie gas?

(c) In che direzione, se l'automobilista frena? (d) Per quale ragione in una frenata a ruote bloccate lo spazio d'arresto può risultare più grande?

9 Una sfera è costituita per metà di sughero, per metà d'ottone. Supponiamo di tenere in equilibrio la sfera su un piano orizzontale in modo che il piano di separazione delle due semisfere risulti verticale. Se lasciamo andare la sfera, come si muoverebbe il suo baricentro in assenza di attrito?

10 Dovendo calcolare la forza d'attrito dinamico su un corpo di peso P che scivola su una superficie concava (fig. 8), uno studente ha moltiplicato il componente P_n del peso sulla normale alla superficie d'appoggio per il coefficiente d'attrito radente dinamico. Quale errore ha commesso?

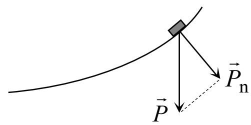

Fig. 8

11 Le forze d'attrito possono compiere solo lavoro resistente (*vero*/*falso*).

12 Se un corpo K, soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, scivola in linea retta da A B lungo un piano inclinato, il lavoro compiuto dalla forza d'attrito radente 'sul centro di massa' (cfr. punti 12 e 14, pag. 264 e 265) dipende solo dalla distanza orizzontale d tra A e B, non dal dislivello h tra i due punti (*vero*/*falso*).

13 Sulla ruota di una carriola, di raggio $R = 20$ cm, grava un carico di 50 kgf. Il coefficiente d'attrito radente statico tra ruota e terreno è $\mu_0 =$ $= 0{,}7$, il coefficiente d'attrito volvente è $\mu_V = 0{,}03$.
(a) Quale forza orizzontale minima occorre venga applicata dal perno alla ruota per produrne il moto di rotolamento?
(b) Quale sarebbe la risposta se la ruota avesse un raggio di 10 cm?
(c) Se la ruota non potesse girare (ruota bloccata), quale sarebbe la forza minima capace di produrne il moto di strisciamento?

14 Un blocco K di 20 kg è immobile su un piano orizzontale, soggetto al peso e alla reazione del piano d'appoggio: il coefficiente d'attrito statico tra le superfici a contatto è $\mu_0 = 0{,}4$.
(a) Se al blocco viene applicata una forza $\vec{F}$ inclinata rispetto al piano orizzontale di 30° verso il basso, qual è il massimo valore che, senza pregiudizio dell'equilibrio, può assumere $\vec{F}$?
(b) A quale valore minimo può scendere, facendone variare l'inclinazione, la forza capace di mettere il blocco in movimento?

15 Un blocco scivola sul pavimento percorrendo 240 cm in 1 s prima di arrestarsi. Quanto vale il coefficiente di attrito radente tra blocco e pavimento?

16 (a) Si osserva che un piccolo blocco K si può mantenere aderente alla parete interna di un contenitore cilindrico (asse verticale, raggio $R = 30$ cm) senza scivolare sul fondo, purché il cilindro ruoti attorno al proprio asse con velocità angolare sufficientemente elevata. Come mai?

(b) Se K è soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, e se il coefficiente d'attrito radente statico tra blocco e superficie interna del cilindro è $\mu_0 = 0{,}20$, qual è la velocità di rotazione necessaria?

17 Un blocco di peso 12 kg è in quiete su una superficie piana S inclinata di 30° sul piano orizzontale. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu_0 = 0{,}64$, determinare quale forza minima occorre applicare al blocco parallelamente ad S per mettere in movimento il blocco (a) verso il basso, (b) verso l'alto, (c) in direzione orizzontale, (d) con una forza orizzontale.

18 Alcuni blocchi, di peso diverso ma di uguale materiale, sono in equilibrio su un piano inclinato (la cui superficie ha uguali caratteristiche chimico-fisiche in ogni punto). Viene rilevato che, al crescere dell'inclinazione del piano, finché un blocco è in equilibrio anche tutti gli altri sono in equilibrio, quando un blocco comincia a scivolare anche gli altri fanno lo stesso. Se poi l'inclinazione del piano viene ridotta in modo tale che la velocità di un blocco si mantiene costante, anche tutti gli altri blocchi scivolano con velocità costante. Qual è la spiegazione?

19 Dopo aver percorso ruotando senza strisciare un tratto orizzontale, una pallina inizia la risalita di un piano inclinato. Arriverà più in alto in assenza oppure in presenza di attrito radente? Nel secondo caso, si ipotizzi che l'attrito sia abbastanza grande da impedire ogni strisciamento.

