ta). Un esempio di terna destra è la terna cartesiana *x*, *y*, *z*.[34]

*Per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva*:

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) \;=\; \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ ,

*ma non vale la proprietà commutativa*: i vettori $\vec{a}\times\vec{b}$ e $\vec{b}\times\vec{a}$ hanno modulo uguale, ma direzione opposta ( $\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}$ ).

*Esempio in Fisica*. Se una particella carica di elettricità si trova all'interno di un campo magnetico (per esempio, se passa in prossimità di una calamita, o in prossimità di una corrente elettrica), è soggetta, per effetto del campo, a una forza $\vec{F}$ descritta dalla relazione $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ , dove $q$ è la carica della particella, $\vec{v}$ è la sua velocità, e $\vec{B}$ è la grandezza che descrive il campo magnetico (intensità e direzione) nel punto in cui la particella si trova.

## ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

### Concetto di vettore

20 Il modulo di $\vec{p}$ è 5. Qual è il modulo di $-\vec{p}$ ?

21 Il concetto di *vettore negativo* non esiste (*vero*/*falso*).

22 La grandezza fisica *lunghezza* ha carattere vettoriale (*vero*/*falso*), perché tutto ciò di cui si misura la lunghezza (il lato di un rettangolo, la diagonale di un quadrato, il diametro di una circonferenza ecc.) ha una ben precisa direzione nello spazio.

23 La misura di una grandezza vettoriale è sempre positiva (*vero*/*falso*).

24 Condizione necessaria e sufficiente perché una grandezza si debba considerare scalare è che i suoi valori possano risultare negativi (*vero*/*falso*).

25 Tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ di modulo uguale sono disposti in modo da formare un triangolo equilatero come mostrato in fig. 15. Si chiarisca quanto vale l'angolo formato da $\vec{a}$ con $\vec{b}$ , da $\vec{b}$ con $\vec{c}$ , da $\vec{c}$ con $\vec{a}$ .

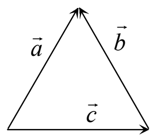


Fig.15

---

[34] La regola per la direzione di $\vec{c}$ può essere espressa in almeno altri tre modi:
1°, *regola della rotazione antioraria*: $\vec{c}$ è diretto verso un osservatore che considera antioraria la rotazione compiuta da $\vec{a}$ per portarsi per la via più breve ad assumere la direzione di $\vec{b}$ ;
2°, *regola della vite* (o «del cavatappi»): $\vec{c}$ è disposto nel senso in cui avanza una vite (disposta perpendicolarmente ad $\vec{a}$ e a $\vec{b}$ ) che ruota attorno al proprio asse nello stesso senso in cui deve ruotare $\vec{a}$ per portarsi per la via più breve ad assumere la direzione di $\vec{b}$ ;
3°, *regola della mano destra*: se le dita della mano destra (pollice escluso) vengono disposte ad arco in modo da raffigurare la rotazione che $\vec{a}$ dovrebbe compiere per portarsi per la via più breve ad assumere la direzione di $\vec{b}$ , il pollice, posizionato parallelamente all'asse di tale rotazione, indica la direzione di $\vec{c}$ .

26 Sapendo che i punti $P_1$ e $P_2$ hanno rispettivamente coordinate cartesiane $3, 2, -5$ e $-3, 9, 0$, si esprima il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ in funzione delle sue componenti.

27 Le componenti cartesiane di un vettore $\vec{p}$ sono $p_x = 5$, $p_y = -2$, $p_z = 9$.
($a$) Determinare il modulo di $\vec{p}$.
($b$) Determinare gli angoli formati da $\vec{p}$ con i tre assi cartesiani.

## Somma di vettori

28 Con riferimento alla fig. 16, stabilire se risulta
($a$) $\vec{c} = \vec{h} + \vec{k}$ ($b$) $\vec{k} = \vec{c} + \vec{h}$
($c$) $\vec{k} + \vec{c} + \vec{h} = 0$ ($d$) $\vec{h} = \vec{c} + \vec{k}$.

