

Approssimazioni

2.1 Perché approssimare

1. Nella vita di ogni giorno è normale fare uso di numeri approssimati: se dico che per arrivare a casa ci ho messo 20 minuti, che ho dovuto parcheggiare a 300 m di distanza, che sono le 11, che io peso 80 kg e che sulla Terra siamo in 6 miliardi, è a tutti evidente che sto «arrotondando»: i numeri che ho fornito sono tutti più o meno diversi dal numero vero: ma rendono bene l'idea, e giustamente io non cerco di essere più preciso. Così, se chiamo il vetraio perché sostituisca il vetro rotto di una finestra, mi aspetto di vederlo prendere le misure con un semplice, normalissimo metro snodato, o con un metro a nastro, non certo di vederlo armeggiare con sofisticate apparecchiature laser capaci di rivelare il millesimo di millimetro... tanta ricerca di precisione sarebbe palesemente assurda perché del tutto inutile.

2. Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, lo stesso accade nei calcoli della Fisica. A volte si usano valori esatti, ma è quasi un'eccezione: i lati di un pentagono non sono «circa cinque», ma proprio cinque; il numero delle operazioni di misura effettuate per determinare il valore di una grandezza è un numero esatto (che serve per calcolare il valore più probabile della grandezza misurata); anche il valore di alcune grandezze fisiche è fissato *per definizione*, e pertanto, se venisse scritto con tutte le cifre che gli competono, sarebbe un numero esatto: ad esempio, la velocità della luce nel vuoto è, per definizione, esattamente $c = 299\,792\,458$ m/s^[1]. Tuttavia, usare questo valore senza approssimare sarebbe, nella stragrande maggioranza dei casi – per lo studente ma anche per i fisici e gli ingegneri – una follia.

3. C'è almeno un caso in cui la necessità dell'arrotondamento è evidente: quando i numeri sono costituiti da infinite cifre (si pensi al numero π , oppure al numero $\sqrt{2}$, oppure al numero e , base dei logaritmi naturali, oppure al risultato di un'operazione del tipo 10 diviso 3, o 10 diviso 7). Ma il problema che ci poniamo è ben più generale. Il valore delle «costanti» della Fisica (vedi tabella alla pag. precedente¹) è in certi casi noto con otto, nove, dieci e più cifre: *quante dobbiamo tenerne nella risoluzione dei problemi?* le nostre calcolatrici tascabili ci presentano in genere sul display una gran quantità di cifre, fino a dieci: *è necessario, nei calcoli, riportarle tutte?* spesso, lo studente che ha difficoltà con la fisica tende a portarsi dietro un numero spropositato di cifre senza arrotondare (probabilmente spera che gli venga se non altro riconosciuto il merito dello zelo). In realtà, tutto questo non è solo terribilmente scomodo: è del tutto inutile, e rappresenta quasi sempre un vero e

¹ Ne deriva la definizione di metro, una volta stabilito che cos'è un secondo.

proprio errore concettuale. Fisici e ingegneri sanno bene che, in fatto di precisione, il meglio è ciò che è sufficiente. Enrico Fermi ammoniva: *mai più precisione di quanto strettamente necessario!*

VALORE DI ALCUNE COSTANTI DELLA FISICA (2006)	
Velocità della luce nel vuoto	$2,997\,924\,58 \times 10^8$ m/s (esatto)
Carica elementare	$1,602\,176\,487 \times 10^{-19}$ C
Massa dell'elettrone	$9,109\,382\,15 \times 10^{-31}$ kg
Massa del protone	$1,672\,621\,637 \times 10^{-27}$ kg
Massa del neutrone	$1,674\,927\,211 \times 10^{-27}$ kg
Costante dielettrica del vuoto	$8,854\,187\,817\,62 \dots \times 10^{-12}$ F/m (esatto, infinite cifre)
Permeabilità magnetica del vuoto	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m (esatto, infinite cifre)
Costante di Planck	$6,626\,068\,96 \times 10^{-34}$ J·s
Costante dei gas	8,314 472 J/mol·K
Numero di Avogadro	$6,022\,141\,79 \times 10^{23}$ mol ⁻¹
Costante di Boltzmann	$1,380\,6504 \times 10^{-23}$ J/K
Costante universale di gravitazione	$6,674\,28 \times 10^{-11}$ m ³ /s ² ·kg

Tabella 1

2.2 Come approssimare

1. Nel caso di un numero decimale, arrotondare significa eliminare uno o più decimali a partire dall'ultimo a destra. Si approssima *per difetto* quando la cifra che precede le cifre sopresse viene lasciata uguale, si approssima *per eccesso* quando tale cifra viene aumentata di 1. Tra l'approssimazione per eccesso o quella per difetto si sceglie ovviamente quella che porta a uno scarto minore tra numero originario e numero approssimato: così, se voglio eliminare un unico decimale nel numero 31,663 scrivo 31,66 (approssimazione per difetto). Se voglio eliminare due decimali, scrivo 31,7 (approssimazione per eccesso).

Altro esempio: supponiamo che il numero da arrotondare sia 2,99792458 (velocità della luce nel vuoto espressa in centinaia di milioni di metri al secondo, 10^8 m/s). I passaggi successivi (eliminazione di un numero di decimali via via più grande, fino a ottenere un numero intero) sono mostrati nella tabella a lato.

a)	2,997 924 58
b)	2,997 924 6
c)	2,997 925
d)	2,997 92
e)	2,997 9
f)	2,998
g)	3,00
h)	3,0
i)	3

Tabella 2 – Arrotondamenti successivi nel valore della velocità della luce.

3. La «regola pratica» è dunque chiara. Se, nel gruppo di cifre che vengono eliminate, la prima a sinistra è un 5 (*seguito da altre cifre*) o una cifra maggiore (seguita o no da altre cifre), si approssima per eccesso (la cifra che precede viene aumentata di 1, se tale cifra è 9 diventa zero e quella che precede aumenta di 1): si vedano ad esempio nella tabella i passaggi $a \rightarrow b$ (dove è stato eliminato l'ultimo decimale, 8, e il 5 che lo precede è diventato 6) e $a \rightarrow c$ (eliminazione di due decimali il primo dei quali è 5, il 4 che precede è diventato 5). Se invece, nel gruppo delle cifre che vengono eliminate, la prima è 4 o meno di 4, si approssima per difetto (la cifra che precede viene lasciata uguale): si veda nel riquadro il passaggio $a \rightarrow d$ (eliminazione di tre decimali il primo dei quali è 4, la cifra precedente è rimasta 2).

4. Un caso particolare si presenta quando l'approssimazione consiste nell'eliminare o semplicemente un 5 (passaggio $c \rightarrow d$ in tabella), oppure un 5 seguito solo da zeri: si approssima allora per difetto se si sa che il 5 proviene da un'approssimazione per eccesso (come in tabella), si approssima invece per eccesso se il 5 proviene da un'approssimazione per difetto. Ad esempio, 31,50 diventa 32 se il numero originario era 31,503, diventa 31 se il numero originario era 31,497. Se non sappiamo niente della storia precedente del numero, siamo liberi di approssimare per difetto o per eccesso.

5. Nel caso invece di un numero intero, l'arrotondamento consiste nel sostituire l'ultima cifra, o le due ultime, o le tre ultime... o tutte (tranne ovviamente la prima), con altrettanti zeri (se già non lo sono). Per il numero che precede la cifra che viene sostituita con uno zero, o la prima delle cifre sostituite con zero, ci si regola esattamente come si fa, nel caso dei numeri decimali, con la cifra che precede il decimale eliminato. Esempi:

$427091 \rightarrow 427090 \rightarrow 427100 \rightarrow 427000 \rightarrow 430000 \rightarrow 400000$

$506289 \rightarrow 506290 \rightarrow 506300 \rightarrow 506000 \rightarrow 510000 \rightarrow 500000$

$324715 \rightarrow 324710$ (oppure 324720 , se non conosciamo il precedente arrotondamento sui decimali, se cioè non sappiamo se il numero dato è stato reso intero arrotondando per eccesso o difetto: se il numero originario fosse stato $324714,8$ dovremmo arrotondare a 324710 , se fosse stato $324715,2$ dovremmo arrotondare a 324720). In ogni caso, gli arrotondamenti successivi sono $324700 \rightarrow 325000 \rightarrow 320000$ (qui si è approssimato per difetto perché in precedenza si è approssimato per eccesso: il numero originario 324715 è in effetti più vicino a 320000 che a 330000).

$2897 \rightarrow 2900 \rightarrow 3000$ (in questo caso l'arrotondamento sulla quarta cifra determina la variazione sia della terza che della seconda).

$2998 \rightarrow 3000$ (in questo caso l'arrotondamento sulla quarta cifra determina la variazione di tutte le altre).

6. A volte un numero viene brutalmente arrotondato alla potenza di 10 più vicina: si dice in tal caso che del numero in questione si è dato l'**ordine di grandezza**: così, l'ordine di grandezza del numero 3627 è 1000, l'ordine di grandezza del nu-

numero 69617 è 100000. Ciò è utile quando (come in Fisica avviene abbastanza spesso) interessano solo stime puramente indicative. Per esempio, l'ordine di grandezza della massa espressa in kilogrammi è 10^{-30} per l'elettrone, 10^{-27} per il protone, 10^{-4} per una goccia d'acqua, 10^2 per l'uomo, 10^{24} per la Terra, 10^{30} per il Sole, 10^{41} per la nostra galassia (la Via Lattea), 10^{52} per l'Universo.

6. Spesso in Fisica si presenta l'opportunità di approssimare non un numero x , ma una funzione di x . Sono tipici i casi mostrati nella tabella 3 qui a lato, in cui si suppone che x sia piccolo in rapporto a 1 (l'errore introdotto con l'approssimazione tende a zero se x tende a zero).

Nella prima relazione n può essere sia positivo che negativo. Le tre ultime relazioni presuppongono che x sia la misura di un angolo *in radianti*. Per un angolo di 5° , ad esempio, possono essere senz'altro utilizzate: 5 non è affatto piccolo in rapporto a 1, ma 5 gradi corrispondono a 0,087 radianti, e il numero 0,087 è meno di un decimo di 1.

