6.6 Reazioni vincolari

1. Il più delle volte, il corpo K di cui studiamo l'equilibrio – o il movimento – non è libero, ma *vincolato*: esistono cioè altri corpi («vincoli») che si trovano a contatto di K e pongono limitazioni alle sue possibilità di movimento. Per un blocchetto che scivola lungo un piano inclinato, il vincolo è il piano inclinato, che impedisce al blocchetto di attraversarlo. Per una porta, il vincolo è rappresentato dai cardini, per effetto dei quali la porta può solo ruotare attorno all'asse dei cardini oppure traslare in direzione verticale. Per una pallina che oscilla sospesa a un filo fissato superiormente il vincolo è il filo, per effetto del quale la distanza della pallina dall'estremo fisso del filo non può essere superiore alla lunghezza del filo. E così via.

Le forze provenienti dai vincoli si chiamano **reazioni vincolari**. Quando occorre distinguerle dalle reazioni vincolari, le altre forze vengono denominate *forze attive*.

2. Dai vincoli provengono *solo le forze strettamente necessarie* a limitare la mobilità del corpo vincolato. Se, ad esempio, un libro che pesa 400 g viene appoggiato su un piano orizzontale, dal piano proviene una forza diretta verticalmente verso l'alto di valore 400 g, che è quanto occorre per impedire al libro di cadere: non una forza di 500 g, che non sarebbe compatibile con l'equilibrio del libro, né una forza verticale di 400 g più due forze orizzontali poste sulla stessa retta d'azione, uguali in modulo e opposte in direzione, compatibili con l'equilibrio del libro ma *non necessarie* a garantirlo. Se però il piano viene inclinato, dal piano proviene, oltre che una forza ortogonale ad esso, anche una forza parallela, che contrasta il moto di scivolamento del libro.

Altro esempio: se i due estremi di una catena vengono fissati a due ganci posti alla stessa altezza, da tali vincoli provengono sia forze verticali (di valore complessivo pari al peso della catena) che forze orizzontali (che impediscono ai due estremi della catena di spostarsi l'uno verso l'altro, come avverrebbe, a causa del peso della catena, se i ganci potessero scorrere orizzontalmente). Ma se gli anelli contigui della catena venissero saldati gli uni agli altri, nel qual caso la catena perderebbe la sua deformabilità, dai vincoli proverrebbero solo le due forze verticali, non essendo quelle orizzontali più necessarie a salvare l'equilibrio.

6.7 Baricentro

1. Dato un sistema di punti materiali 1, 2, 3..... aventi rispettivamente peso P_1, P_2, P_3... e aventi rispettivamente, rispetto all'origine O di un riferimento cartesiano, posizione $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 ...$, si chiama **baricentro** (o *centro di gravità*) del sistema il punto G avente posizione

$$\text{[A]} \qquad \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2 + \vec{r}_3 P_3 + ...}{P_1 + P_2 + P_3 + ...} = \sum_i \vec{r}_i \frac{P_i}{P}$$

dove P indica il peso complessivo del sistema. La posizione del baricentro è quindi, come si dice, la media «pesata» delle posizioni dei punti del sistema. È chiaro che le coordinate cartesiane del baricentro sono a loro volta la media pesata delle corrispondenti coordinate dei punti del sistema[6].

2. La definizione di baricentro può essere ovviamente estesa a una distribuzione continua di punti (e quindi a un qualsiasi corpo) effettuando sulle posizioni di ogni porzione infinitesima del sistema una media pesata sui rispettivi pesi $\mathrm{d}P = \gamma\,\mathrm{d}V = \rho g\,\mathrm{d}V$ (γ è il **peso specifico**, cioè il peso per unità di volume, ρ la **densità**, cioè la massa per unità di volume, $\mathrm{d}V$ è un volume infinitesimo la cui posizione è definita da $\vec{r}$). Al posto della [A] scriveremo quindi

[B] $$\vec{r}_G = \frac{\int_V \vec{r}\,\gamma\,\mathrm{d}V}{P}$$

dove l'integrale deve essere esteso a tutto il volume V del corpo considerato. Per sistemi omogenei (densità uguale in ogni punto) in un campo gravitazionale uniforme (g uguale in ogni punto) la [B] diventa chiaramente