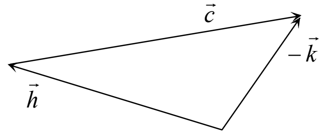

Fig. 16

29 Con riferimento al quesito precedente: in quale modo elementare (senza cioè ricorrere alle formule della trigonometria), noto il modulo di $\vec{c}$, si potrebbe ricavare direttamente dal disegno il modulo degli altri due vettori?

30 Si trovi il modulo del vettore $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$, dove $\vec{p} = 5\vec{u}_x + 9\vec{u}_y$ e $\vec{q} = -\vec{u}_x + 2\vec{u}_y$, e si determini l'angolo formato da $\vec{k}$ con l'asse $y$.

31 Sapendo che i vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{p} + \vec{q}$ hanno modulo uguale, determinare l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

32 Sapendo che i vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{p} - \vec{q}$ hanno modulo uguale, determinare l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

33 Sapendo che $\vec{p} + \vec{q}$ è perpendicolare a $\vec{p}$, e che $|\vec{q}| = 2|\vec{p} + \vec{q}|$, determinare ($a$) il valore dell'angolo tra $\vec{q}$ e $\vec{p} + \vec{q}$, ($b$) il valore dell'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

34 Se risulta $\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$, e al tempo stesso $p^2 + q^2 = k^2$, l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$ è sicuramente 90° (*vero*/*falso*).

35 Una barca a motore procede in direzione Est con velocità $v' = 18$ km/h in assenza di correnti. Quale sarebbe la sua velocità $\vec{v}$ (valore e direzione) se l'acqua viaggiasse in direzione $W\,65°\,S$ con velocità $V = 3$ km/h?

36 Una barca a motore che in acqua ferma si muoverebbe con velocità $v' = 20$ km/h in direzione $W\,28°\,N$, procede in realtà con velocità $v = 25$ km/h in direzione $W\,48°\,N$ per effetto della corrente. Determinare la velocità (valore e direzione) della corrente.

37 Un aeroplano, la cui velocità in aria ferma è $v' = 250$ km/h, deve andare da $P$ a $Q$, in direzione $S\,25°\,E$. Il vento ha una velocità $V = 40$ km/h in direzione $S\,45°\,W$. Trovare la direzione in cui deve puntare l'aeroplano, e il modulo della velocità $\vec{v}$ dell'aeroplano rispetto al suolo.

## Derivazione di vettori

38 Si chiarisca se è possibile che, per un vettore $\vec{p}$ variabile nel tempo, risulti a un dato istante $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{p}|}{\mathrm{d}t} \neq \left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|$.

39 Un vettore $\vec{k}$ di modulo costante, posto nel primo quadrante del piano cartesiano $x,y$, forma un angolo $\varphi$ con l'asse $x$. Si determinino modulo e direzione del vettore $\vec{k}' = \mathrm{d}\vec{k}/\mathrm{d}\varphi$.

40 Dato il vettore $\vec{p} = At\,\vec{u}_x + Bt^2\,\vec{u}_y + C(\cos\omega t)\,\vec{u}_z$, si trovi il vettore $\vec{q} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$.

41 Un vettore $\overrightarrow{AB}$, col primo estremo fisso nell'origine di un piano cartesiano $x,y$, ruota in tale piano in senso antiorario attorno all'estremo $A$. Detto $\varphi$ l'angolo formato da $\overrightarrow{AB}$ con l'asse $x$, si esprimano in funzione di $\varphi$:
($a$) il versore $\vec{u}_{\mathrm{tg}}$ tangente in $B$ alla circonferenza descritta da $B$ e diretto nel senso del moto, ($b$) il versore $\vec{u}_{\mathrm{n}}$ diretto in senso opposto ad $\overrightarrow{AB}$.

42 Un vettore $\vec{p}$ di modulo costante 3, col primo estremo fisso nell'origine di un riferimento cartesiano, ruota attorno a tale estremo mantenendosi nel piano $x,y$. L'angolo formato da $\vec{p}$ con l'asse $x$, misurato a partire da $x$ in senso antiorario, è $\varphi = 2t^3 - t$ (unità SI). Si esprima in funzione del tempo il vettore $\vec{q} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$, e se ne descriva la direzione rispetto a quella di $\vec{p}$.