$(1 \pm x)^n$	$\approx 1 \pm nx$
e^x	$\approx 1 + x$
$\ln(1 \pm x)$	$\approx \pm x$
$\text{sen } x$	$\approx x$
$\text{cos } x$	≈ 1
$\text{tg } x$	$\approx x$

Tabella 3 - *Approssimazioni valide per $x \ll 1$.*

7. La differenza (presa in valore assoluto) tra valore originario e valore approssimato è l'**errore assoluto** del valore approssimato. Il rapporto tra l'errore assoluto e il valore originario (preso in valore assoluto se espresso da un numero negativo, come ad esempio può accadere per una carica elettrica) è l'**errore relativo**. Moltiplicando l'errore relativo per 100 si ottiene l'**errore percentuale**. Chiaramente, l'entità dell'errore assoluto è poco indicativa: ben più significativi sono l'errore relativo e quello percentuale. Non diversamente, uno sconto di 1 € può avere un qualche rilievo se abbiamo mangiato una pizza, ma non è altrettanto interessante se stiamo comprando un'automobile.

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 1 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 1,380 651 3, che moltiplicato per 10^{-23} esprime il valore della costante di Boltzmann in unità internazionali.
- 2 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 6,67259, che moltiplicato per 10^{-11} esprime il valore della costante universale di gravitazione in unità internazionali.
- 3 Eliminare un numero di decimali via via più grande nel numero 2,997 924 58, che moltiplicato per 10^8 dà il valore (esatto, per definizione) della velocità della luce nel vuoto in m/s.

- 4 Una vecchia quotazione della lira (moneta italiana) contro il marco (moneta tedesca) era 989,99 lire/marco. Si elimini in tale numero prima la cifra dei centesimi, poi anche quella dei decimi.
- 5 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $\ln(1-x) = -x$
(a) quando $x = 0,5$ (b) quando $x = 0,1$ (c) quando $x = 0,05$.
- 6 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $e^x = 1 + x$
(a) quando $x = 1$ (b) quando $x = 0,5$ (c) quando $x = 0,1$.
- 7 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $(1+x)^n = 1 + nx$, quando $n = 3$ e quando è (a) $x = 0,5$ (b) $x = 0,1$ (c) $x = 0,05$.
- 8 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $\sin x = x$
(a) quando $x = 1$ rad (b) quando $x = 0,5$ rad (c) quando $x = 0,1$ rad.
- 9 Determinare quale errore percentuale si introduce assumendo $\cos x = 1$
(a) quando $x = 0,5$ rad (b) quando $x = 0,1$ rad (c) quando $x = 0,05$ rad.
- 10 Determinare quale errore percentuale si introduce attribuendo alla costante dei gas ($R = 8,314510$ J/mol·K) il valore di 8,31 J/mol·K.

SOLUZIONI

- 1 1,380 651 3 → 1,380 651 → 1,380 65 → 1,380 7 → 1,381 → 1,38 → 1,4 → 1.
- 2 6,672 59 → 6,672 6 → 6,673 → 6,67 → 6,7 → 7.
- 3 2,997 924 58 → 2,997 924 6 → 2,997 925 → 2,997 92 → 2,997 9 → 2,998 → 3,00 → 3,0 → 3.
- 4 989,99 → 990,0 → 990.
- 5 (a) Valore vero $-0,6931\dots$, valore approssimato $-0,5$, errore 0,193... (27,9%).
(b) Valore vero $-0,105\dots$, valore approssimato $-0,1$, errore 0,005... (5,09%).
(c) Valore vero $-0,05129\dots$, approssimato $-0,05$, errore 0,00129... (2,52 %).
- 6 (a) Valore vero 2,718..., valore approssimato 2, errore 0,718... (26,4%).
(b) Valore vero 1,648..., valore approssimato 1,5, errore 0,148... (9,02%).
(c) Valore vero 1,105..., valore approssimato 1,1, errore 0,005... (0,468 %).
- 7 (a) Valore vero 3,375, valore approssimato 2,5, errore 0,875 (25,9%).
(b) Valore vero 1,331, valore approssimato 1,3, errore 0,031 (2,33%).
(c) Valore vero 1,1576..., approssimato 1,16, errore 0,0023... (0,659%).
- 8 (a) Valore vero 0,841..., valore approssimato 1, errore 0,158... (18,8%).
(b) Valore vero 0,479..., valore approssimato 0,5, errore 0,020... (4,29%).
(c) Valore vero 0,0998..., valore approssimato 0,1, errore 0,0002 (0,167%).
- 9 (a) Valore vero 0,8775..., valore approssimato 1, errore 0,122... (13,9%).
(b) Valore vero 0,9950..., valore approssimato 1, errore 0,0049... (0,502%).
(c) Valore vero 0,9987..., valore approssimato 1, errore 0,0012... (0,125%).
- 10 Valore noto 8,314510, valore approssimato 8,31, errore 0,00451 (0,0542 %).

2.3 Errori di misura

1. Il valore *vero* di una grandezza è una pura astrazione: nella pratica, se si ripete molte volte il tentativo di ottenere la misura precisa di una data grandezza fisica, si ottiene ogni volta un valore un po' diverso, il che chiaramente significa che tutti i valori ottenuti, tranne eventualmente uno, sono sbagliati. Per quanto infatti si cerchi, nelle operazioni di misura, di essere attenti e meticolosi, l'esattezza del risultato è sempre limitata da cause di errore che sfuggono al controllo e che non è possibile eliminare.

2. Quando, su una stessa grandezza, effettuiamo una serie di misure, i cosiddetti **errori sistematici** spostano il risultato sempre in difetto oppure sempre in eccesso rispetto al valore vero, con uno scarto ogni volta uguale. Per questo motivo può essere molto difficile – se il valore vero non è già noto per altra via, e se non si procede alla stessa misura con altro procedimento o altra strumentazione – accorgersi della presenza di errori di questo tipo: al limite, in presenza di errori solo sistematici (eventualità puramente teorica), ripetendo le stesse operazioni si otterrebbe ogni volta lo stesso risultato, cosicché non avremmo alcun indizio circa la presenza di errori.

3. Viceversa, gli **errori casuali** (o **accidentali**, o **statistici**) spostano il risultato della misura a volte in difetto, a volte – con uguale probabilità – in eccesso rispetto al valore che si otterrebbe in assenza di errori casuali, con uno scarto ogni volta diverso: se gli errori sono solo casuali, in una serie di misure sulla stessa grandezza (e con la stessa procedura) la media aritmetica degli errori tende a zero quando il numero delle misure tende a infinito. Errori di questo genere si dicono *statistici* per il fatto che, *se la misura viene ripetuta molte volte*, i valori ottenuti possono essere sottoposti ad analisi statistica, ricavandone indicazioni di tipo probabilistico sia sul valore che si otterrebbe se gli errori casuali non ci fossero, sia sull'entità e la frequenza dei possibili risultati di nuove, eventuali operazioni di misura.

4. Sono tipici errori sistematici quelli imputabili a difetti dello strumento di misura: un righello poco preciso, un orologio che «va avanti», una bilancia che «si è staccata» e quindi non segna zero quando dovrebbe... Sistematici sono anche gli errori che provengono da un uso errato della strumentazione, o dall'aver assunto nei calcoli un valore sbagliato per una delle grandezze da cui dipende il risultato (per esempio, la velocità del suono in quelle specifiche condizioni atmosferiche), nonché gli errori concettuali insiti nel procedimento di misura (determinazione dell'accelerazione di gravità misurando il tempo di caduta di un oggetto in presenza d'aria anziché nel vuoto). Un abile sperimentatore è normalmente in grado di controllare e ridurre praticamente a zero le cause di errore sistematico.

5. Sono invece di tipo casuale molti degli errori dovuti all'intervento dell'operatore (giudizio ogni volta un po' diverso sul tempo di inizio o di fine di un processo, valutazione ogni volta un po' diversa della posizione di un indice su una scala graduata, anticipi o ritardi ogni volta un po' diversi nell'azionamento dei pulsanti di un cronometro). Possono essere causa di errori casuali anche le piccole, continue,

inevitabili variazioni delle condizioni fisiche in cui si opera (temperatura, umidità, pressione atmosferica, tensione di alimentazione degli apparecchi elettrici, campo magnetico...).

6. Se gli errori sistematici sono trascurabili, il procedimento di misura si dice *accurato*: in tal caso le misure ottenute – più o meno vicine tra di loro – risultano, se sono sufficientemente numerose, distribuite in modo simmetrico attorno al valore vero. Quando invece sono piccoli gli errori casuali, il procedimento di misura si dice *preciso*: in tal caso le misure ottenute, più o meno vicine al valore vero, sono comunque tutte molto vicine l'una alle altre.

7. La fig. 1 rappresenta i possibili errori in un esperimento di tiro a segno. Nel caso *a*) gli errori sono equamente ripartiti nelle diverse direzioni (sopra e sotto, a destra e a sinistra del bersaglio): probabilmente il fucile è ottimo, ma il tiratore ha poca mira. Con la terminologia della teoria degli errori parleremmo di un esperimento accurato ma poco preciso.

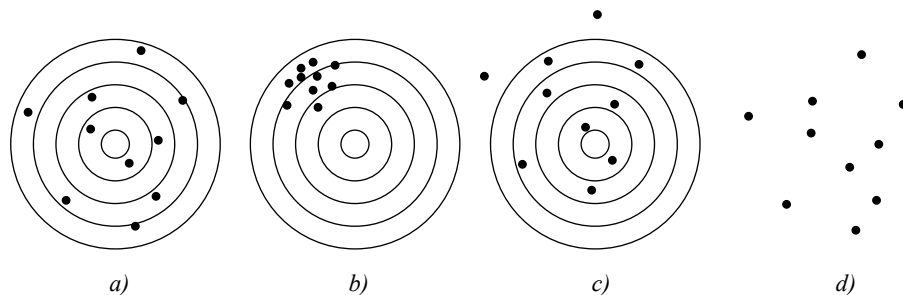


Fig. 1 – Tiro a segno. Il risultato *a*) è determinato da errori di tipo casuale; il risultato *b*) è prodotto da errori di tipo sistematico; nel risultato *c*) si nota la presenza di errori sia casuali che sistematici; nel caso *d*) la posizione del bersaglio non è conosciuta: la presenza di errori casuali è evidente, ma nulla può essere detto circa la presenza di errori sistematici.

Nel caso *b*) gli errori sono grandi, ma i punti colpiti sono tutti molto vicini tra di loro: il tiratore è bravo, ma forse il fucile non è all'altezza. È il corrispettivo di un esperimento di misura preciso ma poco accurato.

Nel caso *c*) gli errori sono grandi e non sono distribuiti con simmetria attorno al bersaglio: il tiratore non vale molto, ma anche il fucile non è un gran che. Esperimento poco accurato e poco preciso.

Nel caso *d*) la posizione del bersaglio è ignota: la presenza di errori casuali è evidente (sparpagliamento dei colpi), ma non è possibile stabilire se ci siano anche errori sistematici. Analogia: se il valore vero di una grandezza non è conosciuto, l'analisi dei valori ottenuti ripetendo una misura non è in grado di rivelare la presenza di errori sistematici.

