5.5 Velocità e accelerazione nel moto di rototraslazione

1. A miglior chiarimento di quanto precede, consideriamo il moto di un cilindro di raggio R che ruota attorno al proprio asse geometrico mentre l'asse geometrico si sposta perpendicolarmente alla propria direzione. Consideriamo una sezione trasversale del cilindro, e consideriamo (fig. 11) lo spostamento rigido che porta dalla situazione *a*) alla situazione *b*): tale spostamento è stato ottenuto sommando alla traslazione $\overrightarrow{OO'}$, che porta O nella posizione finale O', una rotazione oraria di 140° attorno a O' (oppure attorno a O, se la rotazione precede la traslazione); ma è chiaro che, preso ad arbitrio un *qualsiasi* altro punto P (figura), la stessa posizione finale del cilindro si sarebbe potuta ottenere sommando la traslazione $\overrightarrow{PP'}$, che porta P nella posizione finale P' e porta O in O^*, con una rotazione oraria di 140° attorno a P' (o attorno a P, se si effettua prima la rotazione).

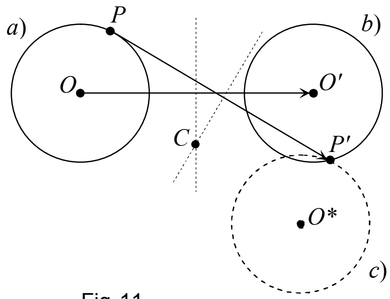

Fig. 11

Peraltro, essendo *piano* lo spostamento che porta dalla posizione *a*) alla posizione *b*), per quanto visto più sopra (punto 5 di pag. 143) il passaggio dalla *a*) alla *b*) si può anche ottenere mediante una semplice rotazione oraria di 140° attorno a una retta opportuna. Dato che O e O' devono risultare equidistanti da tale retta, e che lo stesso vale per P e P', è chiaro che l'asse di rotazione passa dal punto C in cui si intersecano l'asse del segmento OO' e l'asse del segmento PP'.

La velocità di un generico punto A della sezione del cilindro, distante d dal centro O (fig. 12), è chiaramente la somma vettoriale della velocità $\vec{v}_O$ di O con la velocità $\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}$ (di modulo ωd, perpendicolare al segmento OA) con cui, all'istante considerato, A sta ruotando attorno ad O. Ma la velocità di A è anche la somma vettoriale della velocità di un altro punto B qualsiasi, distante d' da A, con la velocità $\vec{\omega}\times\overrightarrow{BA}$ (di modulo $\omega d'$, perpendicolare al segmento BA) con cui A sta ruotando attorno a B. Risulta infatti

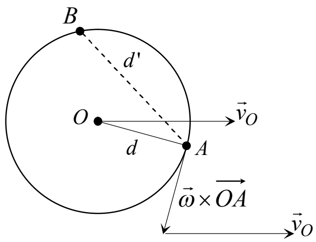

Fig. 12

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}$ e $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OB}$, da cui per sottrazione

$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega}\times(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, che significa $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA}$. Troviamo dunque che effettivamente, in un moto rigido, la velocità del componente traslatorio del moto può essere la velocità di un punto qualsiasi del sistema: e che, al variare del punto prescelto, cambia la velocità lineare nel moto di rotazione attorno a tale punto, sempre però con la stessa velocità angolare (valore e direzione).

2. Supponiamo ora che un cilindro rotoli senza strisciare (**moto di puro rotolamento**) lungo una superficie piana d'appoggio *S*. Allora, nella sezione rappresentata in fig.13, il punto *C* che si trova a contatto con *S* ha necessariamente velocità zero (in caso contrario si muoverebbe rispetto a *S* strisciando su di essa). La velocità di un generico punto *P* della sezione considerata è perciò esprimibile come somma della velocità di *C* (zero) più la velocità $\vec{\omega} \times \overrightarrow{CP}$ con cui *P* ruota attorno a *C*. In particolare, la velocità del centro *O* sarà $\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CO}$, il che significa che la condizione caratteristica di un moto di puro rotolamento è

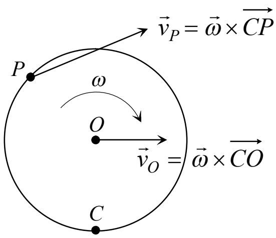

Fig. 13 – *Moto di puro rotolamento*

[A] $\quad v_O = \omega R.$

Dal punto di vista quindi delle velocità istantanee, e anche degli spostamenti che ne conseguono nel tempo, nel moto di puro rotolamento tutto va come se, istante per istante, il cilindro stesse ruotando con velocità angolare ω attorno alla retta di contatto (asse di istantanea rotazione).

