48 ($a$) Dato che $a\,\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}v$ (vedi precedente risp. 44), e al tempo stesso $a = -kv^2$ (dato del problema), possiamo scrivere $-kv^2\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}v$, ovvero $-k\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}v)/v$. Per integrazione si ottiene allora $-k(s-s_0) = \ln(v/v_0)$, dove il pedice zero si riferisce all'istante zero. Pertanto è $v(s) = v_0\,\mathrm{e}^{k(s_0-s)}$.

($b$) È per ipotesi $a = -kv^2$ e per definizione $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, quindi $-k\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v)/v^2$, da cui per integrazione si ottiene $-kt = -[(1/v)-(1/v_0)]$, e quindi in definitiva $v(t) = v_0/(1+kv_0t)$.

($c$) Essendo per definizione $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$, posto $v = v_0/(1+kv_0t)$ e integrando si ottiene $s-s_0 = (1/k)\,\ln(1+kv_0t)$.

49 Per definizione $s(t) = s_0 + \int_0^t v\,\mathrm{d}t$, e nel nostro caso $s(t) = s_0 + \int_0^t v_0\,\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t = s_0 + (v_0/k)\,(1-\mathrm{e}^{-kt})$.
Con riferimento agli istanti $t_1 = -5$ s e $t_2 = (-5+3)\,\mathrm{s} = -2$ s risulta
$s_2 - s_1 = (v_0/k)\,(1-\mathrm{e}^{-kt_2}-1+\mathrm{e}^{-kt_1}) = [(3/1{,}2)\,(-\mathrm{e}^{1{,}2\times2}+\mathrm{e}^{1{,}2\times5})\,]\mathrm{m} = 981\,\mathrm{m}$.

50 La situazione è rappresentata in fig. 35: risulta $a = 3 - v/20$. Essendo $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, e quindi $\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v)/a = (\mathrm{d}v)/(3-v/20)$, per integrazione si ricava
$t = -20\ln[(3-v_{\mathrm{fin}}/20)/(3-v_{\mathrm{iniz}}/20)]$.
Posto allora $v_{\mathrm{fin}} = 40$ (m/s) e $v_{\mathrm{iniz}} = 0$, si ottiene $t = 20\ln 3 \approx 22{,}0$ s.

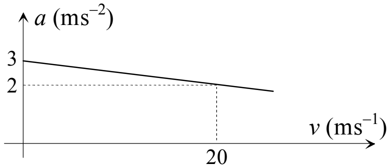

Fig. 35

## 3.13 Accelerazione vettoriale

1. L'**accelerazione vettoriale media** di un punto nell'intervallo di tempo tra $t'$ e $t''$ è la grandezza

$$[\mathrm{A}] \qquad \vec{a}_{\mathrm{m}} = \frac{\vec{v}''-\vec{v}'}{t''-t'} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Se confrontiamo tale definizione con quella di accelerazione *scalare* media, notiamo che la sola differenza sta nel fatto che questa volta a numeratore figura una differenza tra velocità *vettoriali*.

2. Se l'intervallo di tempo tende a zero, chiudendosi attorno a un particolare istante, l'accelerazione vettoriale media tende a confondersi con un vettore $\vec{a}$ avente una ben precisa direzione e un ben preciso valore: tale vettore-limite è l'accelerazione vettoriale all'istante considerato:

$$[\mathrm{B}] \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Un punto dunque possiede accelerazione vettoriale tutte le volte che il vettore velocità è, per qualche ragione, in variazione: o perché si sta allungando (velocità in aumento), o perché si sta accorciando (velocità in diminuzione), oppure perché sta cambiando direzione.

3. Col linguaggio dell'analisi matematica, il vettore accelerazione è *la derivata* del vettore velocità rispetto al tempo, e quindi la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione:

[C] $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Potremo ovviamente scrivere

[D] $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_z$$

dove le tre derivate temporali seconde sono le componenti cartesiane del vettore accelerazione.

4. Si noti (fig. 36) che l'angolo tra la velocità $\vec{v}$ e il suo incremento $\mathrm{d}\vec{v}$ può avere *qualsiasi valore* tra 0 e 180° (in figura, la linea a tratteggio vuole suggerire l'idea che la lunghezza del vettore $\vec{v}$ è infinitamente grande rispetto a quella del vettore infinitesimo $\mathrm{d}\vec{v}$). È chiaro che:

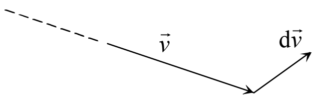

Fig. 36

(*a*) se l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{v}$ (e con esso il vettore accelerazione) è diretto come $\vec{v}$, il vettore velocità si sta allungando (modulo in aumento);

(*b*) se l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{v}$ (e con esso il vettore accelerazione) è diretto in senso opposto a $\vec{v}$, il vettore velocità si sta accorciando (modulo in diminuzione);

(*c*) se l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{v}$ (e con esso il vettore accelerazione) è diretto perpendicolarmente a $\vec{v}$, il vettore velocità sta ruotando (sta variando la direzione senza che cambi il modulo).