2.4 Dichiarazione dell'incertezza

1. Per il fatto che gli errori di misura sono inevitabili, i numeri che esprimono il risultato di operazioni di misura contengono sempre un margine di dubbio, un'incertezza più o meno grande. A volte l'entità dell'incertezza viene dichiarata esplicitamente, scrivendo il valore trovato nella forma $x \pm \Delta x$, dove x è il valore che si ritiene più probabile, e Δx (quantità sempre espressa da numeri positivi) è per l'appunto l'incertezza da cui si ritiene possa essere affetta la misura ottenuta: più esattamente, l'**incertezza assoluta**, indicata spesso anche come *errore* assoluto^[2]. Per esempio, se la misura di una lunghezza viene data, in una determinata unità, come $73,4 \pm 0,9$ significa che, a giudizio di chi ha effettuato la misura, il valore vero dovrebbe essere 73,4, e dovrebbe comunque trovarsi nell'intervallo tra $73,4 - 0,9 = 72,5$ e $73,4 + 0,9 = 74,3$.

2. Il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore più probabile (preso in valore assoluto se espresso da un numero negativo) rappresenta l'**incertezza relativa**:

$$\text{incertezza relativa} = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Chiaramente, la «validità» di una misura dipende non dall'incertezza assoluta, ma dall'incertezza relativa: se misuriamo una lunghezza di 10 km con un'incertezza di 1 m facciamo un lavoro molto più preciso che misurando una lunghezza di 10 m con l'incertezza di 1 cm (l'incertezza relativa è 1 su 10000 nel primo caso, 1 su 1000, dieci volte più grande, nel secondo).

L'**incertezza percentuale** si ottiene moltiplicando per cento l'incertezza relativa:

$$\text{incertezza percentuale} = 100 \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Ad esempio, in una misura espressa come $73,4 \pm 0,9$ l'incertezza relativa è $0,9/73,4 = 0,012$ e c'è un'incertezza percentuale dell'1,2%.

3. A volte, nelle misure di estrema precisione, l'incertezza relativa è così piccola che è conveniente esprimerla moltiplicandone il valore non per cento, ma per un milione: al posto dell'incertezza percentuale (che esprime l'incertezza in termini di *parti per cento*) si ottiene allora l'incertezza in *parti per milione*. Ad esempio, il valore trovato nel 1986 per la carica elettrica elementare (la carica del protone o, con segno negativo, dell'elettrone) era $1,602\,177\,33 \times 10^{-19}$ con un'incertezza relativa di 0,30 parti per milione ($0,30 \times 10^{-6}$), e quindi un'incertezza assoluta di $4,8 \times 10^{-26}$ (nel valore indicato, il 733 finale doveva in definitiva leggersi 733 ± 48).

4. La dichiarazione esplicita dell'incertezza è tipica del lavoro di laboratorio: il valore più probabile coincide in questo caso con la media aritmetica x_m degli n valori ottenuti; l'incertezza è di solito costituita dalla **deviazione standard** (simbolo σ),

² Il termine *errore* può dunque significare, a seconda del contesto, sia «differenza tra valore originario e valore approssimato» sia anche «incertezza» di una misura.

che corrisponde allo **scarto quadratico medio**: vale a dire, è la radice quadrata della media dei quadrati delle differenze tra valori ottenuti e valore medio. In formula:

$$[A] \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_m)^2}{n}},$$

dove \sum è una somma i cui n addendi si ottengono attribuendo successivamente all'indice i tutti i valori interi da 1 a n (estremi inclusi):

$$\sum (x_i - x_m)^2 = (x_1 - x_m)^2 + (x_2 - x_m)^2 + (x_3 - x_m)^2 + \dots + (x_n - x_m)^2. \quad [3]$$

5. Il significato della deviazione standard è il seguente: se le misurazioni effettuate sono sufficientemente numerose (indicativamente, non meno di qualche decina), il 68% dei valori ottenuti rientra nell'intervallo tra $x_m - \sigma$ e $x_m + \sigma$. Ovvero: se si procede a un'ulteriore misura – con le stesse modalità – della grandezza in esame, esiste il 68% di probabilità di ottenere un valore compreso entro tale intervallo.

6. In alternativa, l'incertezza può essere costituita dalla **deviazione standard della media** (simbolo σ_m), che si ottiene dividendo la deviazione standard σ per la radice quadrata del numero n delle misurazioni effettuate ($\sigma_m = \sigma / \sqrt{n}$) e rappresenta l'incertezza (il grado di affidabilità) del valore medio x_m ottenuto: se si effettuasse una serie di (numerose) determinazioni del valore medio, ognuna costituita da un ugual numero n di misure, probabilmente il 68% dei valori medi così ottenuti differirebbe per meno di σ_m dalla loro media ^[4].

Si noti che, come del tutto ovvio, l'incertezza sul valore medio è molto più piccola dell'incertezza relativa a una singola misura (il 68% di probabilità riguarda, nel caso del valore medio, un campo di valori \sqrt{n} volte più ristretto).

7. A livello di esercitazione scolastica, il valore fornito per l'incertezza dal calcolo viene normalmente indicato approssimandone il valore con un numero contenente (dopo gli eventuali zeri iniziali) *una sola cifra diversa da zero*: a meno che tale cifra non sia 1 o eventualmente 2, nel qual caso, per non modificarne in modo troppo brutale il valore (sia la sottostima che la sovrastima dell'incertezza sono da evitare), può essere meglio indicare l'incertezza con due cifre diverse da zero. Ad esempio:

$$0,0341 \rightarrow 0,03 \quad 0,0281 \rightarrow 0,03 \quad 0,771 \rightarrow 0,8$$

$$6,18 \rightarrow 6 \quad 93,2 \rightarrow 90 \quad 0,138 \rightarrow 0,14. \quad [5]$$

³ Alcuni Autori preferiscono porre $n-1$ a denominatore della [A]. Se, come indicato al punto 5, le misure effettuate sono "sufficientemente numerose", la differenza è in pratica inapprezzabile.

⁴ Ne deriva che, *in assenza di errori sistematici*, esiste il 68% di probabilità che il valore vero (la cui miglior stima è in questo caso il valore medio) sia compreso nell'intervallo $x_m \pm \sigma_m$.

⁵ Approssimando 0,138 a 0,1 avremmo introdotto nel valore dell'incertezza una variazione di 38 su 138 (28%).

8. In generale, *la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa nel valore medio e nell'incertezza*. Se il valore medio è $186,77$ e l'incertezza è stata approssimata a $0,3$, scrivere la misura nella forma $186,77 \pm 0,3$ è *concettualmente errato*: dato che l'incertezza è una questione di decimi, il valore più probabile può ragionevolmente contenere informazioni sui decimi, ma non sui centesimi: la forma corretta è quindi $186,8 \pm 0,3$. Se, nella stessa misura, l'incertezza fosse 3 (quindi nelle unità), il valore più probabile può dare informazioni sulle unità ma non sui decimi: quindi non $186,77 \pm 3$ e neanche $186,8 \pm 3$, ma 187 ± 3 . Se l'incertezza fosse 30 (nelle decine), il risultato può dare informazioni sulle decine ma non sulle unità: non 187 ± 30 ma 190 ± 30 (in tal modo, l'ultima cifra diversa da zero corrisponde alle decine sia nel valore medio che nell'incertezza).

9. Eccezione: se la prima cifra dell'incertezza è molto piccola (1 o anche 2), può essere conveniente tenere nel valore medio una cifra in più. Un risultato come $33,7 \pm 5$ cm non ha molto senso (e deve quindi essere espresso come 34 ± 5), dato che l'incertezza (5) è molto più grande della variazione (0,3) che dobbiamo introdurre nel valore medio per approssimarlo all'unità superiore (non c'è dunque motivo per non approssimare). Potrebbe invece avere senso un risultato come $33,7 \pm 1$, perché se approssimiamo a 34 ± 1 il valore medio viene spostato verso l'alto di una quantità (0,3) non sufficientemente piccola in rapporto all'incertezza.

10. L'entità dell'incertezza di misura dipende da molte circostanze. Incertezze del 10%, che in linea generale sono l'effetto di procedimenti di misura alquanto grossolani, nel caso di misure molto difficili potrebbero rappresentare un successo. Reciprocamente, incertezze dell'1%, che a livello di laboratorio scolastico rappresentano di solito un risultato già buono, possono a volte essere ottenuti con operazioni di misura abbastanza elementari. Ad esempio, per misurare un intervallo di tempo di un'ora con un errore di un secondo serve solo un buon cronometro: in tal caso l'errore percentuale è estremamente piccolo, appena lo 0,03%.

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 11 Si determini l'incertezza relativa e l'incertezza percentuale in una misura espressa dal numero $210,4 \pm 0,9$.
- 12 Si mostri come deve venire espressa l'incertezza se dal calcolo il suo valore risulta (a) 0,538 (b) 2,69 (c) 0,140 (d) 18,06 (e) 1,28 (f) 0,0247 (g) 0,090.
- 13 Per il valore medio di una certa grandezza la calcolatrice ha fornito il valore 823,637. Si mostri come tale valore dovrebbe venire espresso se l'incertezza fosse (a) 0,3 (b) 3 (c) 0,06 (d) 40 (e) 110 (f) 1,2 (g) 0,1.
- 14 Supponiamo che nella misura di una certa grandezza si siano successivamente ottenuti i seguenti valori numerici:
89,3 89,7 88,8 89,1 89,5 88,2 88,9 89,2 89,0 88,9.
Come dovrebbe essere espresso, allora, il risultato della misura? Si assuma come incertezza la deviazione quadratica media σ , e si calcoli σ non direttamente con la calcolatrice ma basandosi sulla sua definizione.