20 Un blocco A di massa $m_A = 30$ kg appoggia senza attrito su un piano orizzontale (fig. 9). Sul blocco A è appoggiato un blocco B di massa $m_B = 10$ kg. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico tra i due blocchi è $\mu_0 = 0{,}2$, si determini il minimo valore che deve assumere una forza orizzontale applicata al blocco A se vogliamo che il blocco B scivoli all'indietro su di esso.

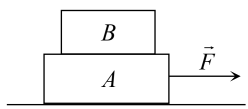

Fig. 9

21 Un uomo sta salendo su una scala a pioli appoggiata al muro. Supponendo che la scala abbia peso trascurabile e che il coefficiente d'attrito tra scala e parete sia lo stesso che tra scala e pavimento, si determini la massima altezza a cui può giungere l'uomo senza che la scala scivoli.

22 Una forza orizzontale $\vec{F}$ di valore via via più grande è applicata (fig. 10) al centro O del cerchio che delimita una semisfera omogenea di raggio R appoggiata su una superficie piana orizzontale. Si determini quale valore massimo può assumere l'angolo θ (la distanza del baricentro da O è $3R/8$).

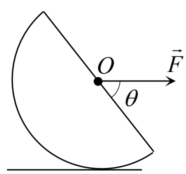

Fig. 10

23 Un blocchetto K è a contatto di un cuneo C che può scivolare in direzione orizzontale (fig. 11). Considerando sia il caso di assenza di attrito che il caso contrario, si chiarisca come deve muoversi C se vogliamo che K

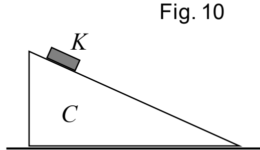

Fig. 11

(che è soggetto solo al peso e alla forza proveniente da C) si mantenga immobile rispetto a C.

24 Si vuole che un blocchetto, appoggiato (fig. 12) sulla superficie interna di un cono di semiapertura θ), risulti immobile rispetto al cono mentre questi ruota attorno al proprio asse geometrico con una data velocità angolare ω. Determinare quali valori può assumere, in assenza e in presenza di attrito, la distanza r del blocchetto dall'asse del cono.

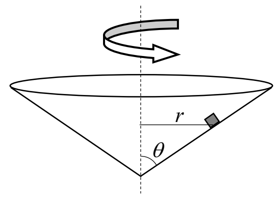

Fig. 12

25 Cilindro (o sfera) su piano inclinato: determinare la massima pendenza compatibile con un moto di puro rotolamento (con partenza da fermo).

26 Si consideri un'automobile di peso 1200 kg. Posto che il coefficiente d'attrito radente statico tra ruote e terreno sia μ_0 = 0,7 e che il coefficiente d'attrito volvente sia μ_V = 0,03, si determini quale forza minima occorrerebbe applicare alla macchina per metterla in movimento:
(*a*) a ruote bloccate, in presenza di attrito radente
(*b*) a ruote libere, in presenza di attrito volvente ma non di attrito radente
(*c*) a ruote libere, in presenza di attrito radente ma non di attrito volvente
(*d*) a ruote libere, in presenza di attrito sia radente che volvente (si supponga che tanto il peso quanto la forza applicata si ripartiscano equamente sulle quattro ruote).

27 Con riferimento alla fig. 7 di pag. 294 del testo (forza motrice applicata ad altezza R), si spieghi se la presenza di attrito volvente aumenta / diminuisce / lascia invariato il rischio di slittamento della ruota alla partenza.

SOLUZIONI

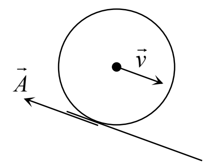

Fig. 13

1 Falso: quando un corpo rotola c'è sempre attrito volvente (salvo il caso teorico di corpi rigidi o di corpi perfettamente elastici), ma c'è anche attrito radente se questo serve a contrastare lo strisciamento di una superficie sull'altra. Ad esempio, se una pallina viene posta su un piano inclinato e poi abbandonata a sé stessa (fig. 13), in assenza di attrito radente scivolerebbe verso il basso senza ruotare (il peso e la reazione del vincolo, perpendicolare al piano per l'assenza di attrito, avrebbero entrambi momento zero rispetto al centro della sfera): il rotolamento con velocità angolare via via più grande è prodotto dalla forza $\vec{A}$ d'attrito radente (e contrastato dall'eventuale attrito volvente). Altro esempio: se una palla da biliardo viene colpita a mezza altezza, per effetto dell'attrito radente che ne contrasta il moto di scivolamento incomincia a rotolare perdendo velocità. Quando la velocità v di avanzamento è diminuita e la velocità ω di rotazione aumentata fino a che la relazione $\omega = v/R$ è soddisfatta, non c'è più alcuno strisciamento da contrastare, e l'attrito radente non agisce più.