[C] $$\vec{r}_G = \frac{\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V}{V}.$$

Si noti che, per le [A] e [B], la posizione del baricentro rispetto agli altri punti del sistema *resta esattamente la stessa* comunque il sistema in questione venga ruotato rispetto al terreno. Immaginiamo infatti che il sistema considerato e la terna cartesiana di riferimento siano rigidamente collegati e subiscano insieme una certa rotazione rispetto al terreno: l'espressione [A], che definisce la posizione del baricentro rispetto ai punti del sistema, resterebbe uguale.

3. È immediato verificare (si veda al successivo punto 4) che, *rispetto al baricentro, la somma dei momenti dei pesi è zero*: il che, per un corpo rigido, corrisponde a dire che *le forze gravitazionali non hanno alcuna possibilità di produrre o contrastare effetti di rotazione attorno ad assi passanti dal baricentro*. Tutto va, da questo punto di vista, come se il peso di un corpo fosse non la somma dei pesi di ogni sua porzione infinitesima, ma un'unica forza passante dal baricentro, o addirittura applicata al baricentro[7]: cosicché il baricentro di un corpo può anche essere definito come il punto dal quale passa necessariamente la forza che, da sola, è in grado di fare equilibrio all'intero sistema delle forze peso (potrebbe cioè insieme ad esse realizzare le condizioni necessarie all'equilibrio: somma delle forze uguale a zero e somma dei momenti uguale a zero)[8].

---

[6] In modo del tutto analogo – considerando le masse dei punti anziché i pesi – verrà definito il *centro di massa*. Baricentro e centro di massa coincidono quando per tutti i punti del sistema è uguale l'accelerazione di gravità: ad esempio, per tutti gli oggetti della nostra esperienza quotidiana.

[7] L'arbitrarietà di quest'ultima assunzione è particolarmente evidente quando il baricentro di un corpo si trova *al di fuori* del corpo.

[8] Si veda eventualmente il capitolo 29 («Il baricentro e la gallina») in G. Tonzig, *100 errori di Fisica* (Maggioli).

4. Se indichiamo con $\vec{r}_i$ la posizione del punto i (i = 1, 2, 3...) del sistema e con $\vec{r}_{(G)}$ la posizione del baricentro, la posizione del punto considerato rispetto al baricentro sarà $\vec{r}_{i(G)} = \vec{r}_i - \vec{r}_G$. Indicato allora con $\vec{u}_y$ un versore diretto verticalmente verso il basso, il momento complessivo dei pesi rispetto al baricentro è $\sum_i \left(\vec{r}_{i(G)} \times \vec{P}_i\right) =$ $= \sum_i \left((\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times \vec{P}_i\right) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{P}_i) - \sum_i (\vec{r}_G \times \vec{P}_i) = \sum_i \vec{r}_i P_i \times \vec{u}_y - \vec{r}_G P \times \vec{u}_y = 0$ (per la [A] è infatti $\vec{r}_G\, P = \sum_i \vec{r}_i\, P_i$).

5. Supponiamo che un corpo qualsiasi venga sospeso (fig. 3) per un suo punto A. Se il corpo è in equilibrio, ed è soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo (che è necessariamente verticale come il peso ed è applicata in A), la verticale condotta per A è la retta d'azione della forza che neutralizza il peso e passa quindi sicuramente per il baricentro. Se il corpo sospeso è una lastra rigida, ciò può consentire di trovare la posizione del baricentro: il baricentro è infatti l'intersezione di tutte le rette che si ottengono facendo variare il punto di sospensione e calando ogni volta la verticale per il punto di sospensione.