3. Quello che si è detto per le velocità *non vale invece per le accelerazioni*. In ogni istante, i punti del cilindro hanno la velocità che avrebbero nel caso il cilindro stesse ruotando attorno a una retta fissa coincidente con quella che all'istante considerato è la retta di contatto, *ma subito prima no, e subito dopo neanche*: perciò l'accelerazione, che dipende da come varia la velocità, è diversa. Consideriamo ad esempio un cilindro che rotola senza strisciare con velocità angolare costante lungo

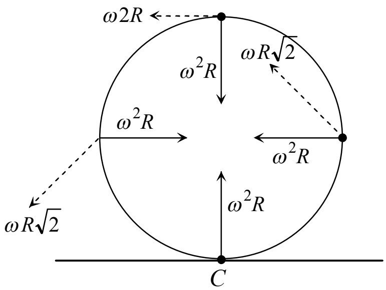

Fig. 14 – *Velocità (frecce a tratteggio) e accelerazione di alcuni punti di un cilindro che rotola senza strisciare con velocità angolare costante.*

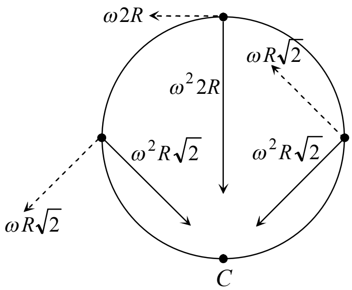

Fig. 15 – *Velocità e accelerazione degli stessi punti se il cilindro ruota con velocità angolare costante attorno a un asse fisso passante per C.*

un piano orizzontale. Come sappiamo dallo studio del moto relativo, ogni punto del cilindro ha esattamente la stessa accelerazione che avrebbe nel caso l'asse del cilindro fosse immobile (il cilindro infatti ruota attorno al proprio asse, che resta immobile, in un riferimento che rispetto al riferimento fisso si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme, perciò nei due riferimenti l'accelerazione di un punto è, nello stesso istante, la stessa): in particolare (fig. 14), i punti posti sulla superficie laterale del cilindro hanno accelerazione di modulo $\omega^2 R$ diretta verso l'asse del cilindro. Se invece, nella stessa posizione della fig.14, il cilindro stesse ruotando con la stessa velocità angolare costante attorno a una retta *fissa* passante per C (fig. 15), i punti del cilindro avrebbero esattamente la stessa velocità che hanno nel caso precedente, ma l'accelerazione avrebbe modulo e direzione diversa (in particolare, la velocità del punto C sarebbe permanentemente – e non solo momentaneamente – uguale a zero, e quindi l'accelerazione di C sarebbe zero).

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

8 Un cilindro rotola su una superficie d'appoggio a sua volta cilindrica (fig. 16). Si chiarisca se tale movimento può essere descritto come rototraslatorio.

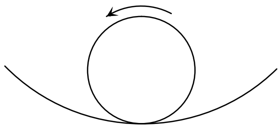

Fig. 16

9 Una grossa vite avanza con velocità costante nella relativa sede, girando su se stessa 3 volte al secondo. Il passo della vite (l'avanzamento in senso assiale ad ogni giro) è 2 mm. P e Q sono due punti della vite: il primo si trova sull'asse della vite, il secondo dista dall'asse 5 mm. Si determini:
(a) in quanto tempo la vite avanza di 15 mm
(b) la velocità di P
(c) la velocità di Q.

10 Un disco appoggia di taglio su un piano orizzontale, lungo il quale può ruotare senza scivolare. Se appoggiamo sul disco (fig. 17) una tavola di lunghezza L e la facciamo scorrere in senso orizzontale in modo che mantenga il contatto col disco senza mai scivolare, di quanto, al massimo, riusciamo a far avanzare la tavola? Dobbiamo aspettarci che la risposta dipenda dal raggio del disco?

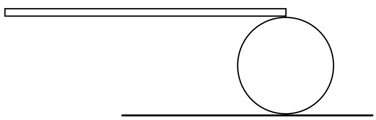

Fig. 17

11 Una tavola, appoggiata a una parete in condizioni di equilibrio precario (fig. 18), a un tratto comincia a scivolare. Si determini l'inclinazione φ della tavola nell'istante in cui il suo estremo inferiore B ha una velocità tre volte più grande di quella dell'estremo superiore A.

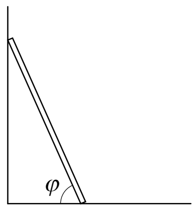

Fig. 18

12 La figura a lato (fig.19) mostra la sezione trasversale di un cilindro il cui asse geometrico sta traslando con velocità $\vec{v}_C$. Sapendo che la velocità del punto A è $\vec{v}_A = 1{,}5\ \vec{v}_C$, si determini la velocità del punto B.