2 Il rotolamento è prodotto dall'attrito radente, e dato che non si verificano strisciamenti *si tratta di attrito statico*: la forza d'attrito è applicata a punti che hanno velocità zero.

3 (*a*) Zero: non c'è alcun moto di scivolamento da contrastare.
(*b*) È uguale al massimo valore della forza d'attrito radente statico:
$A_{0/\max} = \mu_0 N = (0{,}4 \times 20)\ \text{kg} = 8\ \text{kg}.$
(*c*) $5\ \text{kg}$.

4 Vero, nel limite di resistenza meccanica delle superfici e nel limite di validità delle leggi empiriche dell'attrito. Basta aumentare convenientemente il valore della forza con cui le due superfici premono l'una sull'altra.

5 (*a*) Velocità costante: la forza N con cui le due superfici premono una sull'altra è uguale al peso P del blocco, 60 kgf. Ne consegue che è $A_{0/\max} = \mu_0 N = 0{,}5 \times 60\ \text{kg} = 30\ \text{kg}.$
(*b*) Accelerazione verso l'alto: la spinta del pavimento dell'ascensore sul blocco è $(6/5)P$, per cui $A_{0/\max} = \mu_0 (6/5)P = 0{,}5 \times (6/5) \times 60\ \text{kg} = 36\ \text{kgf}$. Accelerazione verso il basso: la spinta del pavimento sul blocco è $(4/5)P$, e quindi $A_{0/\max} = \mu_0 (4/5)P = 0{,}5 \times (4/5) \times 60\ \text{kg} = 24\ \text{kg}.$

6 Se il blocco è in equilibrio, la forza d'attrito è uguale in valore (e opposta in direzione) al componente tangenziale del peso: $A_0 = P\,\text{sen}\,\theta$. Se poi il blocco è al limite dell'equilibrio, la forza d'attrito ha il massimo valore possibile per quella data inclinazione: $A_0 = A_{0/\max} = \mu_0 P \cos\theta$. Facendo sistema delle due relazioni scritte si ottiene $\mu_0 = \text{tg}\,\theta$, e nel nostro caso $\mu_0 = \text{tg}\,34° = 0{,}67$.

7 Trovando per tentativi l'inclinazione θ che permette al blocco di scivolare

con velocità costante. In tali condizioni $A = P\,\text{sen}\theta$, ed essendo anche $A = \mu N = \mu P\cos\theta$, si ottiene $\mu = \text{tg}\theta$. Si noti che, essendo in generale $\mu < \mu_0$, l'inclinazione che permette una velocità di scivolamento costante è inferiore a quella per la quale il blocco è al limite dell'equilibrio.

8 (*a*) In assenza di attrito sul terreno, le ruote motrici girerebbero a vuoto, mentre le ruote d'appoggio resterebbero immobili. L'attrito contrasta lo strisciamento delle ruote motrici agendo in avanti (di qui l'accelerazione in avanti della macchina), e lo strisciamento delle ruote d'appoggio agendo su di esse all'indietro (il che ne determina il rotolamento).

(*b*) Quando l'automobilista toglie gas la macchina rallenta: in assenza di attrito le ruote d'appoggio tenderebbero a conservare la propria velocità di rotazione, mentre la velocità di rotazione delle ruote motrici diminuirebbe bruscamente insieme alla velocità di rotazione del motore. Le une e le altre quindi striscerebbero sul terreno: la forza d'attrito agisce in avanti sulle ruote d'appoggio costringendole a girare meno rapidamente, e all'indietro sulle ruote motrici costringendole a girare più rapidamente.

(*c*) In assenza di attrito tra gomme e terreno, i freni bloccherebbero le quattro ruote azzerandone bruscamente il moto di rotazione, e la macchina scivolerebbe senza venire in alcun modo rallentata. Le forze d'attrito tra gomme e terreno contrastano tale scivolamento, agendo in direzione opposta alla direzione di marcia: tendono cioè a far girare le ruote in avanti mantenendone il moto di rotazione.