5. Consideriamo ad esempio (fig. 37) il caso concreto di un corpo puntiforme *K* (diciamo, per fissare le idee, un sasso) lanciato in aria e abbandonato all'azione del suo peso, e cioè all'attrazione gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra (dovremo quindi supporre trascurabile la forza esercitata su *K* dall'aria). Come si vedrà al capitolo *Gravitazione*, a ogni punto *P* dello spazio è univocamente associabile un vettore accelerazione di gravi-

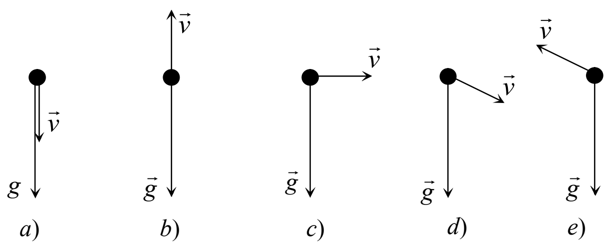

Fig. 37 - *a) modulo del vettore* $\vec{v}$ *in aumento; b) modulo del vettore* $\vec{v}$ *in diminuzione; c) il vettore* $\vec{v}$ *sta ruotando in senso orario; d) rotazione di* $\vec{v}$ *in senso orario e modulo in aumento; e) rotazione di* $\vec{v}$ *in senso antiorario e modulo in diminuzione.*

tà $\vec{g}$, nel senso che un qualsiasi corpo puntiforme soggetto solo al proprio peso possiede in $P$, quali che siano le sue condizioni di moto, una identica accelerazione $\vec{g}$ : sulla superficie terrestre $\vec{g}$ è diretta verticalmente verso il basso e ha mediamente valore 9,8 m/s$^2$ [21] La casistica è mostrata in fig. 37.

Se potessimo mettere il nostro sasso in orbita attorno alla Terra su una traiettoria circolare (con centro el centro della Terra), la forza gravitazionale risulterebbe ortogonale alla velocità (fig. 37/*c*), e noi vedremmo il sasso procedere con velocità sempre uguale in valore ma, ovviamente, continuamente diversa in direzione: e anche questo corrisponderebbe all'idea di accelerazione vettoriale.

6. Per i componenti cartesiani del vettore accelerazione vale un discorso analogo: il fatto, per esempio, che il componente $x$ dell'accelerazione ($\mathrm{d}\vec{v}_x / \mathrm{d}t$) sia diretto come il componente $x$ della velocità sta ad indicare che il valore della velocità in direzione $x$ è in aumento (il vettore $\vec{v}_x$ si sta allungando): la rapidità di variazione sarà tanto più grande quanto più grande è $\vec{a}_x$. Se invece $\vec{a}_x$ è controverso a $\vec{v}_x$, la velocità in direzione $x$ è in diminuzione (il vettore $\vec{v}_x$ si sta accorciando). Dunque, *il componente x dell'accelerazione indica se il componente x della velocità si sta allungando o accorciando, e con quale rapidità.* Tutto ciò vale ovviamente qualunque sia la direzione che qui è stata genericamente indicata con $x$.

7. **Accelerazione tangenziale** ($\vec{a}_{\mathrm{tg}}$) è il componente del vettore accelerazione nella direzione della tangente alla traiettoria: si ottiene cioè come proiezione ortogonale del vettore $\vec{a}$ sulla tangente. Possiamo in altre parole scrivere

[C] $$\vec{a}_{\mathrm{tg}} = \frac{(\mathrm{d}\vec{v})_{\mathrm{tg}}}{\mathrm{d}t}$$

dove a numeratore figura il componente tangenziale dell'incremento $\mathrm{d}\vec{v}$ (fig. 38) subìto nel tempuscolo d$t$ dal vettore velocità.