## Prodotto di vettori

43 La relazione $\vec{p}\cdot\vec{p}$ non ha senso (*vero*/*falso*).

44 La relazione $(\vec{k}\cdot\vec{c})\,\vec{q}$ non ha senso (*vero*/*falso*).

45 La relazione $\vec{p}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{q})$ non ha senso (*vero*/*falso*).

46 Il vettore $\vec{a}$ (modulo 6) è diretto orizzontalmente verso Ovest, il vettore $\vec{b}$ (modulo 2) è diretto verticalmente verso l'alto, il vettore $\vec{c}$ (modulo 3) è diretto verticalmente verso il basso. Si esegua l'operazione $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

47 Per la proprietà distributiva, la relazione $\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{k})$ equivale alla relazione $(\vec{p}\cdot\vec{q})\times(\vec{p}\cdot\vec{k})$ (*vero*/*falso*).

48 Il vettore $\vec{p}$ (modulo 6) è diretto verticalmente verso l'alto: determinare $\vec{m}$ in modo che risulti $\vec{p}\cdot\vec{m} = -12$.
($a$) una e una sola soluzione ($b$) nessuna soluzione ($c$) infinite soluzioni.

49 L'angolo tra $\vec{p}$ (modulo 6) e $\vec{q}$ (modulo 18) è 60°. Determinare $\vec{m}$ in modo che risulti $\vec{m}\times\vec{p} = \vec{q}$.
($a$) una e una sola soluzione ($b$) nessuna soluzione ($c$) infinite soluzioni.

50 Per quale valore dell'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$ il numero $|\vec{p}\times\vec{q}|$ assume il massimo possibile valore?

51 Con riferimento alla fig. 16, si trovi il risultato dell'operazione $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})$.

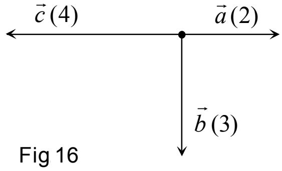


Fig 16

52 Determinare l'angolo tra i vettori $\vec{p}$ e $\vec{q}$ sapendo che risulta $|\vec{p}\times\vec{q}| = \vec{p}\cdot\vec{q}$.

53 Il vettore $\vec{k}$ (modulo 24) è diretto verticalmente verso l'alto, il vettore $\vec{t}$ (modulo 8) è diretto orizzontalmente verso Est. Determinare $\vec{c}$ in modo che risulti $\vec{c}\times\vec{t} = \vec{k}$.
($a$) una e una sola soluzione ($b$) infinite soluzioni ($c$) nessuna soluzione.

54 Il vettore $\vec{p}$ (modulo 6) è diretto orizzontalmente verso destra, il vettore $\vec{q}$ (modulo 24) è diretto verticalmente verso il basso. Determinare $\vec{c}$ in modo che risulti $\vec{c}\cdot\vec{p} = 0$ e $\vec{p}\times\vec{c} = \vec{q}$.
($a$) una e una sola soluzione ($b$) infinite soluzioni ($c$) nessuna soluzione.

55 Moltiplicando scalarmente due grandezze vettoriali si ottiene un puro numero (*vero*/*falso*).

56 Il prodotto tra due grandezze si può effettuare (*vero*/*falso*) solo se hanno entrambe carattere vettoriale, perché altrimenti non si può utilizzare né la regola del prodotto scalare né la regola del prodotto vettoriale.

57 Si dimostri che quando, nel doppio prodotto misto $\vec{p}\cdot\vec{q}\times\vec{k}$, due dei tre vettori sono uguali, il risultato è sempre zero.

58 La forza $\vec{F} = 7\vec{u}_x - \vec{u}_y + 2\vec{u}_z$ è applicata a un punto che si sposta da $P_1$ (coordinate cartesiane 5, 2, −1) a $P_2$ (2, −1, 5). Ricordando che il lavoro di una forza costante è il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento del punto d'applicazione, si determini il lavoro compiuto da $\vec{F}$ (i dati sono tutti espressi in unità internazionali).