(*d*) Se la frenata non è troppo violenta in rapporto alle condizioni delle gomme e del terreno, le forze d'attrito sono abbastanza grandi da impedire ogni scivolamento costringendo le ruote a girare con la velocità angolare ($\omega = v/R$, dove v è la velocità della macchina) di un moto di puro rotolamento: in tal caso la macchina è rallentata dalle forze d'attrito statico che, al limite, possono raggiungere il proprio valore massimo $\mu_0 N$. Se però la frenata è troppo brusca, le forze d'attrito non sono abbastanza grandi da riuscire a impedire del tutto lo scivolamento: le ruote quindi girano ma insieme scivolano (e al limite si bloccano e scivolano senza più girare), cosicché in questo caso sono le forze d'attrito dinamico – di valore inferiore al valore massimo delle forze d'attrito statico – a decelerare la macchina.

9 Per la mancanza di attrito, la forza proveniente dal piano d'appoggio sarebbe verticale come il peso della sfera (fig. 14): essendo perciò verticale la forza risultante sulla sfera, il baricentro G cadrebbe verso il basso lungo una retta verticale e la sfera ruoterebbe attorno a G scivolando fino ad avere il punto d'appoggio al di sotto del baricentro (possibile posizione di equilibrio stabile). Il moto proseguirebbe poi per inerzia – come quello di un pendolo – verso la posizione simmetrica di quella iniziale, e in definitiva il baricentro oscillerebbe su e giù sulla verticale condotta per la sua posizione iniziale.

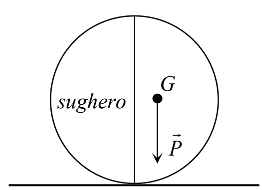

Fig. 14

10 Il coefficiente d'attrito deve essere moltiplicato non per la forza P_n, ma per la forza con cui le due superfici a contatto premono l'una sull'altra, in questo caso uguale a $P_n + mv^2/R$, dove m è la massa del blocchetto, v la sua velocità, R il raggio di curvatura della superficie d'appoggio.

11 Falso: le forze d'attrito radente *contrastano sempre* il moto relativo di scivolamento di una superficie sull'altra: proprio per questo possono anche compiere lavoro positivo. Se, ad esempio, solleviamo dal tavolo una bottiglia, la forza d'attrito esercitata verso l'alto dalla mano sul vetro è applicata a punti che si spostano verso l'alto, e compie così un lavoro positivo.

12 Vero. Per la mancanza di curvatura nella traiettoria del corpo K (forza trasversale su K uguale a zero), la forza con cui le due superfici a contatto premono una sull'altra è uguale al componente trasversale del peso del blocco. Perciò la forza d'attrito è $\mu P\cos\varphi$ e il relativo lavoro, calcolato sullo spostamento del centro di massa tra A e B (fig. 15), è $W = (\mu P\cos\varphi)L = \mu P d$. Si noti che il ragionamento *non potrebbe essere applicato* nel caso di traiettoria non rettilinea.

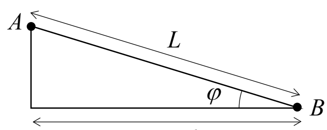

Fig. 15

13 (a) Deve risultare $F > \mu_V P = 0{,}03 \times 50$ kgf $= 1{,}5$ kgf.
(b) Se la diminuzione del raggio non determinasse anche una diminuzione dello scostamento b_{max}, il valore del coefficiente $\mu_V = b_{max}/R$, e di conseguenza quello della forza, raddoppierebbero. L'aumento sarà in realtà alquanto minore a causa della contemporanea diminuzione di b_{max}.
(c) La forza da applicare sarebbe $F > \mu_0 N = 0{,}7 \times 50$ kgf $=$ 35 kgf.

14 (a) Al limite dell'equilibrio (fig. 16), risulta $F\cos 30° = A_{0/\max} = \mu_0(F\,\mathrm{sen}30° + P)$, da cui, essendo $\mu_0 = 0{,}4$, deriva $F \leq 0{,}601\,P$.
(b) Il limite che deve essere superato è dato dalla più piccola tra tutte le forze che sommate al peso $\vec{P}$ del blocco danno una forza risultante inclinata di $\theta_{max} = \mathrm{arctg}\,\mu_0 = 21{,}8°$ sulla normale. Come la fig. 17 chiarisce, tale forza limite è a sua volta inclinata verso l'alto di $\theta_{max} = 21{,}8°$, e il suo valore è quindi $P\,\mathrm{sen}\,\theta_{max} = 20\,\text{kgf} \times \mathrm{sen}\,21{,}8° = 7{,}43$ kgf.[1]