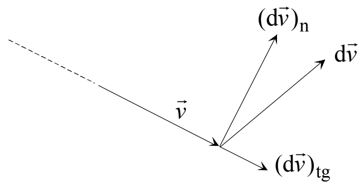


Fig. 38 - *Per effetto dell'incremento* $\mathrm{d}\vec{v}$ *il vettore velocità si allunga e ruota in senso antiorario.*

8. L'accelerazione tangenziale potrà, a seconda dei casi, essere diretta come il vettore $\vec{v}$ (sempre tangente alla traiettoria) oppure in senso opposto: nel primo caso il modulo di $\vec{v}$ è, all'istante considerato, in aumento, nel secondo caso il modulo di $\vec{v}$ è in diminuzione. Dunque: quando il modulo di $\vec{v}$ è in aumento (il che accade – lo si verifichi – quando velocità scalare e accelerazione scalare hanno lo stesso segno), l'accelerazione tangenziale è diretta come il vettore $\vec{v}$. Quando invece il modulo di $\vec{v}$ è in diminuzione, l'accelerazione tangenziale è controversa al vettore $\vec{v}$.

[21] Il valore dell'accelerazione di gravità a livello del mare varia da un minimo di 9,780 m/s$^2$ all'equatore a un massimo di 9,832 ai poli.

È chiaro insomma che possiamo scrivere

[D] $$\vec{a}_{\text{tg}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_{\text{tg}}.$$

9. *L'accelerazione tangenziale misura la rapidità con cui il vettore velocità viene modificato per effetto della forza tangenziale, la rapidità quindi con cui a un dato istante sta variando il modulo del vettore velocità*: il suo valore – sempre positivo, trattandosi del modulo di un vettore – è il valore assoluto dell'accelerazione scalare (pendenza del diagramma $v,t$), la quale rappresenta la componente del vettore $\vec{a}$ nella direzione della tangente (orientata come la traiettoria)

10. **Accelerazione trasversale** (o normale, o radiale, o centripeta, simbolo $\vec{a}_{\text{n}}$ o $\vec{a}_{\text{tr}}$) è il componente del vettore accelerazione sulla *normale principale* alla traiettoria, che è la retta $n$ perpendicolare alla tangente e passante dal 'centro di curvatura' (vedere avanti al punto 13). Possiamo scrivere

[E] $$\vec{a}_{\text{n}} = \frac{(\mathrm{d}\vec{v})_{\text{n}}}{\mathrm{d}t}$$

dove a numeratore figura il componente trasversale (cioè perpendicolare a $\vec{v}$) dell'incremento $\mathrm{d}\vec{v}$ subìto in d$t$ dal vettore $\vec{v}$. Essendo l'accelerazione trasversale diretta come l'incremento infinitesimo trasversale $(\mathrm{d}\vec{v})_n$, è chiaro che è *sempre diretta verso l'interno della curva*, o in altre parole verso la concavità. In fig. 38, per esempio, il vettore velocità sta ruotando in senso antiorario e quindi la traiettoria risulta incurvata verso l'alto.

*L'accelerazione trasversale misura la rapidità con la quale il vettore velocità risulta incrementato – perpendicolarmente alla velocità stessa e quindi senza variazione del modulo – per effetto di un cambio di direzione.*

11. Si dimostra[22] che il modulo dell'accelerazione trasversale è $v^2/r$, dove $v$ è il modulo del vettore velocità ed $r$ è il «raggio di curvatura» della traiettoria (vedere al successivo punto 12). Se quindi $\vec{u}_{\text{n}}$ è un versore diretto perpendicolarmente alla traiettoria verso il centro di curvatura, possiamo scrivere

[F] $$\vec{a}_{\text{n}} = \frac{v^2}{r}\vec{u}_{\text{n}}.$$

L'accelerazione trasversale è dunque zero *sia quando la velocità è zero* (si pensi a un pendolo nelle due posizioni estreme), *sia quando il raggio di curvatura della traiettoria è infinitamente grande* (il che significa semplicemente che, nella posizione occupata dal punto mobile, la traiettoria ha andamento rettilineo). A parità di raggio di curvatura, l'accelerazione trasversale cresce in proporzione al quadrato della velocità. A parità invece di velocità, l'accelerazione trasversale è inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

---

[22] Cfr. punto 10.2 a pag. 19.