SOLUZIONI

- 11 Incertezza relativa $0,9/210,4 = 0,0042$, incertezza percentuale $0,42\%$.
- 12 (a) 0,5 (b) 3 (c) 0,14 (d) 20 (e) 1,3 (f) 0,025 (g) 0,090.
 Nei casi (a), (b), (d), (g) è stata applicata la regola generale (una sola cifra diversa da zero dopo gli eventuali zeri iniziali). Negli altri casi si sono tenute due cifre diverse da zero, per evitare arrotondamenti troppo brutali.
- 13 (a) $823,6 \pm 0,3$ (b) 824 ± 3 (c) $823,64 \pm 0,06$ (d) 820 ± 40 (e) 820 ± 110 (f) $823,6 \pm 1,2$ (g) $823,63 \pm 0,1$ (approssimando a 823,6 avremmo spostato il valore medio verso il basso di 3 centesimi, una quantità non abbastanza piccola rispetto all'incertezza).
- 14 Il valore medio è 89,06. Gli scarti (valore assoluto) sono rispettivamente 0,24 0,64 0,26 0,04 0,44 0,86 0,16 0,14 0,06 0,16.
 La somma dei quadrati dei dieci scarti è 1,544. Dividendo per $(10-1) = 9$ ed estraendo la radice quadrata si ottiene 0,414: questa è la deviazione quadratica media, che possiamo assumere come misura dell'incertezza scrivendo 0,4. In definitiva il risultato della misura è $89,1 \pm 0,4$.

2.5 Propagazione dell'incertezza

1. In molti casi, sottoporre una grandezza a misurazione diretta non è possibile, o almeno non è conveniente: la misura si può invece ottenere combinando opportunamente le misure di altre grandezze. L'area di un foglio si potrebbe determinare in modo diretto per confronto con un campione di area, ad esempio con un quadratino di carta ritagliato da un foglio di carta millimetrata: contando quante volte occorre sovrapporre il quadratino (o quanti quadratini occorre sovrapporre) per ricoprire l'intero foglio e moltiplicando poi per l'area del nostro campione otterremmo l'area del foglio. Ma possiamo anche misurare l'area del foglio indirettamente – in modo molto più comodo, molto più rapido, e sicuramente anche molto più preciso – misurando la base e l'altezza del rettangolo e moltiplicando le due misure. Il volume di una sfera si può determinare indirettamente misurando il diametro, dividendo per due, elevando al cubo e moltiplicando per $4\pi/3$. Una velocità media si può ottenere misurando la lunghezza del percorso e il tempo impiegato, e dividendo la prima misura per la seconda. E così via.

2. Sennonché, ogni misura contiene un'incertezza (un errore) più o meno grande: come si combinano le incertezze quando due o più misure vengono sommate o moltiplicate? Come *si propagano* le incertezze dai dati iniziali al risultato finale?

Fortunatamente, le relative regole sono molto semplici.

(a) Prodotto di una grandezza per un numero esatto N : l'incertezza contenuta nel risultato è N volte più grande di quella contenuta nella misura della grandezza. Esempio: se, in una certa unità, la lunghezza del lato di un triangolo regolare è $12,4 \pm 0,9$, il perimetro del triangolo è $(3 \times 12,4) \pm (3 \times 0,9) = 37,2 \pm 2,7$ (che diventa 37 ± 3).

(b) Somma o differenza di grandezze: l'incertezza contenuta nel risultato è la somma delle incertezze contenute nelle misure originarie. Se la misura della grandezza A è $25,2 \pm 0,6$ e la misura della grandezza B è $16,7 \pm 0,3$, la misura della differenza $A - B$ è $(25,2 - 16,7) \pm (0,6 + 0,3) = 8,5 \pm 0,9$.

(c) Prodotto o quoziente di grandezze: l'incertezza *relativa* del risultato è la somma delle incertezze relative delle misure originarie (e lo stesso vale per le incertezze percentuali). Esempio: se la misura della grandezza A è 731 ± 6 e la misura della grandezza B è 127 ± 2 , nella misura del rapporto A/B l'incertezza relativa è $\frac{6}{731} + \frac{2}{127} = 0,008 + 0,016 = 0,02 = 2\%$. Perciò nella misura del rapporto A/B il valore più probabile è $731/127 = 5,76$, e l'incertezza assoluta è $5,76 \times 0,02 = 0,1$. In definitiva, la misura di A/B è $5,8 \pm 0,1$.

(d) Grandezza elevata alla N (numero qualsiasi): l'errore *relativo* nel risultato è uguale a N volte l'errore contenuto nella misura della grandezza. Se, ad esempio, la misura del lato di un cubo in millimetri è $23,8 \pm 0,3$, l'errore relativo è $3/238 = 0,0126$. Perciò, il volume è noto con un'incertezza relativa $3 \times 0,0126 = 0,0378$. Il valore più probabile per il volume è $23,8^3 \text{ mm}^3 = 13481,272 \text{ mm}^3$. Moltiplicando tale valore per l'incertezza relativa si ottiene che il volume del cubo è noto con un'incertezza assoluta di 509 mm^3 . In definitiva, il volume del cubo deve essere espresso come $(13500 \pm 500) \text{ mm}^3$.

3. Osservazione: se le incertezze delle misure originarie si possono considerare indipendenti l'una dall'altra, e se è ragionevolmente sicura l'assenza di errori sistematici, nelle regole *b*) e *c*) conviene sostituire la semplice somma aritmetica degli errori (o degli errori relativi) con la somma «in quadratura» (o *somma quadratica*): vale a dire, con la radice quadrata della somma dei quadrati. Con ciò, il valore dell'incertezza risulta sempre diminuito (anche se non sempre in modo significativo), il che risulta opportuno da considerazioni relative alla probabilità del combinarsi degli errori casuali.

L'idea della somma in quadratura *non può* evidentemente applicarsi alla potenza di una grandezza: elevare alla N la misura una grandezza significa moltiplicare N volte per sé stessa quella misura, ed è ben chiaro che in tale prodotto le misure che vengono moltiplicate non sono indipendenti l'una dalle altre.

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 15 Per il volume interno di una bombola è stato trovato il valore $(30,18 \pm 0,04) \ell$. Qual è allora il volume complessivo di 12 bombole identiche?
- 16 Il peso di un foglio di carta di 1 m^2 è stato valutato come $(80,4 \pm 0,7) \text{ g}$. Che cosa si può dire del peso di 1 cm^2 di quella carta?
- 17 Per i lati a, b, c di un triangolo si sono ottenute le seguenti misure (in cm):
(a) $15,12 \pm 0,07$ (b) $8,71 \pm 0,05$ (c) $10,44 \pm 0,09$.
Qual è la misura del perimetro?

- 18 Il peso di un secchio vuoto è $(1,44 \pm 0,03)$ kg, il peso dello stesso secchio pieno d'acqua è $(12,38 \pm 0,06)$ kg. Qual è il peso dell'acqua posta nel secchio?

SOLUZIONI

- 15 L'incertezza sul volume totale è $(12 \times 0,04) \ell = 0,48 \ell$ che scriviamo come $0,5 \ell$. Il volume totale più probabile è $(12 \times 30,18) \ell = 362,16 \ell$. La misura del volume totale è pertanto $(362,2 \pm 0,5) \ell$.
- 16 Dato che 1 cm^2 è 10 000 volte più piccolo di 1 m^2 , il valore più probabile per il peso di 1 cm^2 è $80,4 \times 10^{-4} \text{ g}$, l'incertezza è $0,7 \times 10^{-4} \text{ g}$.
- 17 L'incertezza è la somma delle incertezze: $0,07 + 0,05 + 0,09 = 0,21 \rightarrow 0,2$.
Il valore più probabile è la somma dei valori più probabili: $15,12 + 8,71 + 10,44 = 34,27$. Allora la lunghezza del perimetro (in cm) è $34,3 \pm 0,2$.
Sommando invece le incertezze in quadratura (come normalmente è meglio fare) avremmo ottenuto $\sqrt{0,07^2 + 0,05^2 + 0,09^2} = 0,124$, da arrotondarsi a $0,12$ (sommando in quadratura si ottiene sempre un valore minore). La misura del perimetro sarebbe stata espressa da $(34,27 \pm 0,12) \text{ cm}$.
- 18 Il valore più probabile è $(12,38 - 1,44) \text{ kg} = 10,94 \text{ kg}$, l'incertezza è la somma delle incertezze: $(0,03 + 0,06) \text{ kg} = 0,09 \text{ kg}$. L'acqua contenuta nel secchio pesa quindi $(10,94 \pm 0,09) \text{ kg}$. Sommando le incertezze in quadratura (meglio) avremmo ottenuto $\sqrt{0,03^2 + 0,06^2} = 0,07$.

2.6 Approssimazione implicita

È la stessa cosa scrivere 5 km oppure 5000 m? È la stessa cosa scrivere 53 kg, o 53,0 kg, o 53,00 kg? Da un punto di vista aritmetico sì, in Fisica no. Quando, nei dati di un problema, l'incertezza di una misura non è indicata in modo esplicito, è di solito sottinteso che *l'ultima cifra del numero definisce, con la sua posizione decimale, il grado di approssimazione*. Ciò è del tutto ovvio: se il numero 73,4 – nel quale l'ultima cifra corrisponde a decimi – è il risultato di un'approssimazione, e se l'approssimazione è stata effettuata correttamente, il numero originario non poteva che essere compreso tra 73,35 e 73,45. Scrivendo quindi 73,4 l'errore introdotto risulta certamente inferiore ai 10 centesimi (= 1 decimo): il numero 73,4 è, come si dice, *approssimato a meno di un decimo*.

Nel numero 24 l'ultima cifra è quella delle unità. La misura è quindi approssimata all'unità più vicina, o *a meno di un'unità*: l'errore che possiamo commettere prendendo per buono il numero 24 dovrebbe essere inferiore a 1. In effetti, se il risultato di una misura viene dato come 24, dobbiamo pensare che – nella stima di chi fornisce la misura – il valore vero della grandezza misurata è più vicino a 24 che a 23 o a 25, e quindi dovrebbe porsi tra 23,5 e 24,5.

Nel numero 24,0 l'approssimazione è nei decimi, perciò l'incertezza è 10 volte più piccola che nel numero 24. Qui poi si verifica una particolare circostanza: dato che, nel numero 24,0, l'ultima cifra – la cifra che contiene l'approssimazione – è zero, anche quella che precede risulta conseguentemente dubbia: il numero vero potrebbe essere un qualsiasi numero nella fascia tra 23,95 e 24,05.

Nel numero 24,00 l'incertezza è nei centesimi, cento volte più piccola che nel numero 24, dieci volte più piccola che nel numero 24,0: il numero vero dovrebbe trovarsi tra 24,005 e 23,995. Nel numero 24,00 le cifre dubbie sono quindi tre.

È chiaro allora che scrivere 5 km e scrivere 5000 m è ben diverso. Nella prima misura l'incertezza è nei chilometri (la lunghezza vera è compresa tra 4,5 e 5,5 km). Nella seconda misura l'incertezza è nei metri (la lunghezza vera è compresa tra 4999,5 e 5000,5 m). Se volessimo esprimerci in chilometri evidenziando al tempo stesso che l'incertezza è nei metri, dovremmo scrivere 5,000. Vedremo che il problema inverso (esprimere in centimetri la lunghezza di 31 km evidenziando che la cifra 1 è incerta) si risolve ricorrendo alla cosiddetta *notazione scientifica* (pag. 39).

