sa in gradi Celsius con una temperatura espressa in gradi Fahrenheit[11]. Generalmente la riduzione a unità coerenti si risolve in modo assai semplice facendo ricorso a opportune equivalenze. Così, se vogliamo esprimere in m/s la velocità di 108 km/h basterà scrivere 1000 m al posto di km, e 3600 s al posto di h:
108 km/h = 108 × (1000 m/3600 s) = 30 m/s.[12]

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Il punto A procede alla velocità di 1 km/h, il punto B procede alla velocità di 1 m/s. Quale dei due è più veloce?

2 Una possibile velocità del suono in aria è 335 m/s. Di quanto è più grande la velocità c = 300 000 km/s della luce nel vuoto?

3 Sulla superficie della Terra, a 45° di latitudine e a livello del mare, il valore dell'accelerazione di gravità è circa 9,81 m/s^2.
(*a*) Come varierebbe tale valore se si usassero le unità del sistema CGS?
(*b*) Come varierebbe invece se volessimo esprimere le lunghezze in kilometri e i tempi in minuti?

4 L'unità di forza del vecchio sistema CGS era la *dina* (simbolo dyn), definita come la forza che applicata a un ipotetico punto di massa 1 g produrrebbe l'accelerazione di 1 cm/s^2. Sapendo che una forza corrisponde a una massa per un'accelerazione, si trovi la relazione tra la dina e la corrispondente unità internazionale, il *newton*.

5 L'unità di misura CGS per il lavoro e l'energia era l'*erg* (simbolo erg), definito come il lavoro compiuto dalla forza costante di 1 dyn quando lo spostamento del punto d'applicazione nella direzione della forza vale 1 cm. In che relazione stanno l'unità CGS e la corrispondente unità internazionale?

6 Sapendo che la grandezza 'pressione' corrisponde a una forza diviso un'area, si trovi la relazione tra unità internazionale e unità CGS di pressione.

7 Il materiale X ha densità 1 nel sistema internazionale, il materiale Y ha densità 1 nel sistema CGS. Sapendo che la densità corrisponde a una massa diviso un volume, si spieghi quale dei due materiali ha densità maggiore.

SOLUZIONI

1 1 m/s = (10^{-3} km) / (h/3600) = 3,6 km/h, ovvero 1 km/h = 28 cm/s. Il punto B è quasi quattro volte più veloce.

2 $c = 3 \times 10^8$ m/s = $N \times 335$ m/s, da cui $N = 8{,}96 \times 10^5$. La luce è quasi un milione di volte più veloce.

---

[11] La temperatura di fusione del ghiaccio a pressione di 1 atm vale 0° nella scala Celsius, 32° nella scala Fahrenheit. La temperatura di ebollizione dell'acqua a pressione di 1 atm vale 100° nella scala Celsius, 212° nella scala Fahrenheit. La scala Celsius è quella da noi usata nella pratica quotidiana.

[12] Non sempre il calcolo da eseguire è così elementare: se applicato in modo improprio, il metodo delle equivalenze *può portare a gravi errori*. Si veda eventualmente il capitolo 2 («Piano, con le equivalenze!») in G. Tonzig, *100 errori di Fisica* (Maggioli).

3 (*a*) $9{,}81\ \text{m/s}^2 = 981\ \text{cm/s}^2$.
(*b*) $9{,}81\ \text{m/s}^2 = (9{,}81 \times 10^{-3}\,\text{km}) / (\text{min}/60)^2 = 35{,}3\ \text{km/min}^2$.

4 $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \times 1\ \text{m/s}^2 = 1000\ \text{g} \times 100\ \text{cm/s}^2 = 10^5\ \text{g} \times \text{cm/s}^2 = 10^5\ \text{dyn}$.

5 L'unità internazionale per il lavoro e l'energia (il *joule*, simbolo J) è il lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il punto d'applicazione si sposta di 1 m nella direzione della forza. Risulta $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \times 1\ \text{m} = 10^5\ \text{dyn} \times 10^2\ \text{cm} = 10^7\ \text{erg}$.

6 L'unità internazionale di pressione (il *pascal*, simbolo Pa) corrisponde a $1\ \text{N/m}^2$, l'unità CGS (la *barìa*) corrispondeva a $1\ \text{dyn/cm}^2$. Risulta pertanto
$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2 = (10^5\ \text{dyn}) / (10^4\ \text{cm}^2) = 10\ \text{dyn/cm}^2$.

7 L'unità internazionale per la densità è il kg/m^3, l'unità CGS il g/cm^3. Dato che $1\ \text{kg/m}^3 = (10^3\ \text{g})/(10^2\ \text{cm})^3 = 10^{-3}\ \text{g/cm}^3$, Y è 1000 volte più denso.