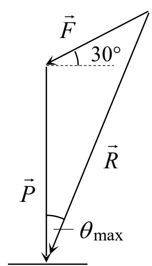

Fig. 16

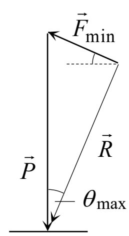

Fig. 17

15 La forza d'attrito dinamico è μmg, costante, controversa alla velocità: l'accelerazione scalare del blocco è quindi $a = -\mu g < 0$. Nel tempo $T = 1$ s la

[1] Si poteva anche procedere per via matematica, tenuto presente che al limite dell'equilibrio è $F\cos\theta = A_{0/\max} = \mu_0(P + F\,\mathrm{sen}\theta)$, annullando la derivata prima di F rispetto a θ e verificando che per $\mathrm{tg}\theta = -\mu_0$ la derivata seconda di F è positiva.

velocità diminuisce linearmente fino a zero: $0 = v_0 + aT$, da cui $v_0 = -aT$ (valore positivo, essendo a negativa). La distanza percorsa è $d = v_0 T + (a/2)T^2 = (-aT)T + (a/2)T^2 = -(a/2)T^2$. Pertanto $a = -2d/T^2$, da cui, essendo $a = -\mu g$, si trae $\mu = 2d/(gT^2) = (2 \times 2{,}40)/(9{,}81 \times 1^2) = 0{,}49$.

16 (a) Se K non scivola lungo la parete del cilindro è perché il suo peso è neutralizzato dalla forza $\vec{A}_0$ di attrito radente statico, che agisce su K per il fatto che il cilindro preme su K esercitando su di esso la forza centripeta $m\omega^2 R$. (b) Per l'equilibrio di K occorre che il peso P non superi la massima forza d'attrito statico. Tenuto conto che la forza premente è $N = m\omega^2 R$, deve essere $P = mg \leq A_{0/\max} = \mu_0 m\omega^2 R$, vale a dire

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_0 R}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}20 \times 0{,}30 \text{ m}}} = 12{,}8 \text{ rad/s} = 122 \text{ giri/min}.$$

17 La forza premente è uguale al componente del peso sulla normale al piano d'appoggio: $N = P\cos 30° = P\sqrt{3}/2$. La forza d'attrito statico massima è quindi $A_{0/\max} = \mu_0 P\sqrt{3}/2 = 0{,}64 \times 12 \text{ kg} \times \sqrt{3}/2 = 6{,}65 \text{ kg}$. Tenuto conto che il componente $\vec{P}_{\text{tg}}$ del peso sul piano d'appoggio vale $P \operatorname{sen} 30° = 12 \text{ kg} \times 0{,}5 = 6 \text{ kg}$, si desume che la forza applicata deve rispettivamente essere: (a) $F > A_{0/\max} - P_{\text{tg}} = (6{,}65 - 6) \text{ kg} = 0{,}65 \text{ kg}$.

(b) $F > A_{0/\max} + P_{\text{tg}} = (6{,}65 + 6) \text{ kgf} = 12{,}65 \text{ kg}$.

(c) $F > \sqrt{P_{\text{tg}}^2 + A_{0/\max}^2} = \sqrt{6^2 + 6{,}65^2} \text{ kg} = 8{,}96 \text{ kgf}$. La forza $\vec{R}$ complessiva sul blocco deve infatti avere direzione orizzontale (fig. 18) e valore $> A_{0/\max} = 6{,}65$ kg, perciò la forza $\vec{F}$ da applicare ha un componente parallelo al piano uguale e contrario a $\vec{P}_{\text{tg}}$ e un componente orizzontale di valore superiore ad $A_{0/\max}$.

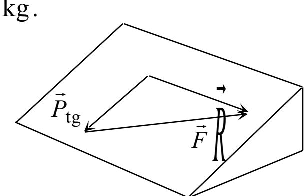

Fig. 18

(d) $F > \sqrt{6{,}65^2 - 6^2} = 2{,}87 \text{ kg}$. In tal modo la somma $\vec{R}$ di tale forza e di $\vec{P}_{\text{tg}}$ (fig. 19) è maggiore di $A_{0/\max} = 66{,}5 \text{ kg}$.

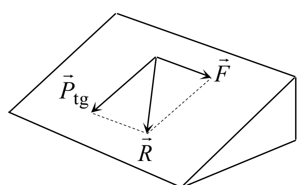

Fig. 19

18 L'equilibrio è al limite quando il piano inclinato forma col piano orizzontale un angolo $\varphi = \operatorname{arctg} \mu_0$, dipendente solo da μ_0 e quindi uguale per tutti i blocchi (vedi domanda 6, pag. 296). La velocità di scivolamento è costante quando l'angolo è $\theta = \operatorname{arctg} \mu$, dipendente solo da μ e quindi uguale per tutti i blocchi (vedi domanda 7).