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 19 Si approssimi il numero 206,009 a meno di un centesimo e a meno di un decimo.
- 20 Si approssimi il numero 130,90 a meno di un decimo e a meno di un'unità.
- 21 Quante dovrebbero essere le cifre sicure nel numero 0,999?
- 22 Quante dovrebbero essere le cifre sicure nel numero 5000?
- 23 I lati di un mattone sono rispettivamente lunghi $(62,6 \pm 0,2)$ mm, $(120,8 \pm 0,3)$ mm, $(201,1 \pm 0,6)$ mm. Qual è il volume del mattone?
- 24 Si determini la velocità di un carrello di massa $(0,427 \pm 0,004)$ kg nel momento in cui la sua quantità di moto mv è $(3,28 \pm 0,03)$ kg·m/s.
- 25 Sapendo che per il diametro di una sfera è stato trovato il valore $(14,46 \pm 0,16)$ cm, se ne deduca la misura del volume.
- 26 Supponiamo che il valore più probabile per il diametro di una sfera sia 10 cm. Con quale incertezza dovrebbe essere dato tale valore per avere sull'area della superficie l'incertezza di 1 cm^2 ?
- 27 Si esprima opportunamente in metri cubi il volume di 25000 ℓ.

SOLUZIONI

- 19 A meno di un centesimo: 206,01. A meno di un decimo: 206,0.
- 20 A meno di un decimo: 130,9. A meno di un'unità: 131.
- 21 Le prime tre. Il valore esatto è compreso tra 0,9985 e 0,9995.
- 22 Nessuna. Il valore esatto è compreso tra 4999,5 e 5000,5.
- 23 Il valore più probabile è $(62,6 \times 120,8 \times 201,1) \text{ mm}^3 = 1520734 \text{ mm}^3$.

Le incertezze percentuali sono rispettivamente $(100 \times 0,2 / 62,6) \% = 0,32 \%$, $(100 \times 0,3 / 120,8) \% = 0,25 \%$, $(100 \times 0,6 / 201,1) \% = 0,30 \%$. L'incertezza percentuale sul volume è quindi $(0,32 + 0,25 + 0,30) \% = 0,87 \%$. Dividendo per 100 e moltiplicando per il valore più probabile del volume si ottiene che l'incertezza assoluta è $13\,230 \text{ mm}^3 \rightarrow 13\,000 \text{ mm}^3$. Il volume del mattone è quindi $(1\,521\,000 \pm 13\,000) \text{ mm}^3$.

Sommando invece le incertezze percentuali in quadratura – come qui preferibile – avremmo ottenuto per l'incertezza percentuale il valore $\sqrt{0,32^2 + 0,25^2 + 0,30^2} \% = 0,50 \%$.

- 24 Il valore più probabile della velocità è $(3,28 / 0,427) \text{ m/s} = 7,68 \text{ m/s}$.

Le incertezze percentuali sono $(100 \times 0,004 / 0,427) \% = 0,937 \%$ per la massa, $(100 \times 0,03 / 3,28) \% = 0,915 \%$ per la quantità di moto. L'incertezza percentuale sulla velocità è quindi $(0,937 + 0,915) \% = 1,85 \%$, oppure, sommando in quadratura, $\sqrt{0,937^2 + 0,915^2} \% = 1,31 \%$. Nel primo caso l'incertezza assoluta è $1,85 / 100 \times 7,68 \text{ m/s} = 0,14 \text{ m/s}$, e quindi la velocità è $(7,68 \pm 0,14) \text{ m/s}$. Nel secondo caso l'incertezza assoluta è $(1,31 / 100) \times 7,68 \text{ m/s} = 0,10 \text{ m/s}$, e la velocità è $(7,68 \pm 0,10) \text{ m/s}$.

- 25 Il volume è dato da $4\pi R^3 / 3$: ponendo $R = (14,46 / 2) \text{ cm} = 7,23 \text{ cm}$ si trova che il valore più probabile del volume è 1583 cm^3 . L'incertezza assoluta sul raggio è $(0,16 / 2) \text{ cm} = 0,08 \text{ cm}$, l'incertezza percentuale è $100 \times 0,08 / 7,23 = 1,11 \%$. L'incertezza percentuale sul cubo del raggio è il triplo: $3,33 \%$. Dividendo per 100 e moltiplicando per il valore più probabile del raggio al cubo ($7,23^3$) si ottiene che l'incertezza assoluta su R^3 è $12,59 \text{ cm}^3$. L'incertezza sul volume è allora $(4\pi / 3) \times 12,59 \text{ cm}^3 = 52,7 \text{ cm}^3$, che diventa 50 cm^3 . La misura del volume è pertanto $(1580 \pm 50) \text{ cm}^3$.

Si noti che per trovare l'incertezza del volume abbiamo moltiplicato per tre (e quindi sommato tre volte) l'incertezza percentuale del raggio: *non sarebbe stato corretto* sommare le tre incertezze in quadratura, dato che evidentemente le tre incertezze in questione non possono considerarsi indipendenti l'una dall'altra.

- 26 L'area della superficie della sfera è $4\pi R^2$. Se l'incertezza su $4\pi R^2$ è 1 cm^2 , l'incertezza su R^2 è $(1 / 4\pi) \text{ cm}^2 = 0,0796 \text{ cm}^2$, e dato che il valore più probabile per R^2 è $5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$, l'incertezza percentuale su R^2 è $100 \times 0,0796 / 25 = 0,318 \%$. L'incertezza percentuale su R è la metà: $0,159 \%$, e quindi l'incertezza assoluta su R è $[(0,159 / 100) \times 5] \text{ cm} = 0,00795 \text{ cm}$, e l'incertezza su $2R$ è $(2 \times 0,00795) \text{ cm} = 0,0159 \text{ cm}$, che scriviamo come $0,16 \text{ mm}$.
- 27 $25,000 \text{ m}^3$. Se avessimo scritto 25 m^3 avremmo dichiarato un'approssimazione a livello dei metri cubi, mentre nella misura originaria di $25\,000 \text{ l}$ viene dichiarata un'incertezza a livello dei litri, mille volte inferiore.

2.7 Cifre significative

1. Tutte le cifre di un numero, tranne gli eventuali zeri iniziali, si dicono **cifre significative**. Ad esempio, i numeri

$$23 - 0,15 - 0,030 - 0,0012$$

hanno, tutti e quattro, due cifre significative.

Gli zeri iniziali non sono significativi nel senso che hanno il solo scopo di precisare la posizione decimale delle cifre successive: di chiarire cioè se le cifre successive rappresentano decimi piuttosto che centesimi, o millesimi, o altro. Se, ad esempio, in una misura di lunghezza come 0,0902 m l'unità di misura dovesse per qualche ragione diventare il decimetro o il centimetro anziché il metro, il numero 0,0902 diventerebbe 0,902 oppure 9,02: come si vede, nessuna variazione si verificherebbe sulle cifre significative (che resterebbero in ogni caso tre)^[6].

2. Quando l'incertezza di un valore non è esplicitamente dichiarata, l'incertezza relativa e l'incertezza percentuale implicite sono tanto più piccole quanto più grande è il numero di cifre significative. Se scrivo 1,52 (tre cifre significative) l'incertezza relativa è 0,005 su 1,52 e l'incertezza percentuale è dello 0,3%. Se scrivo lo stesso numero con due sole cifre significative (1,5) l'incertezza relativa (0,05 su 1,5) e l'incertezza percentuale sono dieci volte più grandi. Si noti che l'incertezza relativa del numero 1,5 è la stessa del numero 0,15, del numero 15, del numero 0,015: la posizione della virgola non conta. Così pure, i numeri 0,152, 1,52, 15,2 e 152 hanno tutti la stessa incertezza relativa.

Un numero di una sola cifra significativa sarebbe affetto da un'incertezza relativa molto grande: nel numero 1 e nel numero 9 l'incertezza assoluta è 0,5, pari al 50% nel primo caso e al 6% nel secondo. Dando i numeri con due cifre significative l'incertezza relativa va invece da 0,5 su 10 (incertezza percentuale 5%) a 0,5 su 99 (incertezza percentuale 0,5%). Dando i numeri con tre cifre significative (come si fa di solito nei problemi di Fisica) l'incertezza relativa va da 0,5 su 100 (incertezza percentuale 0,5%) a 0,5 su 999 (incertezza percentuale 0,05%).

3. Da quanto precede e da considerazioni relative alla propagazione dell'incertezza nei calcoli numerici derivano le seguenti regole di massima sul numero di cifre significative nei risultati.

(a) Moltiplicazione e divisione: *il risultato contiene al massimo tante cifre significative quante ne contiene il fattore che ne contiene di meno*. Esempio: il risultato aritmetico dell'operazione $2,1 \times 6,52$ è 13,692. Assumere senz'altro questo numero a cinque cifre come risultato sarebbe sbagliato: siccome, nel primo dato, le cifre significative sono due, il risultato contiene nell'ipotesi migliore due cifre significative, perciò deve essere scritto con due sole cifre ($2,1 \times 6,52 = 14$).

(b) Somma e sottrazione: *il risultato contiene al massimo tante cifre decimali quante ne contiene l'addendo che ne contiene di meno*. Non conta dunque il nume-

⁶ A volte si dicono *non significative* le cifre non sicure. In questo senso, se nel numero 5000 l'ultima cifra è incerta nessuna delle quattro cifre del numero è significativa.

ro di cifre significative, conta la posizione decimale dell'ultima cifra: se un addendo è incerto nelle unità, un secondo nei decimi, il terzo nei centesimi, il risultato è incerto nelle unità. Nella somma $103,9 + 2,10 + 0,219 = 106,319$ l'incertezza del risultato è nei decimi, come nel primo addendo: pertanto il risultato corretto non è $106,319$ ma $106,3$ (quattro cifre significative, si noti, *più* che nel secondo e terzo addendo). Il risultato della somma $23,0 \text{ m} + 6 \text{ cm}$ non è $23,06 \text{ m}$: se nel primo addendo l'incertezza è nei decimi (di metro), nel risultato non può essere nei centesimi. Il risultato corretto è $23,1 \text{ m}$.