1.6 Dimensioni

1. In Fisica ricorrono spesso espressioni di questo tipo: *a*) un volume *ha le dimensioni* di una lunghezza al cubo; *b*) un'accelerazione *ha le dimensioni* di una lunghezza diviso il quadrato di un tempo; *c*) una forza *ha le dimensioni* di una massa per un'accelerazione; *d*) una pressione *ha le dimensioni* di una forza diviso un'area; *e*) un'energia *ha le dimensioni* di una forza per una lunghezza.

2. «Dare le dimensioni» di una grandezza X non significa dunque specificarne la misura, ma metterla in relazione con altre grandezze[13] allo scopo di precisarne la natura, di chiarire cioè di che tipo di grandezza si tratta. Ovvero, significa mostrare: 1°, in che modo la misura di X si può ottenere (a meno eventualmente di coefficienti puramente numerici) dalla misura di altre grandezze; 2°, in che modo l'unità di misura della grandezza X può essere definita in funzione delle unità di misura di altre grandezze. Esempio: dicendo che un volume ha le dimensioni di una lunghezza al cubo, noi affermiamo che un volume può essere misurato in metri cubi (o centimetri cubi, o decimetri cubi, e via dicendo). E affermiamo che, a meno di eventuali coefficienti numerici, il valore di un volume corrisponde sempre al prodotto di una lunghezza per una seconda lunghezza per una terza lunghezza. In effetti, il volume V di un parallelepipedo di lati a, b, c è $V = abc$, è cioè il prodotto della lunghezza a per la lunghezza b per la lunghezza c. Analogamente, il volume di un cilindro di raggio r e altezza h è $V = \pi r^2 h$, cioè è il prodotto del numero π per la lunghezza r, ancora per la lunghezza r, infine per la lunghezza h. E il volume di una sfera di raggio r è $V = (4\pi/3)r^3$, cioè è il prodotto del numero $4\pi/3$ per la lunghezza r, per la lunghezza r, per la lunghezza r.

3. I simboli dimensionali che adotteremo per indicare le grandezze fondamentali del SI sono i seguenti: M, L, T, I, J, Θ, N, rispettivamente per massa, lunghezza, tempo, intensità di corrente, intensità luminosa, temperatura, quantità di sostanza (il penultimo simbolo è la lettera *teta* maiuscola dell'alfabeto greco).

---

[13] In teoria, con le grandezze fondamentali. A volte però può essere più significativo riferirsi ad altre grandezze, come si è fatto più sopra nelle proposizioni *c*), *d*), *e*).

4. Le relazioni dimensionali tra grandezze vengono espresse mediante **equazioni dimensionali**, la cui simbologia peraltro non è stata a tutt'oggi rigidamente codificata. Per esprimere, ad esempio, il fatto che l'accelerazione ha le dimensioni di una lunghezza diviso il quadrato di un tempo, si può scrivere $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$. Analogamente, le dimensioni di una pressione potranno essere specificate scrivendo $[p] =$ $= \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$. E così via.[14]

5. Grandezze aventi uguali dimensioni fisiche si dicono «omogenee». Si noti:

(*a*) possono essere confrontate, o sommate, solo grandezze tra loro omogenee (non ha senso confrontare una velocità con una temperatura, non è possibile sommare un tempo con una lunghezza)[15];

(*b*) il rapporto tra due grandezze omogenee non è più, in generale, una grandezza, ma un puro numero (il numero che fornisce la misura della grandezza a numeratore rispetto all'altra)[16];

(*c*) se le misure di due grandezze omogenee sono espresse nella stessa unità di misura, il numero che esprime il rapporto tra le due misure non dipende dalla particolare unità adottata. Se, adottando come unità di misura il metro, una lunghezza A risulta 5,2 volte più grande di una lunghezza B, lo stesso risultato si ottiene esprimendo le due misure in centimetri, o in millimetri, o in qualsiasi altra unità.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

8 Se due grandezze hanno uguali dimensioni, il loro rapporto
(*a*) è uguale a 1 (*b*) è una grandezza dello stesso tipo (*c*) .....

9 Lo studente *A* deve calcolare l'area del cerchio, ma non ricorda con sicurezza se occorre usare la formula πR^2, oppure la formula $4\pi R^2$, oppure la formula $(4/3)\pi R^3$. Si spieghi se l'analisi dimensionale lo può aiutare a individuare la formula giusta.