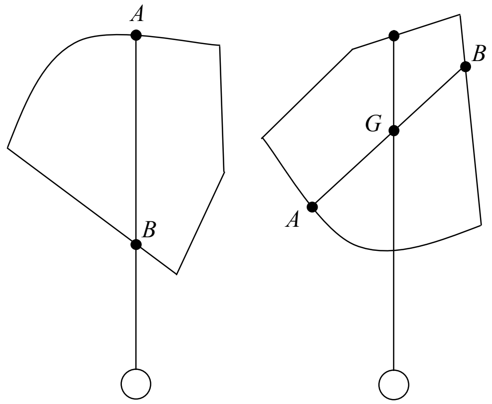

Fig. 3

6. Corpo rigido appoggiato su un piano orizzontale: quando le sole forze agenti sono il peso e la reazione del vincolo, la condizione per l'equilibrio è che la verticale condotta per il baricentro cada all'interno – o tutt'al più al limite – dell'area di appoggio: intendendosi per *area di appoggio* (fig. 4) la più piccola tra le figure convesse[9] contenenti tutti i punti di contatto. Le forze provenienti dal piano di sostegno (tutte verticali verso l'alto) sono infatti riducibili a un'unica forza la cui retta d'azione interseca il piano di sostegno all'interno, o tutt'al più al limite, dell'area di appoggio (cfr. esercizio n.6, pag. 168).

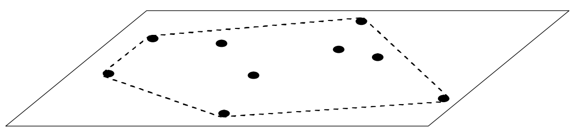
Fig. 4 – *Punti di contatto e area di appoggio.*

9 Una figura piana si dice *convessa* se non è attraversata da nessuna delle rette ad essa tangenti.

7. **Proprietà distributiva del baricentro**: *il baricentro di un sistema di corpi coincide col baricentro del sistema di punti materiali che si ottiene sostituendo ad ogni corpo un punto avente il peso di quel corpo e posizionato nel relativo baricentro*.
La ricerca del baricentro può essere a volte resa particolarmente semplice dall'applicazione di tale proprietà (si vedano gli esercizi n.22 e 23 a pag. 170).

6.8 Le tre forme dell'equilibrio

1. L'equilibrio di un corpo K si dice **indifferente** se le posizioni prossime a quella di equilibrio (in cui K si trova) sono anch'esse per K posizioni di equilibrio; si dice **stabile** se nelle posizioni prossime a quella di equilibrio le forze applicate a K non soddisfano più alle condizioni di equilibrio e tendono a riportare K nella posizione di equilibrio; si dice **instabile** se nelle posizioni prossime a quelle di equilibrio le forze applicate a K non soddisfano alle condizioni di equilibrio e tendono ad allontanare ulteriormente K dalla posizione di equilibrio.
La fig. 5 mostra tre palline tutte in equilibrio: la A in equilibrio stabile, la B in equilibrio instabile, la C in equilibrio indifferente. È ben chiaro che se una momentanea perturbazione porta le tre palline leggermente al di fuori della posizione di equilibrio, al passare della perturbazione la pallina A ritorna nella posizione originaria, la B la abbandona definitivamente, la C resta là dove la perturbazione l'ha portata.

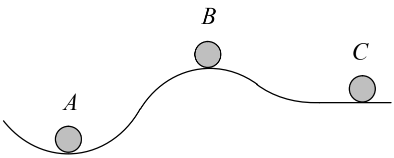

Fig. 5

2. Si osservi che l'equilibrio di un corpo potrebbe risultare stabile rispetto a certi spostamenti e nello stesso tempo instabile o indifferente rispetto ad altri. Per una pallina in equilibrio all'interno di un cilindro cavo orizzontale (fig. 6) l'equilibrio è indifferente rispetto a spostamenti assiali e stabile rispetto a spostamenti trasversali. Se la pallina si trovasse in equilibrio sulla superficie esterna del cilindro, l'equilibrio sarebbe ancora indifferente rispetto a spostamenti assiali ma instabile rispetto a spostamenti trasversali.[10]

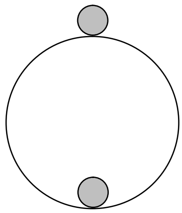

Fig. 6 – *Sopra: equilibrio instabile e indifferente. Sotto: equilibrio stabile e indifferente.*

→ *Sulla stabilità dell'equilibrio si veda anche il paragrafo 9.9 («Energia potenziale ed equilibrio») a pag. 284.*

[10] Si veda eventualmente il capitolo 13 («Equilibrio stabile, anzi precario») in G. Tonzig, *100 errori di Fisica* (Maggioli).