4. Osservazione. Le regole date al precedente punto 3 presuppongono che l'ultima cifra di un numero sia affetta da incertezza, ma ovviamente non è sempre così. Ad esempio, se la misura del lato di un pentagono regolare è $15,72 \text{ cm}$, la misura del perimetro ($15,72 \times 5$) andrà ovviamente scritta non con una, ma con quattro cifre significative: il numero 5 non contiene infatti approssimazioni di sorta, è un numero esatto, e deve essere quindi interpretato come $5,0000\dots$ con un numero infinito di zeri. Così pure, se la somma di 12 misure ottenute è 1038, il valore medio ($85,50$) si deve scrivere con quattro, non con due cifre, perché il numero 12 non contiene approssimazioni. Lo stesso dicasi per le somme: se i due genitori pagano il biglietto intero e i tre bambini hanno lo sconto del 40%, il numero dei biglietti da pagare è $1 + 1 + 0,6 + 0,6 + 0,6 = 3,8$ (e non 4, come prescritto dalle regole per le cifre significative, avendo tutti gli addendi incertezza zero).

5. Quando un problema viene risolto passo-passo, e cioè attraverso una serie di risultati parziali (come accade molto spesso, in questo libro, nelle soluzioni dei problemi), nei dati intermedi è opportuno tenere una o più cifre significative in più rispetto a quanto prescritto dalle regole: in tal modo il risultato finale risulta di solito più preciso. Se invece al risultato finale si giunge direttamente con un unico calcolo complessivo, l'approssimazione verrà effettuata – seguendo le regole date al punto 3 – sul solo risultato finale. In ogni caso, è *normale che diverse procedure di arrotondamento portino a differenze nell'ultima cifra significativa*. Solitamente queste differenze sono piccole e di trascurabile importanza.

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 28 Quante cifre significative contengono i seguenti numeri?
 (a) 1300 (b) 1,300 (c) 0,130 (d) 0,01300 (e) 0,0005.
- 29 Qual è l'errore percentuale massimo e quale l'errore percentuale minimo in un numero costituito da quattro cifre significative?
- 30 Si scriva il numero $32,9508$ con tre sole cifre significative.
- 31 Si scriva col giusto numero di cifre il risultato delle seguenti operazioni:
 (a) $5,022 \times 0,19$ (b) $\frac{1000}{200}$ (c) $\frac{1920}{400}$ (d) $0,500^2$ (e) $1,7^3$ (f) $\frac{180,5^2}{9,64^3}$.

- 32 Si scriva col giusto numero di cifre il risultato delle seguenti operazioni:
 (a) $23,79 + 16,00 - 0,49$ (b) $61,380 + 8,46 - 100,2$ (c) $16,4^2 - 19,2$.
- 33 Con riferimento al prodotto $2,1 \times 0,652$, si verifichi l'inopportunità di scrivere tutte le cifre fornite dalla calcolatrice.
- 34 Un'esperienza mostra che il calore di fusione di un dato materiale è $\varphi = 12,2$ cal/g. Si esprima tale risultato in cal/kg.
- 35 Si esprima in m/s il risultato della seguente somma:
 $0,45$ km/min + 1280 cm/s + 20403 m/h.

SOLUZIONI

- 28 (a) quattro (b) quattro (c) tre (d) quattro (e) una.
- 29 La posizione della virgola non conta, possiamo quindi riferirci senz'altro a numeri interi. Il più piccolo numero intero con quattro cifre significative è 1000. L'incertezza implicita è $\pm 0,5$, l'incertezza percentuale è dello 0,05%. Il più grande numero intero con quattro cifre è 9999. L'incertezza implicita è $\pm 0,5$, l'incertezza percentuale è 0,005%.
- 30 33,0.
- 31 (a) 0,95 (b) 5,00 (c) 4,80 (d) 0,250 (e) 4,9 (f) 36,4.
- 32 (a) 39,30 (b) $-30,4$ (c) $269 - 19,2 = 250$.
- 33 Il risultato fornito dalla calcolatrice è 1,3692, che noi, secondo la regola, arrotondiamo a due cifre significative (1,4) perché due è il minor numero di cifre significative nei fattori. In effetti, in mancanza di indicazione esplicita dell'incertezza il numero 2,1 significa $2,1 \pm 0,05$ e il numero 0,652 significa $0,652 \pm 0,0005$. Il valore minimo del prodotto è quindi $(2,1 - 0,05) \times (0,652 - 0,0005) = 2,05 \times 0,6515 = 1,33557\dots$ Il valore massimo è invece $(2,1 + 0,05) \times (0,652 + 0,0005) = 2,15 \times 0,6525 = 1,40287\dots$ Diciamo dunque che il risultato si colloca nella fascia tra 1,33 e 1,40. Scrivendo il risultato come 1,4 dichiariamo un'incertezza a livello dei decimi, e precisamente collochiamo il risultato nella fascia tra 1,35 e 1,45, in discreto accordo con quanto previsto col calcolo. Scrivendo invece il risultato come 1,3692 dichiariamo un'incertezza nei decimillesimi, confinando arbitrariamente il risultato nella ristrettissima fascia tra 1,36915 e 1,36925.
- 34 Da un punto di vista strettamente aritmetico, $12,2$ cal/g = 12200 cal/kg. In tal modo però portiamo arbitrariamente da 3 a 5 il numero di cifre significative. Dunque, $\varphi = 1,22 \times 10^4$ cal/kg.
- 35 Esprimendo i tre valori in m/s (senza modificare il numero delle cifre significative) la somma diventa $7,5$ m/s + $12,80$ m/s + $5,6675$ m/s. Il risultato è $26,0$ m/s (un solo decimale, come nell'addendo che ne contiene il numero minimo).

2.8 Notazione scientifica

1. Se dico che la distanza Terra-Sole è 149 milioni di km, è chiaro che l'approssimazione sta nel 9, è chiaro cioè che il numero giusto di milioni di chilometri sta tra 148,5 e 149,5: altrimenti avrei detto non 149 ma 148 o 150. Se però scrivo $L = 149\,000\,000$ km, rischio di farmi fraintendere: dato che in tale indicazione numerica l'ultima cifra corrisponde a chilometri, qualcuno potrebbe capire che la distanza è approssimata al kilometro più vicino. Come scrivere allora in modo non equivoco la distanza Terra-Sole con approssimazione al milione (di chilometri) più vicino?

Altra difficoltà: se tra i dati di un problema trovo $L = 2,175$ km, e per qualche ragione mi occorre tradurre in cm, non posso scrivere $L = 217500$ cm, perché darei L non con le quattro cifre significative iniziali, ma con 6 cifre significative: il dato del problema stabilisce che l'incertezza è nei millesimi di km, cioè nei metri, mentre scrivendo $L = 217000$ cm io affermo che l'incertezza è nei cm, e quindi restringo arbitrariamente di cento volte il margine di incertezza. Come fare in tal caso?

Ancora: per l'operazione $5312 \times 0,27$ la calcolatrice mi fornisce il risultato 1434,24. Ma scrivendo il risultato in questo modo, le regole per le cifre significative sono violate: il risultato deve essere scritto con *due sole* cifre significative. Come fare?

Infine: come si fa per scrivere il numero 130,90 approssimandolo a meno di una decina, in modo cioè che l'ultima cifra scritta si riferisca alle decine?

2. Difficoltà di questo genere si risolvono utilizzando la **notazione scientifica**, scrivendo cioè i numeri nella seguente forma: prima una cifra compresa tra 1 e 9 (inclusi), poi una virgola, poi un opportuno numero di cifre (a seconda del numero di cifre significative che intendiamo scrivere), infine un'opportuna potenza del 10. Nel primo caso sopra considerato, la distanza di 149 milioni di km si scrive $L = 1,49 \times 10^8$ km, dove si segnala che il 9 è incerto, e dove il grado di incertezza corrisponde alla posizione decimale del 9, cioè a $10^{-2} \times 10^8$ km = 10^6 km, dunque a milioni di km.

Nel secondo caso, la distanza di 2,175 km si esprime in cm come $L = 2,175 \times 10^5$ cm (incertezza nel 5, cioè nei $10^{-3} \times 10^5$ cm = 10^2 cm, quindi nei metri).

Nel terzo caso, il risultato del prodotto $5312 \times 0,27$ si scrive $1,4 \times 10^3$ (due sole cifre significative).

Nell'ultimo caso, la risposta è $1,3 \times 10^2$ (il che significa che il numero vero è compreso tra 125 e 135).

Si noti che in tabella 1 (pag. 25) il valore delle costanti della Fisica (tranne quello della permeabilità magnetica del vuoto) è stato sistematicamente espresso con notazione scientifica.

3. Un ulteriore vantaggio della notazione scientifica è quello di permettere di scrivere in modo compatto i numeri molto minori di 1, costituiti cioè da uno zero seguito – dopo la virgola – da molti zeri. Nel sistema internazionale di unità di misura, ad esempio, il valore della carica dell'elettrone è 0,000 000 000 000 000 160.

Scrivere questo numero nella forma $1,60 \times 10^{-19}$ è sicuramente più comodo (e non c'è il rischio di dimenticare qualcuno dei diciotto zeri che seguono la virgola, o di scriverne qualcuno di troppo).

4. Se si devono sommare o sottrarre due numeri scritti con notazione scientifica, ci sono due possibilità. Se la potenza del 10 è la stessa per entrambi, può essere messa senz'altro a fattor comune: ad esempio,

$$5,20 \times 10^{-3} + 7,09 \times 10^{-3} = (5,20 + 7,09) \times 10^{-3} = 12,29 \times 10^{-3} = 1,229 \times 10^{-2}.$$

In caso contrario, occorre prima riscrivere i due numeri in modo che la potenza del 10 sia la stessa:

$$3,2 \times 10^{-1} + 1,07 \times 10^2 = 0,0032 \times 10^2 + 1,07 \times 10^2 = 1,0732 \times 10^2 = 1,07 \times 10^2$$

dove si è tenuto conto della regola *b*) di pag.37.

In alternativa, potremmo prima convertire i due numeri nella ordinaria forma decimale, poi sommarli e infine convertire il risultato nella forma scientifica:

$$3,2 \times 10^{-1} + 1,07 \times 10^2 = 0,32 + 107 = 107,32 = 107 = 1,07 \times 10^2.$$

2.9 Distribuzione degli errori casuali

1. Se lanciamo un dado (un normale dado a sei facce) la probabilità che esca un numero pari è identica – se il dado non è truccato – alla probabilità che esca un numero dispari. Ciò evidentemente non significa che, in una serie di lanci, i numero pari e i numero dispari dovranno alternarsi regolarmente. Un numero pari, o un numero dispari, potrebbe uscire due, tre, anche quattro, anche cinque volte di seguito: e in una serie di dieci lanci l'esito potrebbero ad esempio essere 7 pari contro 3 dispari. L'equiprobabilità dell'evento «pari» e dell'evento «dispari» si manifesta nel fatto che, *al moltiplicarsi del numero di lanci*, il rapporto tra il numero di eventi pari e il numero di eventi dispari tende a 1. Così, mentre in una serie di 10 lanci la frequenza di uscita può benissimo essere 7 pari contro 3 dispari (rapporto 2,33), è invece chiaramente molto, molto difficile che in una serie di 100 lanci si verifichi lo stesso rapporto (70 contro 30): i numeri potrebbero per esempio essere 55 contro 45, con un rapporto 1,22 (inferiore al 2,33 precedente). Ed è del tutto impensabile che in una ipotetica serie di 1000 lanci si verifichino 700 esiti di un tipo e 300 dell'altro tipo: i numeri potrebbero forse essere 525 contro 475, con un rapporto 1,11 (inferiore all'1,22 precedente).