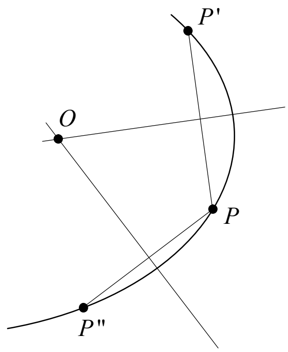

Fig. 39

12. Se la traiettoria ha, in corrispondenza di un suo punto *P*, andamento circolare, il raggio della circonferenza è senz'altro il raggio di curvatura della traiettoria in *P*. Ma supponiamo che la traiettoria non abbia, in corrispondenza di *P*, andamento circolare. Si consideri in tal caso (fig. 39) un arco di traiettoria, di estremi *P*' e *P*", contenente *P*. Si considerino poi i segmenti *P*'*P* e *PP*", e i relativi assi: se *P*, *P*' e *P*" non sono allineati, i due assi convergeranno nel centro *O* di una circonferenza passante per i tre punti. In generale l'arco di circonferenza tra *P*' e *P*" non avrà molto in comune con l'arco di traiettoria, ma se *P*' e *P*" si avvicinano a *P*, da un certo momento in poi diventa sempre più difficile distinguere l'arco di traiettoria e l'arco di circonferenza. Definiremo dunque **centro di curvatura** della traiettoria in *P* il punto *O* in cui, quando tende a zero la lunghezza dell'arco di traiettoria tra *P*' e *P*", tendono a convergere i due assi in questione: **raggio di curvatura** della traiettoria in *O* è la lunghezza del segmento *OP* (la distanza del punto mobile dal centro di curvatura). Se volessimo riprodurre con la massima fedeltà possibile, a mezzo di un compasso, un piccolo arco di traiettoria attorno a *P*, dovremmo puntare il compasso in un punto ben preciso (il centro di curvatura) e dargli un'apertura ben precisa (il raggio di curvatura). Il centro di curvatura si identifica insomma col centro di quel cerchio (**cerchio osculatore**) che meglio approssima la traiettoria in *P*.

## ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

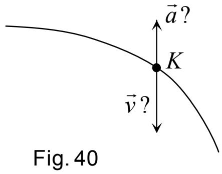

Fig. 40

51 La fig. 40 mostra la traiettoria percorsa da un punto *K*. È possibile che i due vettori abbiano il significato suggerito in figura?

52 È impossibile che, nel moto di un punto, il vettore velocità e il vettore accelerazione si mantengano costantemente perpendicolari l'uno all'altro (*vero*/*falso*).

53 Il punto *P* percorre una circonferenza lunga 16 m alla velocità costante di 8 m/s. Si determini: (*a*) il valore dell'accelerazione scalare media in un secondo, (*b*) il valore dell'accelerazione vettoriale media in un secondo.

54 Condizione necessaria e sufficiente perché il valore dell'accelerazione vettoriale sia zero, è che sia zero il valore dell'accelerazione scalare (*vero*/*falso*).

55 Dire che l'accelerazione scalare è positiva equivale a dire che il vettore accelerazione tangenziale è diretto come il vettore velocità (*vero*/*falso*).

56 (*a*) Il modulo del vettore $\vec{a}_y$ (componente $y$ del vettore $\vec{a}$) è dato dal valore assoluto della pendenza del grafico che fornisce la componente $y$ della velocità in funzione del tempo (*vero*/*falso*).
(*b*) Il componente trasversale del vettore accelerazione misura la rapidità con cui è in variazione la componente del vettore velocità nella direzione della normale alla traiettoria (*vero*/*falso*).
(*c*) Il componente tangenziale del vettore accelerazione misura la rapidità con cui è in variazione la componente del vettore velocità nella direzione della tangente alla traiettoria (*vero*/*falso*).

57 La traiettoria di un punto che si muove di moto uniforme può avere una forma qualsiasi (*vero*/*falso*).

58 Si chiarisca se è possibile che nell'intervallo di tempo tra $t'$ e $t''$ (diagramma orario di fig. 41/A) si verifichi per il punto $P$ la situazione rappresentata in fig. 42/B.

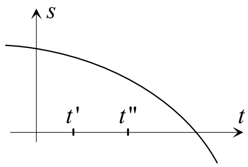

Fig. 41/A

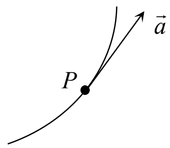

Fig. 41/B

59 Si chiarisca se è possibile che all'istante $t'$ (fig. 42/A) si verifichi per il punto $P$ la situazione mostrata in fig. 42/B.

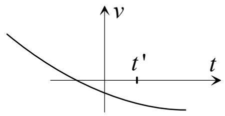

Fig. 42/A

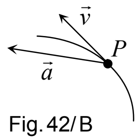

Fig. 42/B

60 Si chiarisca se è possibile che nell'intervallo di tempo tra $t'$ e $t''$ (fig. 43/A) si verifichi per il punto $P$ la situazione rappresentata in fig. 43/B.