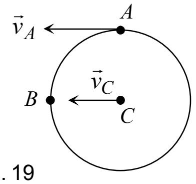

Fig. 19

13 Con riferimento alla figura a lato (fig. 20), che mostra un triangolo in due diverse posizioni su uno stesso piano, si individui la posizione dell'asse dello spostamento rotatorio che porta il triangolo da una posizione all'altra.

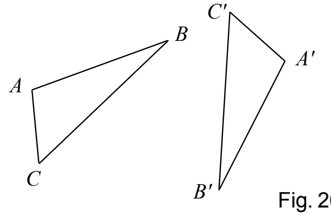

Fig. 20

14 (a) Si costruisca per punti una cicloide: la traiettoria cioè di un punto P posto sulla periferia di un disco che rotola senza strisciare lungo una linea retta.
(b) Si esprimano in funzione del tempo le coordinate cartesiane di P.
(c) Posto che il disco proceda con velocità costante, si trovi come variano la velocità e l'accelerazione di P lungo la cicloide.
(d) In base a quanto trovato per l'accelerazione, si dimostri che nel punto di contatto al suolo la cicloide ha tangente verticale.

15 Un disco omogeneo di raggio R (fig.21) rotola senza strisciare giù per un piano avente inclinazione φ sull'orizzontale, soggetto solo al peso e alla reazione del piano d'appoggio. Tenuto conto che l'accelerazione del centro del disco è $(2/3)g\,\mathrm{sen}\varphi$[4], si spieghi come si potrebbe determinare l'accelerazione del punto di contatto C e di un generico punto A.

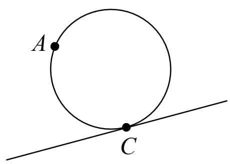

Fig 21

16 Un cono di vertice V e apertura φ (fig.22) rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale ruotando con velocità angolare ω attorno al proprio asse geometrico e con velocità angolare Ω attorno alla verticale y condotta per V. Si trovi in che rapporto stanno le due velocità angolari, e si determinino in funzione dei dati velocità e accelerazione del punto A del cono più lontano dalla superficie d'appoggio.

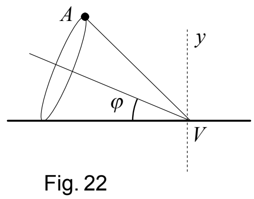

Fig. 22

[4] Si veda al riguardo la risp.33 a pag. 274.

SOLUZIONI

8 Sì, è un moto rototraslatorio, in quanto può essere ottenuto sovrapponendo un moto di rotazione attorno all'asse geometrico del cilindro con un moto di traslazione (curvilinea) di tale asse.

9 (*a*) È un moto elicoidale: la vite trasla nella direzione del proprio asse e ruota attorno al proprio asse. Precisamente, avanza di 2 mm ad ogni giro, e fa tre giri al secondo: avanza perciò con velocità 2×3 mm/s = 6 mm/s, e per avanzare di 15 mm impiega (15 mm)/(6 mm/s) = 2,5 s.
(*b*) Essendo il punto P sull'asse della vite, il suo è un moto rettilineo con velocità pari alla velocità di avanzamento della vite: 6 mm/s.
(*c*) Il moto di Q è invece la combinazione di un moto circolare uniforme attorno all'asse della vite (con velocità $v' = \omega R = 2\pi f R = 2\pi \times 3\,\text{s}^{-1} \times 5\text{ mm} = 94{,}2\text{ mm/s}$) e di un moto rettilineo uniforme nella direzione dell'asse della vite con velocità v'' = 6 mm/s. Essendo le due velocità ortogonali, la velocità risultante v si ottiene col teorema di Pitagora: $v = \sqrt{94{,}2^2 + 6^2}\text{ mm/s} = 94{,}4\text{ mm/s}$.

10 Dato che le velocità dei punti del disco sono quelle di un moto di rotazione attorno alla linea di contatto col terreno, i punti a contatto con la tavola, e quindi anche i punti della tavola, hanno velocità doppia rispetto all'asse del disco: in uno stesso intervallo di tempo la tavola subisce pertanto uno spostamento doppio rispetto al disco. Se la tavola si sposta verso destra in misura pari alla sua lunghezza L (fig. 23), il disco si sposta di $L/2$ e viene quindi a trovarsi al centro della tavola. Se la tavola si sposta ancora di L, il disco si sposta di $L/2$ e viene con ciò a trovarsi all'estremità di sinistra della tavola. Dunque, il massimo spostamento che può subire la tavola è il doppio della sua lunghezza, *indipendentemente* dal raggio del disco.