2. Si vede dunque che, al moltiplicarsi del numero delle prove, la **frequenza statistica** (rapporto tra il numero dei casi «favorevoli» e il numero complessivo dei casi verificatisi) tende a coincidere con la **probabilità matematica** (rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili). Nel caso del dado, la probabilità matematica di uscita del numero 2 è $1/6 = 0,166$, la probabilità matematica di uscita di un numero diverso sia da 2 che da 3 è $4/6 = 0,666$. Perciò, in una ipote-

tica serie di 1000 lanci dovremmo aspettarci che il numero 4 esca circa 166 volte, e che per circa 666 volte non escano né il 2 né il 3.

3. Tutto questo dà un'idea di quale possa essere il significato e l'utilità di un'indagine statistica sui valori che si sono ottenuti ripetendo la misura di una stessa grandezza: se le misure effettuate sono sufficientemente numerose, l'esame dei valori ottenuti permetterà di valutare sia la probabilità di ottenere, in una nuova misura, un dato valore, sia la probabilità che il valore in questione sia più o meno vicino al valore medio che per la grandezza è già stato ottenuto.

4. Quando la misura di una stessa grandezza viene ripetuta nelle *stesse* circostanze con le *stesse* procedure, è possibile constatare che, al moltiplicarsi delle prove effettuate, la media aritmetica dei valori ottenuti tende a stabilizzarsi rapidamente: il suo valore cambia cioè sempre di meno quando alle prove già effettuate se ne aggiungono altre, e ben presto non cambia praticamente più. *Se non ci sono errori sistematici, tale valore-limite della media corrisponde al valore vero della grandezza.* Inoltre, al moltiplicarsi delle prove i valori man mano ottenuti tendono a distribuirsi attorno al valore medio secondo una legge di probabilità ben precisa, che corrisponde alla cosiddetta **distribuzione normale** degli errori casuali (o **distribuzione di Gauss**), descritta graficamente dalla caratteristica curva a campana del diagramma di fig. 2.

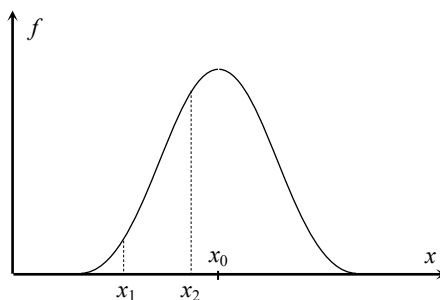


Fig. 2 – Distribuzione gaussiana degli errori casuali. Se l'area sottesa dalla curva nell'intervallo tra x_1 e x_2 vale 0,35, esiste il 35% di probabilità che il risultato di una nuova misura sia compreso tra x_1 e x_2 .

5. Il significato di tale diagramma è il seguente: in ascisse (asse delle x) sono riportati i valori che possiamo ottenere con la nostra operazione di misura; in ordinate compare la cosiddetta **densità di probabilità**: una funzione di x (qui indicata con f) definita in modo tale che l'area compresa, entro un dato intervallo di valori di x , tra la curva e l'asse delle ascisse corrisponda alla probabilità che il risultato di una misura cada all'interno dell'intervallo considerato. Per esempio, se l'area sottesa dal grafico tra x_1 e x_2 vale 0,35, vuol dire che, in una serie di molte misure, il rapporto tra il numero di valori compresi tra x_1 e x_2 e il numero complessivo dei valori ottenuti dovrebbe essere 0,35, e comunque tende a 0,35 al crescere del numero delle prove effettuate: la frequenza statistica dei valori compresi tra x_1 e x_2 tende al 35%. Chiaramente, il valore dell'area sottesa dall'intera curva è 1: il rapporto tra il numero dei valori ottenuti nell'intero intervallo dei valori possibili e il numero complessivo dei valori ottenuti è infatti 1, la probabilità che il risultato della misura sia uno qualsiasi dei valori possibili è la certezza.

6. Nella curva di Gauss (fig. 3), la densità di probabilità presenta un valore massimo in corrispondenza del valore vero (x_0) della grandezza sottoposta a misura, e assume lo stesso valore per valori di x equidistanti da x_0 (cioè per $x = x_0 \pm \Delta x$): la curva è cioè centrata sul valore vero, ed è simmetrica ai due lati del valore vero, *indipendentemente* dal particolare procedimento di misura che stiamo effettuando. Viceversa, il fatto che la campana risulti alta e stretta piuttosto che bassa e larga è essenzialmente correlato alla più o meno grande precisione delle nostre misure. Se l'esperimento è molto preciso gli errori casuali sono per lo più piccoli, cioè i valori che si ottengono sono per lo più molto vicini al valore vero: per un valore x vicino a x_0 la densità di probabilità è molto elevata, quando x si allontana da x_0 la densità di probabilità va rapidamente a zero: la campana è conseguentemente alta e stretta. Al contrario, quando gli errori casuali insiti nel procedimento di misura sono grandi (esperimento poco preciso) i valori ottenuti sono fortemente sparpagliati attorno al valore vero, e per x che si allontana da x_0 la densità di probabilità diminuisce meno rapidamente di prima: la campana è più larga e quindi più bassa (se è più larga è *necessariamente* più bassa, perché l'area sottesa ha in ogni caso valore 1).

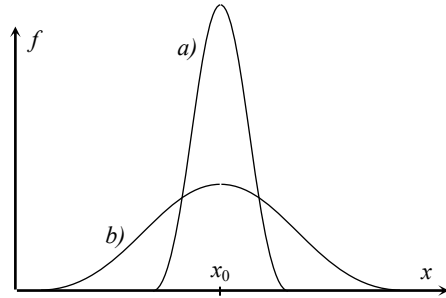


Fig. 3 – Curva a), misure molto precise. Curva b), misure poco precise. In entrambi i casi l'area sottesa ha valore 1.

Più precisamente (fig. 4), le ascisse dei due punti A e B «di flesso» della campana di Gauss (punti di massima pendenza, che separano la parte centrale, incurvata verso il basso, dai due rami laterali, incurvati verso l'alto) sono rispettivamente $x_0 - \sigma$ e $x_0 + \sigma$, dove σ (**deviazione standard della distribuzione di Gauss**) è chiaramente una misura della precisione delle misure che stiamo effettuando: più infatti σ è piccola, più i due punti di flesso sono vicini e più stretta è la campana.

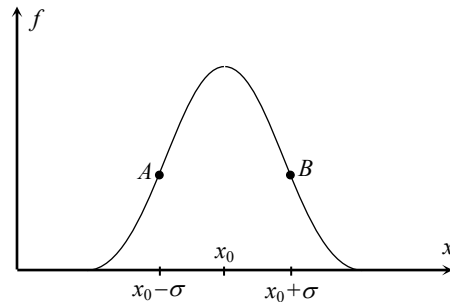


Fig. 4 – La deviazione standard σ è una misura della distanza tra i due punti di flesso, e quindi della larghezza della campana di Gauss.

L'area sottesa dalla campana tra $x_0 - \sigma$ e $x_0 + \sigma$ vale 0,683: allora, la probabilità che una misura porti a un risultato interno a tale intervallo di valori è del 68,3 % (ovvero, la probabilità di risultati esterni a tale intervallo è del 31,7%). L'area sottesa tra $x_0 - 2\sigma$ e $x_0 + 2\sigma$ vale 95,4: la probabilità che il risultato di una misura cada entro tale intervallo è quindi del 95,4 % (la probabilità di risultati esterni all'intervallo è del 4,6%). Risultati che differiscono

dal valore vero per più di 3σ sono possibili, ma molto improbabili (probabilità 3 su 1000).

7. L'equazione che, nella distribuzione di Gauss, dà la densità di frequenza f in funzione dell'errore x è

$$[A] \quad f(x) = \frac{e^{-(x_0-x)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} .$$

L'area sottesa dalla curva tra x_1 e x_2 è l'*integrale* della funzione f tra x_1 e x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \text{probabilità che il valore misurato cada tra } x_1 \text{ e } x_2 .$$

A conferma poi del fatto che la campana è tanto più stretta e alta quanto più piccolo è σ , ponendo $x = x_0$ nella [A] si vede che il valore massimo di f è

$$[B] \quad f_{\max} = 1/\sigma\sqrt{2\pi} ,$$

inversamente proporzionale a σ .

8. Sappiamo che, in una serie di eventi casuali, probabilità matematica e frequenza statistica tendono a coincidere quando il numero delle prove tende a infinito. Così, la curva teorica della probabilità di errore (la curva di Gauss) deve assomigliare al diagramma empirico delle frequenze degli errori verificatisi, tanto più quanto più numerose sono le prove effettuate. Il diagramma empirico delle frequenze è una linea a gradini (un «istogramma a intervalli») che si ottiene in questo modo: sull'asse delle x i possibili valori della grandezza sottoposta a misura sono suddivisi in intervalli; al di sopra di ogni intervallo viene tracciato un segmento orizzontale (fig.5) in posizione tale che l'area da esso sottesa (l'area cioè del rettangolo tra il segmento e l'asse delle ascisse) corrisponda alla frequenza statistica dei risultati compresi in quel dato intervallo. Ovviamente, l'area complessiva dei rettangoli che costituiscono l'istogramma deve valere 1.

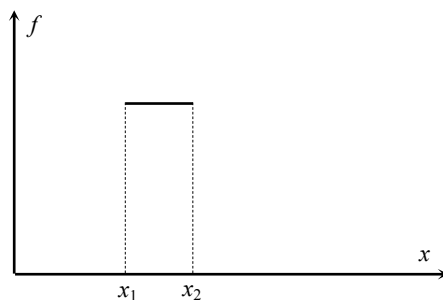


Fig. 5 – Costruzione di un istogramma a intervalli. Se l'area del rettangolo appoggiato sull'intervallo tra x_1 e x_2 valesse 0,22, vorrebbe dire che il 22% dei valori ottenuti per x sono compresi tra x_1 e x_2 .