10 Lo studente *B*, incerto se calcolare il periodo di oscillazione del pendolo semplice con la formula $2\pi\sqrt{L/g}$ oppure con la formula $2\pi\sqrt{g/L}$, risolve il suo dubbio in base a semplici criteri dimensionali. Come ha fatto?

11 In una vecchia edizione di un diffusissimo manuale universitario di Fisica, un problema di statica richiedeva che si determinasse il valore di una data forza. La solu-

---

[14] Secondo alcuni Autori, le «dimensioni» di una grandezza sono proprio gli esponenti a secondo membro di un'equazione dimensionale.

[15] Di qui, la possibilità di un *controllo dimensionale*: se, in una relazione di uguaglianza (o disuguaglianza, o somma algebrica) l'omogeneità dimensionale dei termini non risulta verificata, chiaramente è stato commesso un errore. Non è detto però che grandezze omogenee siano anche grandezze dello stesso tipo: ad esempio, il *lavoro di una forza* e il *momento di una forza* corrispondono entrambi a una forza per una lunghezza, ma sono grandezze di tipo diverso e non ha senso confrontarle o sommarle.

[16] Il rapporto tra due grandezze può anche essere una grandezza *adimensionale*. Ad esempio, l'ampiezza di un angolo è una grandezza adimensionale: si può in effetti esprimere (in radianti) come rapporto tra due lunghezze.

zione proposta dal testo era $F = P\,[\sqrt{h\,(2-h)}\,]\,/\,(r-h)$, dove P indicava un peso mentre h ed r rappresentavano lunghezze. Era davvero accettabile tale soluzione?

12 Le tre grandezze x, y, z sono legate dalla relazione $y = 3x - z/y^2$. Sapendo che x ha le dimensioni di una lunghezza, determinare le dimensioni di y e z.

13 Le grandezze x, y, z, k sono legate dalla relazione $(x - 5z^3)\,/\,9yk = 48$ m^3/s. Sapendo che $z = 18$ m e che $y = 6$ m/s, determinare le dimensioni di x e di k.

14 Nel caso di oscillazioni angolarmente piccole, il periodo di oscillazione di un pendolo fisico[17] è $T = 2\pi\sqrt{J\,/\,mgd}$, dove m è la massa del pendolo, g l'accelerazione di gravità, d la distanza del baricentro del corpo oscillante dall'asse di rotazione. Determinare le dimensioni della grandezza J (*momento d'inerzia* del corpo oscillante rispetto all'asse di rotazione).

15 Sapendo che la «capacità equivalente» di due condensatori in serie, rispettivamente di capacità C_1 e C_2, è $C_e = C_1C_2\,/\,(C_1+C_2)$, cioè il prodotto delle capacità diviso la somma, potremmo dedurne che se i condensatori sono tre la capacità equivalente è $C_e = C_1C_2C_3\,/\,(C_1+C_2+C_3)$. Un semplice controllo dimensionale ci avvertirebbe però subito dell'errore: spiegare.

16 Le quattro grandezze x, y, z, k sono legate dalla relazione $0{,}12x\,/\,2y\,(z-16k) = 5$ m/s^2. Sapendo che risulta $z = 120$ m^2/s e che $[y] = \mathrm{T}^2$, determinare le dimensioni di k e di x.

17 Uno studente ricorda che la velocità di propagazione delle onde trasversali su una corda elastica dipende dalla tensione della corda, dalla sua massa e dalla sua lunghezza, ma non ricorda la formula. In che modo l'analisi dimensionale lo può aiutare?

18 Secondo la legge gravitazionale di Newton, due corpi di massa m_1 ed m_2 a distanza r si attraggono con una forza $F = Gm_1m_2/r^2$. Determinare le dimensioni della grandezza *tempo* in un ipotetico sistema di unità di misura in cui la massa e la lunghezza sono grandezze meccaniche fondamentali, e in cui la costante G della legge di Newton è un puro numero.

19 Supponiamo che una serie di esperienze ci suggerisca che, quando una sfera viene trascinata in un fluido, la resistenza R che il fluido oppone al moto dipende solo dalla densità del fluido, dalla velocità della sfera e dal suo diametro. Sulla base di considerazioni dimensionali, si chiarisca come varia R (*a*) se il diametro della sfera raddoppia, (*b*) se raddoppia la sua velocità, (*c*) se raddoppia la densità del fluido.

---

[17] È un corpo rigido che oscilla per effetto della gravità attorno a un asse orizzontale. La durata espressa dalla formula è solo teorica perché presuppone che il pendolo oscilli liberamente all'infinito, in assenza quindi di qualsiasi forma di dispersione energetica (resistenza dell'aria, attriti nel punto di sospensione, altro).