19 In assenza di attrito la velocità angolare non può cambiare (le forze applicate, peso e reazione del vincolo, hanno momento zero rispetto al centro di massa): perciò durante la risalita il lavoro resistente del peso deve azzerare solo l'energia cinetica di traslazione ½ Mv^2. In presenza invece di sufficiente attrito (puro rotolamento) viene annullata *tutta* l'energia cinetica, pari a 0,75 Mv^2 (vedi risp. 32 a pag. 273). Durante la risalita il peso compie quindi un lavoro resistente del 50 % superiore a prima, il che significa che in presenza di attrito l'altezza raggiunta dalla pallina è del 50% superiore.

20 La forza di attrito statico massima tra i due blocchi è $\mu m_B g$, quindi la massima accelerazione per il blocco B è μg. Perché tutto il sistema abbia tale accelerazione deve essere
$F = (m_A + m_B)\,\mu g =$ (30 kg + 10 kg) × 0,2 × (9,81 m/s²) = 78,5 N.
Per valori superiori della forza applicata, il centro di massa del sistema ha un'accelerazione superiore a quella del blocco B, il che significa che B resta indietro rispetto ad A.

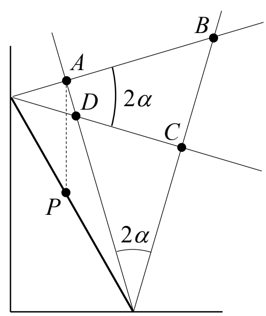

Fig. 20

21 Schematicamente, la scala (fig. 20) è soggetta a tre forze: quella proveniente dal pavimento, quella proveniente dalla parete e quella proveniente dall'uomo (uguale, se c'è equilibrio, al peso dell'uomo[2]). Delle prime due sappiamo che possono avere una certa inclinazione massima α (con tgα uguale al coefficiente d'attrito statico μ_0) rispetto alla normale alla superficie, e quindi agiscono lungo una retta compresa entro un angolo 2α. Perciò le rette d'azione di tali forze si incontreranno in un punto posto entro l'area $ABCD$. L'equilibrio della scala richiede che per tale punto passi anche la retta d'azione della terza forza, e quindi del peso dell'uomo[3]: pertanto, la posizione limite per l'uomo sulla scala è la posizione P posta al di sotto del punto A. Se la scala è tangente al cono d'attrito uscente dal punto d'appoggio inferiore, l'uomo può salire fino in cima (e a maggior ragione ciò è possibile se l'inclinazione della scala sulla verticale è inferiore). Nota: se l'uomo si ferma in una posizione K che precede la posizione limite, qualunque punto posto all'interno del trapezio $ABCD$ sulla verticale per K può essere il punto di convergenza delle due reazioni vincolari, le quali restano pertanto indeterminate in direzione e valore: il problema non può essere risolto con la statica del corpo rigido.

---

[2] Se l'uomo è in equilibrio (*e solo in tal caso*), la forza della scala sull'uomo (uguale in modulo alla forza dell'uomo sulla scala) è uguale e contraria all'altra forza agente sull'uomo, il suo peso.
[3] La somma dei momenti delle tre forze rispetto a un punto qualsiasi (in particolare, rispetto al punto d'intersezione delle due reazioni vincolari) deve infatti essere zero.

22 Rappresentiamo il peso, come è sempre legittimo nei problemi di statica del corpo rigido, come una forza $\vec{P}$ applicata nel baricentro G (fig. 21). Per l'equilibrio rispetto alla direzione orizzontale, la forza $\vec{F}$ ha lo stesso valore della forza d'attrito A_0. Per l'equilibrio alla rotazione attorno al punto d'appoggio C, è $Pd\,\mathrm{sen}\theta = FR = A_0R$. Se siamo al limite dell'equilibrio, $A_0 = A_{0/\max} = \mu_0 P$, e quindi $Pd\,\mathrm{sen}\theta = \mu_0 PR$. In tal caso dunque $\mathrm{sen}\theta = \mu_0 R/d = 8\mu_0/3$, indipendentemente dal raggio della semisfera e dal suo peso. Essendo $\mathrm{sen}\theta \le 1$, questo risultato è valido solo per $8\mu_0/3 \le 1$, cioè per $\mu_0 \le 3/8$. Se $\mu_0 = 3/8$ il valore limite per θ è 90° (in tal caso $F = A_{0/\max} = 3P/8$). Naturalmente $\theta = 90°$ è una possibile posizione di equilibrio anche se $\mu_0 > 3/8$, con la differenza che in tale eventualità la forza d'attrito statico non raggiunge il suo valore massimo. L'equilibrio è possibile anche per $\theta > 90°$, con valori di F inferiori a $3P/8$. Il massimo valore che θ può assumere in condizioni di equilibrio è quello in corrispondenza del quale la verticale condotta per il baricentro passa dal punto d'appoggio C: nel qual caso l'equilibrio richiede che sia $F = 0$.