9. Supponiamo ad esempio che nella misura di una velocità si siano ottenuti 20 valori compresi tra un minimo di 77,8 cm/s e un massimo di 79,6 cm/s. Potremmo allora considerare i sette valori 77 – 77,5 – 78 – 78,5 – 79 – 79,5 – 80 e i sei intervalli tra di essi, e per ognuno di tali intervalli contare quante volte il valore ottenuto cade nell'intervallo. Il risultato potrebbe essere ad esempio questo: su 20 valori trovati, nessuno cade nel primo intervallo (frequenza statistica 0), 3 nel secondo

(frequenza $3/20 = 0,15$), 8 nel terzo (frequenza $8/20 = 0,40$), 6 nel quarto (frequenza $6/20 = 0,30$), 2 nel quinto (frequenza $2/20 = 0,10$), uno nel sesto (frequenza $1/20 = 0,05$). Per controllo, la somma di tutte le frequenze statistiche deve risultare 1.

Dividendo ora i valori di frequenza così ottenuti per l'ampiezza del corrispondente intervallo (nel nostro esempio, tutti gli intervalli hanno la stessa ampiezza, 0,5 cm/s), otteniamo l'altezza da dare al rettangolo che si appoggia su quel dato intervallo (l'area corrisponde a base per altezza, e l'altezza è per costruzione la frequenza statistica diviso la base). Otteniamo così che le altezze dei successivi intervalli sono rispettivamente 0 per il primo, $0,15:0,5 = 0,3$ per il secondo, $0,40:0,5 = 0,8$ per il terzo, $0,30:0,5 = 0,6$ per il quarto, $0,10:0,5 = 0,2$ per il quinto, $0,05:0,5 = 0,1$. Il corrispondente istogramma delle frequenze ha l'aspetto di fig. 6.

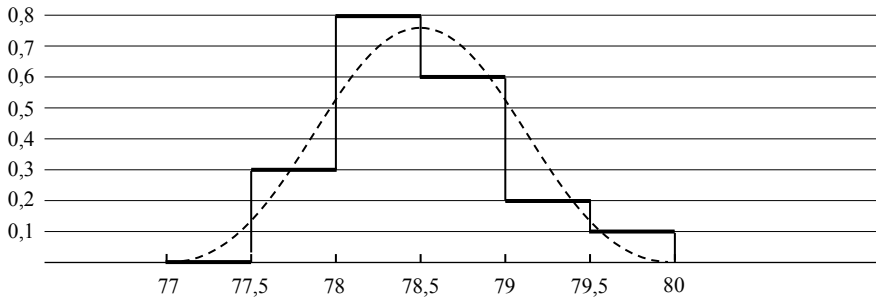


Fig. 6 – Ipotetico istogramma delle frequenze ottenuto con 20 prove. La curva tratteggiata è la curva di Gauss. Sia l'area sotto l'istogramma che l'area sotto la curva di Gauss hanno valore 1.

10. Se l'ampiezza degli intervalli è più piccola e il numero delle prove effettuate è più grande, la linea a gradini dell'istogramma delle frequenze è meno dissimile (fig. 7) da una curva continua. Man mano che l'ampiezza degli intervalli diminuisce

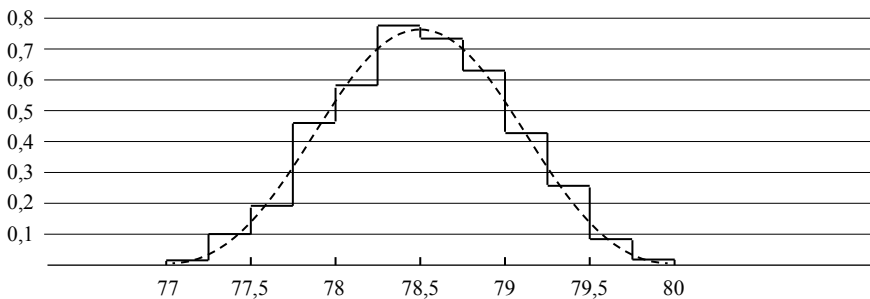


Fig. 7 – Come potrebbe trasformarsi l'istogramma della figura precedente se l'ampiezza degli intervalli viene dimezzata e se il numero delle misure viene portato a 200.

e che il numero delle prove aumenta, la forma della linea a gradini si avvicina sempre di più a quella della curva di Gauss, che rappresenta quindi, per il nostro istogramma, la curva-limite: con un numero di prove molto grande e con intervalli di ampiezza piccolissima l'istogramma delle frequenze sarebbe visivamente indistinguibile dalla curva di Gauss. In particolare, la deviazione standard della distribuzione di Gauss è il limite a cui sempre più si avvicina l'errore quadratico medio (la deviazione standard) delle nostre misure man mano che il numero delle misure diventa più grande.

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 41 Quante sono le probabilità di ottenere complessivamente 7 lanciando insieme due dadi a sei facce?
- 42 I primi cinque numeri interi sono stati ordinati con un criterio arbitrario.
 - (a) Quante sono le probabilità di indovinare i primi 2 numeri della serie?
 - (b) E quante le probabilità di indovinare tutta la serie?
- 43 Quante sono le probabilità di azzeccare un terno secco al lotto?
- 44 Se in una famiglia ci sono quattro figli, quante probabilità ci sono che siano tutti dello stesso sesso? Escluse tali eventualità, è più probabile che il numero dei maschi sia uguale oppure che sia diverso da quello delle femmine?
- 45 Supponiamo che, nella determinazione del valore di una grandezza, il numero delle misure effettuate sia molto elevato, ma che nell'istogramma delle frequenze l'ampiezza degli intervalli sia mantenuta uguale a quella di un istogramma ottenuto in precedenza con un numero di prove molto minore: dato che, in questo caso, i gradini hanno la stessa larghezza nei due istogrammi, in che senso possiamo dire che l'istogramma ottenuto con molte prove è, rispetto all'altro, molto più simile alla curva limite di Gauss?
- 46 Che accade del valore massimo della densità di frequenza f se la distanza tra i due punti di flesso della campana di Gauss raddoppia?

SOLUZIONI

- 41 Il lancio di un singolo dado può dare sei numeri diversi, a ciascuno dei quali possono associarsi sei numeri diversi col lancio del secondo dado: ci sono quindi in tutto $6 \times 6 = 36$ possibilità. Le combinazioni favorevoli (quelle che danno come risultato complessivo il 7) sono $1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3$ (il primo numero si riferisce al primo dado, il secondo numero al secondo dado). In tutto, 6 casi favorevoli contro 36 casi possibili. La probabilità è quindi $6/36 = 0,1666... \approx 17\%$.
- 42 (a) I casi possibili, e cioè le possibili combinazioni di due numeri su cinque, sono 20 (cinque diverse possibilità per il primo numero, e poi quattro diverse possibilità per ogni numero scelto per primo). Il caso favorevole è uno solo. La probabilità è quindi $1/20$, pari al 5%.
 (b) Abbiamo una probabilità su cinque di indovinare il primo numero. Se abbiamo

indovinato il primo numero, abbiamo una probabilità su quattro di indovinare il secondo. Se abbiamo indovinato il secondo, abbiamo una probabilità su tre di indovinare il terzo. Se abbiamo indovinato il terzo, abbiamo una probabilità su due di indovinare il quarto (e se abbiamo indovinato il quarto, non c'è più niente da indovinare). La probabilità di indovinare tutta la serie è allora $(1/5) \times (1/4) \times (1/3) \times (1/2) = 1/120$. Il tutto corrisponde naturalmente al fatto che ci sono 120 modi diversi di ordinare cinque numeri: cinque possibilità di scelta per il primo numero, quattro possibilità di scelta del secondo numero per ogni numero scelto come primo, tre possibilità di scelta del terzo numero per ogni numero scelto come secondo, due possibilità di scelta del quarto numero per ogni numero scelto come terzo.

- 43 Siano A, B e C i numeri su cui si è puntato. Dato che vengono estratti 5 numeri su 90, la probabilità che A faccia parte della cinquina è $5/90$. Se A è stato estratto, la probabilità che B sia uno degli altri 4 numeri estratti sono $4/89$. Se B è stato estratto, la probabilità che sia stato estratto anche C sono $3/88$. Il prodotto delle tre probabilità è la probabilità di uscita del terno: $8,51 \times 10^{-5}$ (un po' meno di 1 su 10 000).^[7]
- 44 Nel succedersi delle nascite, le possibili combinazioni maschio - femmina sono le seguenti:
- a) Tutti maschi : MMMM
 - b) Tre maschi e una femmina: MMMF MMFM MFMM FMMM
 - c) Due maschi e due femmine: MMFF MFMF MFFM FFMM FMFM FMMF
 - d) Un maschio e tre femmine: MFFF FMFF MMFM MMMF
 - e) Tutte femmine: FFFF.
- Come si vede, i casi possibili sono 16. L'eventualità a) e la e) si realizzano in un unico modo, l'eventualità b) e la d) in quattro modi diversi, la c) in sei modi diversi. Rispetto all'eventualità «tutti maschi oppure tutte femmine» i casi favorevoli sono 2 su 16 possibili, quindi la probabilità è $2/16$, cioè 12,5%. Rispetto all'eventualità «due maschi e due femmine» gli eventi favorevoli sono 6, mentre rispetto all'eventualità «tre maschi e una femmina, oppure un maschio e tre femmine» gli eventi favorevoli sono $4 + 4 = 8$. Tale eventualità è dunque più probabile della precedente nel rapporto 4 a 3.
- 45 In ogni intervallo, l'area sottesa dal gradino è molto più vicina a quella sottesa nello stesso intervallo dalla curva di Gauss.
- 46 Il valore massimo diventa la metà, come risulta dalla [B] di pag. 42.

⁷ Con i concetti del calcolo combinatorio: i casi che con l'estrazione della cinquina possono verificarsi sono tutte le N_5 combinazioni formate da 5 dei 90 numeri disponibili (N_5 è uguale al coefficiente binomiale 90 su 5, cioè a $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 / [1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5]$); i casi favorevoli sono tutte le cinque contenenti i tre numeri giocati, che sono tante quante sono le N_2 combinazioni formate da due qualsiasi degli altri 87 numeri (N_2 è uguale al coefficiente binomiale 87 su 2, cioè a $87 \times 86 / [1 \times 2]$). La probabilità che esca il terno è il rapporto N_2/N_5 tra casi favorevoli e casi possibili.