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Il blocco rigido rappresentato in fig. 7 è in equilibrio sotto l'azione di un certo numero di forze, tra cui la $\vec{F}'$ e la $\vec{F}''$, che hanno uguale valore. Si chiarisca se il blocco resterebbe in equilibrio qualora, a parità di ogni altra circostanza, la $\vec{F}'$ e la $\vec{F}''$ venissero rispettivamente applicate nel vertice 1 e nel vertice 2.

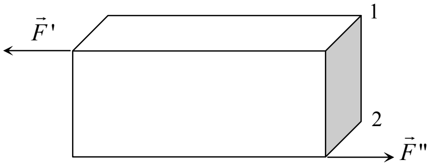

Fig. 7

2 Il triangolo rigido ABC è in equilibrio: una delle forze agenti è indicata in fig. 8. Senza pregiudizio dell'equilibrio, si trasli tale forza nel punto B, applicando una «coppia di trasporto» costituita da forze orizzontali applicate in A e B.

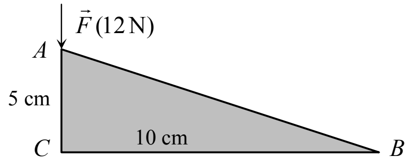

Fig. 8

3 È impossibile che un corpo rigido sul quale agiscono solo quattro forze di valore 3, 8, 9, 22 N risulti in equilibrio (*vero*/*falso*).

4 Determinare il valore della forza $\vec{F}$ e della reazione $\vec{R}$ (fig. 9) sapendo che il sistema (asta rigida di peso trascurabile) è in equilibrio, che la forza $\vec{F}'$ ha modulo 5 kg, che la forza $\vec{F}''$ ha modulo 1,5 kg.

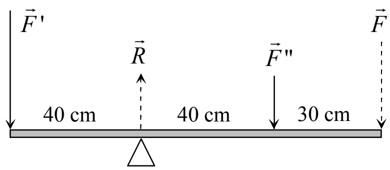

Fig. 9

5 Si chiarisca in che modo due forze parallele applicate a un corpo rigido possono essere sostituite da un'unica forza.

6 Che cosa si può dire, sulla base della risposta al precedente quesito, circa la retta d'azione della forza equivalente a un sistema di forze parallele, equiverse, non complanari?

7 Il triangolo rigido ABC è in equilibrio sotto l'azione di tre forze, due delle quali sono rappresentate in fig. 10. Si chiarisca se è possibile che la terza forza sia applicata nel punto medio dell'ipotenusa AC.

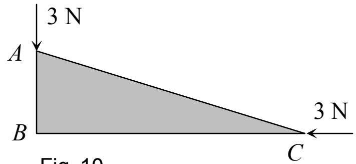

Fig. 10

8 Tre forze che soddisfano alle condizioni di equilibrio del corpo rigido sono sicuramente complanari. Lo si dimostri.

9 Si mostri che per l'asta rigida mostrata in fig. 11, di peso trascurabile e in equilibrio su tre appoggi, il problema della individuazio-

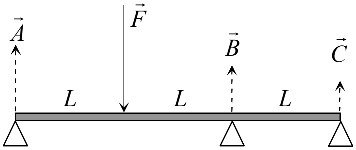

Fig. 11

ne delle reazioni vincolari $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ è indeterminato.

10 Due punti materiali, A e B, pesano uno il triplo dell'altro: determinare la posizione del baricentro del sistema.

11 In quale eventualità il baricentro del sistema di tre punti materiali A, B, C non allineati è il baricentro geometrico del triangolo ABC (il punto cioè di incontro delle mediane)?

12 Il baricentro del sistema costituito da tre punti materiali è sicuramente più vicino al punto più pesante dei tre (*vero*/*falso*).

13 Il baricentro di un triangolo omogeneo coincide col baricentro geometrico (*vero*/*falso*).

14 Si utilizzi la proprietà distributiva del baricentro per determinare con metodo grafico la posizione del baricentro di un generico quadrilatero omogeneo.