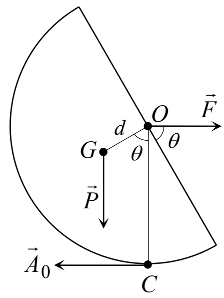

Fig. 21

23 (a) Assenza di attrito. Su K agisce una forza verticale (il peso $\vec{P}$) e una forza (la reazione del vincolo $\vec{V}$) ortogonale alla superficie d'appoggio (fig. 22). Avendo le due forze direzione diversa, la risultante è sicuramente diversa da zero, il che significa che il moto rettilineo orizzontale che vogliamo osservare per K non può essere uniforme. D'altra parte, se K si mantiene immobile rispetto a C la sua velocità verticale è costantemente zero, quindi è zero il componente verticale della forza risultante, cioè $V\cos\varphi = mg$. Ma allora la forza orizzontale è $V\,\mathrm{sen}\varphi = (mg/\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi = mg\,\mathrm{tg}\,\varphi$ (con direzione verso destra) e quindi K ha (come il cuneo, rispetto al quale è immobile) accelerazione orizzontale $\vec{a}$ diretta verso destra di valore $g\,\mathrm{tg}\varphi$. La velocità del cuneo potrebbe essere diretta sia verso destra, con valori in aumento, che verso sinistra, con valori in diminuzione. Chiaramente, nella condizioni di accelerazione ora precisate la velocità verticale di K potrebbe anche mantenere un valore costante *diverso* da zero: rispetto al cuneo il blocco potrebbe cioè muoversi di moto uniforme, nel senso della salita come nel senso della discesa (si veda anche il problema 7 a pag. 340).

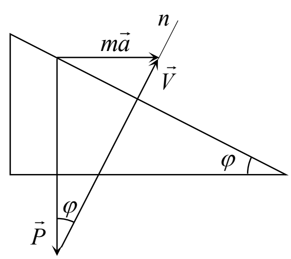

Fig. 22

(b) Presenza di attrito. La reazione $\vec{V}$ del vincolo può formare con la normale al piano inclinato un angolo massimo $\theta_{\max}$ definito da $\mathrm{tg}\,\theta_{\max} = \mu_0$. Come sopra, se la velocità verticale di K è zero la forza risultante sul bloc-

co $m\vec{a} = \vec{P}+\vec{V}$ è orizzontale. La fig. 23 chiarisce che l'accelerazione dei due corpi a contatto può variare da
$a_{\min} = g\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \theta_{\max})$ fino a
$a_{\max} = g\,\mathrm{tg}\,(\varphi + \theta_{\max})$.

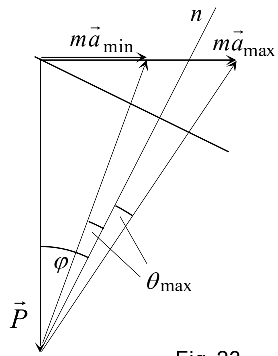

Fig. 23

24 Se vogliamo che il blocchetto percorra una circonferenza di raggio r con velocità angolare ω, il peso $\vec{P}$ e la reazione $\vec{V}$ del vincolo devono avere come somma una forza di valore $m\omega^2 r$ diretta orizzontalmente verso il centro della circonferenza.
La forza $\vec{V}$ è perpendicolare alla superficie del cono se non c'è attrito (fig. 24), mentre in presenza di attrito può formare con tale direzione un angolo non più grande di $\varphi_{\max} = \mathrm{arctg}\,\mu_0$. In assenza di attrito la situazione si presenta quindi come in fig. 25: si vede che risulta $\mathrm{tg}\theta = g/(\omega^2 r)$, per cui è $r = g/(\omega^2\,\mathrm{tg}\,\theta)$.
In presenza di attrito la situazione si presenta come in fig. 24: risulta
$\mathrm{tg}\,(\theta + \varphi_{\max}) = g/(\omega^2 r_{\min})$
$\mathrm{tg}\,(\theta - \varphi_{\max}) = g/(\omega^2 r_{\max})$.
Il valore di r può pertanto variare tra
$r_{\min} = g/\omega^2\,\mathrm{tg}\,(\theta+\varphi_{\max})$ e
$r_{\max} = g/\omega^2\,\mathrm{tg}\,(\theta - \varphi_{\max})$.