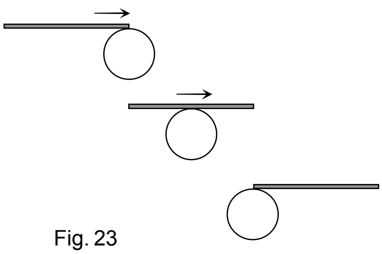
Fig. 23

11 Si tratta manifestamente di un moto piano. Le varie posizioni della tavola si ottengono sommando uno spostamento traslatorio uguale allo spostamento di uno dei suoi punti (per esempio A) con una opportuna rotazione attorno a tale punto. Schematizziamo la tavola come un semplice segmento: l'estremo superiore A di tale segmento (fig. 24) ha sempre velocità verticale, l'estremo inferiore B ha sempre velocità orizzontale: il moto del segmento è quindi in ogni istante una rotazione attorno al punto C (centro di istantanea rotazione) la cui proiezione ortogonale è A sulla parete e B sul pavimento. Man mano che la tavola scivola, il punto C – la cui distanza da O si mantiene evidentemente uguale alla lunghezza L della tavola – si sposta lungo un arco di circonferenza di centro O e di

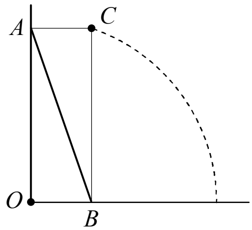

Fig. 24

raggio uguale a L. Si osservi che, prescindendo dalle limitazioni poste al moto dai vincoli, qualsiasi posizione della tavola potrebbe essere raggiunta da un'altra qualsiasi posizione mediante una semplice rotazione (il che è caratteristico del movimento piano): la posizione dell'asse di tale rotazione dipende dal particolare spostamento considerato. In fig.25, ad esempio, l'asse dello spostamento rotatorio che, in assenza di vincoli, potrebbe portare gli estremi della tavola da A ad A' e da B a B' passa dal punto K. Lo stesso spostamento potrebbe ovviamente realizzarsi, in infiniti modi diversi, come sovrapposizione di uno spostamento traslatorio con uno spostamento rotatorio: per esempio, il vettore traslazione potrebbe essere il vettore $\overrightarrow{AA'}$, e la rotazione potrebbe avvenire attorno a un asse passante dall'estremo superiore della tavola. Oppure il vettore traslazione potrebbe essere il vettore $\overrightarrow{BB'}$, e allora la rotazione (una *uguale* rotazione) dovrebbe avvenire attorno a un asse passante dall'estremo inferiore.

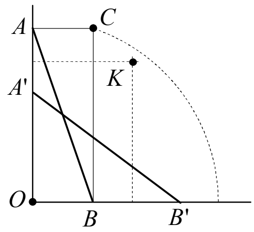

Fig. 25

La velocità di un generico punto della tavola distante d da C è $v = \omega d$, con ω via via più grande ma uguale, in uno stesso istante, per tutti i punti della tavola. Se quindi a un dato istante B ha velocità tre volte superiore a quella di A significa che in quell'istante il segmento BC è tre volte più lungo del segmento AC, e che pertanto è $\operatorname{tg}\varphi = 3$, vale a dire $\varphi = 71{,}6°$.

12 Come in qualsiasi moto rigido non traslatorio, la velocità dei punti del cilindro coincide con quella dovuta a un moto di rotazione attorno a un asse ben preciso, diverso da istante a istante: tenuto conto della direzione e del valore delle due velocità assegnate, è chiaro che l'asse di istantanea rotazione è parallelo all'asse geometrico del cilindro e si trova al di sotto di esso a distanza $2R$ da C e $3R$ da A: in fig. 26, l'asse di rotazione è individuato dal punto O. La velocità di B sarà perpendicolare al vettore $\overrightarrow{OB}$, e sarà più grande della velocità di C nel rapporto in cui il segmento OB è più lungo del segmento OC. Essendo $OC = 2R$ e $OB = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = R\sqrt{5}$, e cioè $OB = OC\sqrt{5}/2$, sarà $v_B = v_C\sqrt{5}/2$.

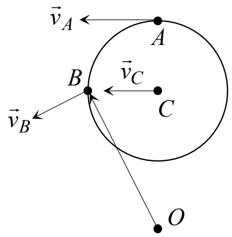

Fig. 26

Allo stesso risultato si poteva giungere scomponendo il moto del cilindro in un moto di traslazione in cui tutti i punti hanno velocità $\vec{v}_C$, e in un moto di rotazione antioraria con velocità angolare $\omega = (v_A - v_C)/R = 0{,}5\,v_C/R$ attorno all'asse geometrico, nel quale i punti che distano R dall'asse geometrico (come A e B) hanno velocità $v = 0{,}5\,v_C$. Naturalmente, la scomposizione in un moto di traslazione e in un moto di rotazione poteva avvenire in infiniti altri modi diversi: si poteva ad