15 I blocchi A e B, di massa identica, devono essere separati con l'aiuto di una leva, come mostrato in fig. 12. Se la forza $\vec{F}$ applicata alla leva viene fatta crescere lentamente, quale dei due blocchi si sposterà per primo? Si assuma che la forza d'attrito tra ciascuno dei blocchi e il piano d'appoggio sia la stessa.

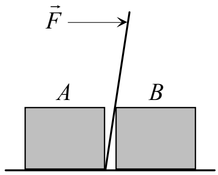

Fig. 12

16 Dove si trova il baricentro del corpo umano? Posto in questi termini, il problema è fondamentalmente indeterminato: per quale ragione?

17 (*a*) Per quale ragione, nel salto in alto, è più agevole superare l'asticella col corpo in posizione orizzontale piuttosto che col corpo in posizione eretta?

(*b*) Si legge a volte che il vantaggio delle attuali tecniche di salto in alto (tipo *Fosbury*) consiste nel fatto che «il baricentro dell'atleta può passare al di sotto dell'asticella». È accettabile tale affermazione dal punto di vista della Fisica?

18 Un corpo rigido è sospeso per un punto P attorno al quale può ruotare senza attrito: le forze agenti sono il peso e la reazione del vincolo. Si chiarisca in quale posizione si trova il baricentro rispetto a P in caso di equilibrio stabile, di equilibrio instabile, di equilibrio indifferente.

19 Due semisfere di uguale diametro, una di ottone, l'altra di sughero, sono fissate l'una all'altra in modo da formare una sfera. Supponiamo che la sfera venga appoggiata a un piano orizzontale: in tal caso,

(*a*) se il piano di separazione tra le due semisfere è orizzontale, l'equilibrio può risultare, a seconda dei casi, stabile e insieme indifferente, oppure instabile e insieme indifferente (*vero*/*falso*);

(*b*) se il piano di separazione tra le due semisfere è verticale, la situazione è di equilibrio instabile (*vero*/*falso*).

20 Il triangolo rigido ABC è in equilibrio sotto l'azione delle due forze di valore noto mostrate in fig. 13 e di una terza forza non rappresentata. Si chiarisca se è possibile determinare il valore, la direzione, la retta d'azione e il punto d'applicazione della terza forza. E se invece la forza verticale fosse diretta verso il basso?

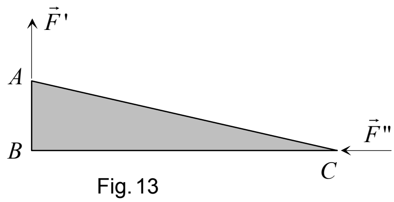

Fig. 13

21 Si chiarisca se è possibile che il segmento rigido AB (fig. 14) sia in equilibrio sotto l'azione di quattro forze: quelle rappresentate in figura più una quarta forza.

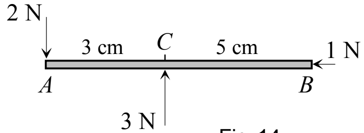

Fig. 14

22 Si trovi la posizione del baricentro delle due lastre omogenee mostrate in fig. 15. La prima delle due è stata ottenuta effettuando un taglio lungo le diagonali di un quadrato di lato 36 cm. La seconda è stata ottenuta ritagliando da un disco di raggio R un disco di raggio $R/2$.

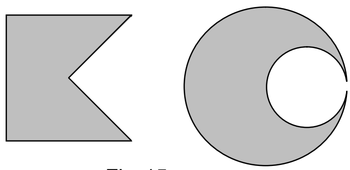
Fig. 15

23 Alcuni mattoni identici, di lunghezza $L =$ $= 24$ cm (fig. 16), sono posti uno sull'altro in modo che ognuno sporga nel senso della lunghezza dal sottostante. Come occorre disporli, se si vuole rendere massimo lo spostamento del mattone più in alto rispetto al mattone più in basso? Aumentando convenientemente il numero dei mattoni, è possibile ottenere che la proiezione sul piano d'appoggio del mattone più in alto sia *totalmente* al di fuori dell'area di appoggio?