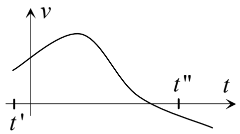

Fig. 43/A

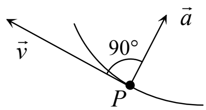

Fig. 43/B

61 Stabilire se all'istante $t_1$ (fig. 44) l'angolo tra velocità e accelerazione è acuto oppure ottuso. E all'istante $t_2$, al quale corrisponde un massimo nel valore della distanza $s$? E all'istante $t_3$?

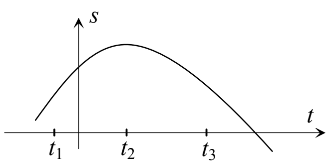

Fig. 44

62 Esiste un'accelerazione tangenziale (o trasversale) media?

63 Esiste un'accelerazione tangenziale (o trasversale) negativa?

64 È possibile che il componente trasversale dell'accelerazione abbia direzione costante lungo la traiettoria?

65 In corrispondenza dell'istante $t'$ (fig. 45) il grafico presenta un punto di flesso. Che cosa si può dire circa l'angolo che il vettore velocità forma col vettore accelerazione in tale istante?

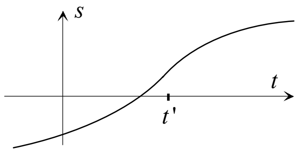

Fig. 45

66 Dato che l'accelerazione $\vec{g}$ di gravità ha modulo 9,8 $m/s^2$, l'accelerazione scalare di un punto materiale soggetto solo al proprio peso può valere solo ± 9,8 $m/s^2$ (*vero/falso*).

67 Un punto si muove con equazione oraria $s = 3 - 3\,t^2$ (unità CGS).
(*a*) Si chiarisca se due secondi prima dell'istante zero l'angolo tra i vettori velocità e accelerazione è acuto, oppure retto, oppure ottuso.
(*b*) Si determini il modulo del vettore accelerazione in tale istante, assumendo che il raggio di curvatura sia $r = 18\,\text{cm}$.

## SOLUZIONI

51 No. Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria. Il vettore accelerazione è sempre rivolto verso l'interno della curva (essendo l'accelerazione trasversale sempre diretta verso il centro di curvatura).

52 Falso. In qualsiasi moto uniforme l'accelerazione tangenziale è zero: se la traiettoria è curvilinea, l'accelerazione è sempre perpendicolare alla velocità.

53 (*a*) Il valore della velocità è costante, l'accelerazione scalare è zero.
(*b*) In un secondo viene percorso mezzo giro: il vettore $\vec{v}\,''$ è uguale in modulo al vettore $\vec{v}\,'$, ma ha direzione opposta, per cui il vettore $\vec{v}\,'' - \vec{v}\,'$ è diretto come $\vec{v}\,''$, e ha modulo doppio: $16\,\text{m/s}$. Perciò, il valore dell'accelerazione vettoriale media è $16\,\text{m/s}^2$.

54 Falso: la condizione è necessaria (perché se non è zero l'accelerazione scalare non è zero l'accelerazione tangenziale, e quindi non può essere zero il vettore $\vec{a}$) ma non è sufficiente: potrebbe infatti essere diversa da zero l'accelerazione centripeta.

55 Falso: se l'accelerazione tangenziale è diretta come $\vec{v}$, la velocità (valore assoluto) è in aumento, mentre invece l'accelerazione scalare risulta positiva anche quando il punto mobile procede con velocità negativa e sta rallentando (pendenza positiva nel grafico $v, t$).

56 (*a*) Vero, dato che il modulo di $\vec{a}_y$ misura la rapidità di variazione del componente $y$ della velocità.
(*b*) Vero. Si osservi la fig. 46: la componente di $\vec{v}$ nella direzione della normale alla traiettoria in una data posizione *P* è ovviamente zero quando il punto mobile è in *P*, ma, se la traiettoria non ha in *P* andamento rettilineo, è *diversa* da zero sia prima che dopo tale posizione: se ad esempio supponiamo che la normale *n* sia orientata verso il centro di curvatura, la componente di $\vec{v}$ in tale direzione è negativa prima di *P*, positiva dopo *P*. Pertanto in *P*, dove vale zero, è in variazione.

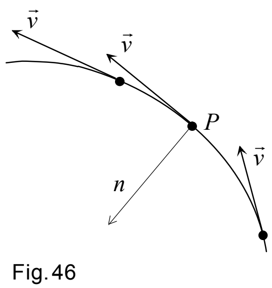

Fig. 46