59 Determinare il valore dell'angolo tra il vettore $\vec{p} = 3\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - \vec{u}_z$ e il vettore $\vec{q} = -5\vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z$.

60 Trovare l'area del parallelogrammo costruito sui vettori $\vec{p}$ e $\vec{q}$ della domanda precedente.

61 Determinare un versore $\vec{n}$ che risulti perpendicolare tanto al vettore $\vec{p}$ quanto al vettore $\vec{q}$ della domanda 59.

## SOLUZIONI

20 È ancora 5. Il vettore $-\vec{p}$ differisce dal vettore $\vec{p}$ unicamente per il fatto di avere direzione opposta.

21 Vero: il segno meno davanti al simbolo di un vettore $\vec{k}$ indica semplicemente che si considera il vettore opposto a $\vec{k}$ (modulo uguale, direzione contraria).

22 Falso: non è affatto detto che tutto ciò di cui si misura la lunghezza abbia una precisa direzione (si pensi ad esempio alla lunghezza di una circonferenza). In ogni caso, le lunghezze si sommano *senza dover tenere conto della direzione* (si pensi al calcolo del perimetro di un poligono): per ciò stesso si tratta di grandezze scalari.

23 Vero: la misura di una grandezza vettoriale è il suo modulo, sempre positivo per definizione. Possono invece risultare negative le relative componenti cartesiane.

24 Falso: la condizione è sufficiente (se una grandezza può assumere valori negativi, è certamente scalare), *ma non necessaria* (grandezze scalari come ad esempio la massa e il volume possono avere solo valori positivi).

25 L'angolo tra due vettori è l'angolo di cui uno dei due dovrebbe ruotare per portarsi per la via più breve ad assumere la direzione dell'altro. Dunque tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ci sono 60°, tra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ 120°, tra $\vec{c}$ e $\vec{a}$ 60°.

26 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\vec{u}_y + (z_2 - z_1)\vec{u}_z = (-3-3)\vec{u}_x + (9-2)\vec{u}_y +$
$+ (0+5)\vec{u}_z = -6\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 5\vec{u}_z$ .

27 *a*) Il modulo di $\vec{p}$ è $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 9^2} = 10{,}5$.

*b*) Essendo il coseno dell'angolo $\alpha_x$ tra $\vec{p}$ e l'asse $x$ uguale a $p_x/p = 5/(10{,}5)$, risulta $\alpha_x = 61{,}5°$.
Il coseno dell'angolo $\alpha_y$ tra $\vec{p}$ e l'asse $y$ è $p_y/p = -2/10{,}5$, quindi $\alpha_y = 101°$.
Il coseno dell'angolo $\alpha_z$ tra $\vec{p}$ e l'asse $z$ è $p_z/p = 9/10{,}5$, quindi $\alpha_z = 31{,}0°$.

28 (*a*) Falso (*b*) Falso (*c*) Vero (*d*) Falso.

29 La lunghezza di un vettore è proporzionale al suo modulo. Pertanto, il modulo incognito di $\vec{h}$ (o $\vec{k}$) sta al modulo noto di $\vec{c}$ come, nel disegno, la lunghezza di $\vec{h}$ (o $\vec{k}$) sta a quella di $\vec{c}$ .

30 È $\vec{k} = (5-1)\vec{u}_x + (9+2)\vec{u}_y = 4\vec{u}_x + 11\vec{u}_y$ . Pertanto $|\vec{k}| = \sqrt{4^2 + 11^2} = 11{,}7$. L'angolo tra $\vec{k}$ e l'asse $y$ ha tangente $k_x/k_y = 4/11$, e vale pertanto 20,0°.

31 120°, si veda la fig. 17 (attenzione, *non* 60°: se l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{q}$ fosse 60°, il modulo di $\vec{p}+\vec{q}$ sarebbe $|\vec{p}|\sqrt{3}$ ).

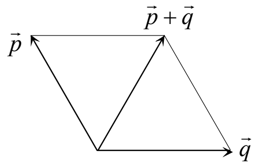


Fig. 17