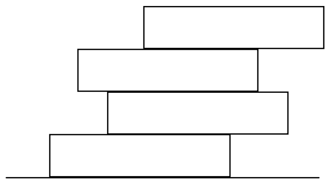
Fig. 16

24 In un cilindro omogeneo di altezza h è stato praticato un foro parallelo all'asse del cilindro, a distanza d dall'asse. Se il cilindro viene sospeso a un filo che passa nel foro, quale sarà la configurazione di equilibrio del sistema?

25 Una fune d'acciaio di peso P è sospesa a due punti fissi posti alla stessa altezza. Fatta l'ipotesi che la fune sia perfettamente flessibile, si determinino:
(a) le reazioni vincolari ai due estremi della fune,
(b) la tensione della fune nel punto centrale.
Si chiarisca inoltre:
(c) se è possibile, aumentando convenientemente la forza con cui la fune è tirata ai due estremi, fare in modo che la fune si disponga lungo una retta orizzontale;
(d) a quale delle due estremità la fune sarebbe maggiormente sollecitata se i due punti di sospensione non si trovassero allo stesso livello.

26 Un'asta rigida di lunghezza L e peso P è in equilibrio, appoggiata come in fig. 17 su due piani ortogonali a e b. Fatta l'ipotesi che gli attriti siano trascurabili,

(a) si descrivano attraverso il valore dell'angolo β le posizioni di equilibrio assunte dall'asta al variare dell'angolo α;

(b) si trovi quale valore assumono le reazioni vincolari in caso di equilibrio.

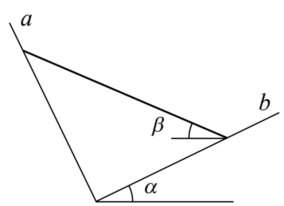

Fig. 17

SOLUZIONI

1 Sì: una coppia di forze verrebbe sostituita da una coppia di uguale momento, e quindi del tutto equivalente agli effetti dell'equilibrio di un corpo rigido (cfr. punto 2a a pag. 162)

2 La coppia di trasporto deve avere momento di $120\,\mathrm{N \cdot cm}$ diretto verso il lettore, perciò è costituita da forze orizzontali di valore 24 N. Quella diretta verso sinistra è applicata in A.

3 Vero: la forza risultante non può essere zero: il valore della quarta forza è più grande della somma dei valori delle altre forze.

4 Imponendo che sia zero la somma dei momenti rispetto al punto d'appoggio si ottiene $F = 2\,\mathrm{kg}$. Imponendo poi che la somma delle forze sia zero si ottiene $R = 8{,}5\,\mathrm{kg}$.

5 Siano $\vec{F}'$ ed $\vec{F}''$ le due forze in questione. La forza $\vec{F}$ equivalente deve essere uguale alla somma delle due, ed avere lo stesso momento rispetto a un punto qualsiasi: ad esempio, rispetto al punto d'applicazione di $\vec{F}$. Ciò conduce alle conclusioni seguenti:

(a) se le due forze sono parallele ed equiverse (fig. 18), la retta d'azione della forza equivalente è complanare con le altre due ed è *interna* alla striscia delimitata dalle altre due: precisamente, la sua distanza dalle rette d'azione delle due forze date è inversamente proporzionale ai rispettivi valori (in fig. 18, $F'd' = F''d''$);

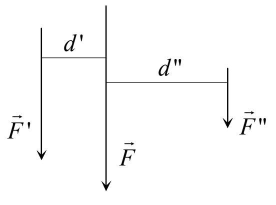

Fig. 18

(b) se le due forze sono parallele e controverse (fig. 19), la retta d'azione della forza equivalente è complanare con le altre due ed è *esterna* alla striscia delimitata dalle altre due: la sua distanza dalle rette d'azione delle due forze date è inversamente proporzionale ai rispettivi valori (in figura, $F'd' = F''d''$).

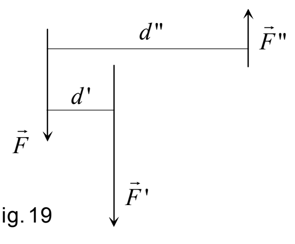

Fig. 19