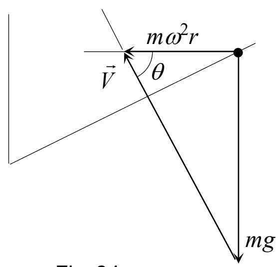

Fig. 24

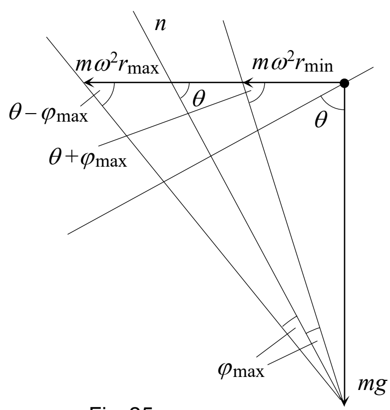

Fig. 25

25 Sia φ l'angolo tra piano inclinato e piano orizzontale. In precedenza (risposta 33 a pag. 274) si è trovato che per un cilindro omogeneo la forza d'attrito radente necessaria per un moto di puro rotolamento è $(1/3)\,P\,\mathrm{sen}\varphi$, tanto più grande quanto maggiore è la pendenza. D'altra parte, la forza d'attrito può tutt'al più raggiungere il valore $\mu_0 P\cos\varphi$, tanto più piccolo quanto maggiore è la pendenza. Chiaramente, il moto di rotolamento è possibile se la forza d'attrito necessaria non supera il massimo valore della forza d'attrito disponibile: $(P/3)\,\mathrm{sen}\varphi \le \mu_0 P\cos\varphi$, il che significa $\varphi_{\max} = \mathrm{arctg}\,3\mu_0$.

Per una sfera la forza d'attrito necessaria a un moto di puro rotolamento risultava (risposta 34, pag. 274) un po' minore: $(2/7)P\,\text{sen}\varphi$. Dovendo evidentemente essere $(2/7)P\,\text{sen}\varphi \le \mu_0 P \cos\varphi$, si deduce che è
$\varphi_{\max} = \text{arctg}\,3{,}5\mu_0$.

Supponiamo ad esempio che sia $\mu_0 = 1$ (gomma su asfalto asciutto). In tale specifico caso:
(a) per evitare un moto traslatorio di scivolamento (si pensi a un'automobile a ruote bloccate) su un piano avente inclinazione φ occorre che sia $\text{tg}\varphi \le \mu_0 = 1$ ($\varphi \le 45°$);
(b) per evitare che un cilindro scivoli mentre rotola occorre che sia $\text{tg}\,\varphi \le 3\mu_0 = 3$ ($\varphi \le 71{,}6°$);
(c) per evitare che una sfera scivoli mentre rotola occorre che sia $\text{tg}\,\varphi \le 3{,}5\mu_0 = 3{,}5$ ($\varphi \le 74{,}1°$).

26 (a) Una forza superiore alla massima possibile forza di attrito radente statico $A_{0/\max} = \mu_0 P = 0{,}7 \times 1200\text{ kg} = 840\text{ kg}$.
(b) Qualsiasi forza: le ruote traslerebbero senza incontrare alcuna resistenza. L'attrito volvente non avrebbe modo di manifestarsi.
(c) Qualsiasi forza: il rotolamento delle ruote (determinato dal fatto che l'attrito radente impedisce lo strisciamento delle gomme sul terreno) non incontrerebbe alcuna resistenza.
(d) Qualsiasi forza F per cui risulti $(F/4) > \mu_V (P/4)$, vale a dire $F > \mu_V P = 0{,}03 \times (1200\text{ kg}) = 60\text{ kg}$. Il valore limite così ottenuto è 20 volte inferiore a quello ottenuto alla risposta (a): il vantaggio offerto dalla ruota è palese.

27 L'equilibrio alla traslazione è unicamente condizionato dal verificarsi della condizione $F \le \mu_0 P$. Il fatto che risulti anche $F \le \mu_V P$ condiziona il solo equilibrio alla rotazione.