B). Quando il signor Rossi si sposta verso A, la tavola si sposta in direzione opposta in modo che il CM del sistema resti immobile (come richiesto dal fatto che, per l'assenza di attrito, nessuna forza esterna agisce sul sistema in direzione orizzontale). Alla fine, quando il signor Rossi si trova in A, il CM è 120 cm alla sua destra: il signor Rossi si è quindi complessivamente spostato di 240 cm.

29 La situazione si presenta come mostrato in fig. 29. Non è quindi possibile che le due particelle costituiscano un sistema isolato: in tale eventualità le due forze agirebbero (terzo principio di Newton) lungo una retta passante per i due punti, il che non è compatibile con la direzione dei vettori accelerazione.

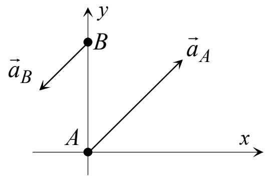

Fig. 29

30 Prima che il piano d'appoggio venga rimosso, la molla esercita sia sul disco superiore che sul disco inferiore una forza m_1g (la molla non pesa, il suo equilibrio richiede quindi che riceva dai due dischi forze di uguale valore). All'istante in cui il sistema viene rimosso la molla ha ancora la sua lunghezza originaria, e quindi esercita ancora sui dischi una forza m_1g. La forza risultante su m_1 è dunque ancora zero: $a_1 = 0$. La forza agente su m_2 è invece $m_1g + m_2g$, per cui risulta $a_2 = (m_2g + m_1g)/m_2 = (1 + m_1/m_2)g$.

Controllo: dato che l'unica forza esterna è il peso, l'accelerazione del CM del sistema deve risultare uguale a g. In effetti, in base ai valori di accelerazione ottenuti risulta $a_{CM} = (a_1m_1 + a_2m_2)/(m_2+m_1) = 0 + g = g$.

8.7 La forza centripeta

1. Nella dinamica del punto, **forza centripeta** è la forza che determina l'accelerazione centripeta, e corrisponde al prodotto della massa (del punto materiale su cui la forza agisce) per l'accelerazione centripeta: il suo valore è quindi mv^2/r, oppure $m\omega^2r$, o ancora $m\omega v$. La direzione della forza centripeta è ovviamente quella dell'accelerazione centripeta: perpendicolare alla velocità verso il centro di curvatura.

Si noti attentamente: la forza centripeta *non è*, in generale almeno, una delle forze applicate: è invece *il componente trasversale della forza risultante*, vale a dire è ciò che si ottiene proiettando sulla retta perpendicolare alla velocità la forza risultante.

Ovviamente, la forza centripeta corrisponde anche alla *somma dei componenti trasversali delle forze applicate*.

2. Nel caso invece di un sistema di punti (per esempio, nel caso di un corpo), la forza centripeta è data dalla massa complessiva del sistema per l'accelerazione trasversale del centro di massa, e corrisponde al componente della forza risultante nella direzione della normale alla velocità del centro di massa.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

31 Un corpo K scivola in assenza di aria e di attrito lungo un piano inclinato. Siamo autorizzati ad affermare che la forza del piano su K è uguale e contraria al componente P_n del peso di K sulla perpendicolare al piano?
(a) sì, per la terza legge di Newton (b) sì, per una diversa ragione (c) no.

32 Un punto materiale K che viaggia in direzione orizzontale verso Est è soggetto a una forza $\vec{F}_1$ di valore 12 N diretta orizzontalmente verso Ovest, a una forza $\vec{F}_2$ di valore 20 N diretta verticalmente verso l'alto, a una forza $\vec{F}_3$ di valore 8 N diretta verticalmente verso il basso, a una forza $\vec{F}_4$ di valore 9 N diretta orizzontalmente verso Sud. Sapendo che non agiscono altre forze, si calcoli il valore della forza centripeta.

33 Un sasso è stato lanciato in direzione obliqua nel vuoto. In quale punto della traiettoria è massima l'accelerazione centripeta?

34 Il punto materiale K è vincolato a muoversi in un piano verticale lungo una linea curva L: agiscono solo il peso e la reazione $\vec{V}$ del vincolo, perpendicolare alla velocità di K per l'assenza di attrito. Considerando sia il caso di concavità verso l'alto che il caso di concavità verso il basso, si chiarisca in quale dei due sensi possibili è diretta la reazione del vincolo.

35 Con riferimento al quesito precedente: per una data posizione di K, in corrispondenza della quale la traiettoria volge la concavità verso il basso, il componente trasversale del peso ha valore 200 N, mentre la reazione del vincolo ha valore 1000 N. Determinare il valore della forza centripeta.
(a) 200 N (b) 800 N (c) zero (d) 1200 N (e) problema indeterminato.

36 Mediante un unico filo inestensibile di massa trascurabile, due sferette (fig. 30) sono tenute in rotazione con velocità angolare costante in un piano orizzontale intorno a un punto O. La sferetta A, di massa 250 g, percorre con accelerazione 9,81 m/s^2 una circonferenza di raggio 120 cm. La sferetta B, di massa 60 g, percorre invece una circonferenza di raggio 80 cm. Determinare la tensione nei due tratti del filo.

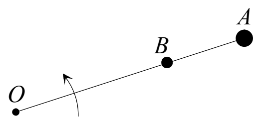

Fig. 30

37 Una pallina, appesa a un filo di lunghezza L fissato superiormente a un punto P, viene spostata dalla posizione di equilibrio O e poi lanciata in direzione orizzontale in modo tale da realizzare un *pendolo conico*: la pallina si muove cioè di moto uniforme in un piano orizzontale lungo una circonferenza, il filo si sposta lungo la superficie di un cono ad asse verticale avente come vertice il punto di sospensione P.
(a) Si determini in funzione di φ, angolo formato dal filo con la verticale, la velocità con cui è stata lanciata la pallina.
(b) Si verifichi entro quali limiti può variare la velocità angolare, e conseguentemente il periodo di rotazione.
(c) Quanti giri al minuto deve fare, come minimo, un pendolo conico lungo 1 m?

SOLUZIONI

31 Sì, ma la terza legge di Newton non c'entra: in base ad essa possiamo solo dire che la forza del corpo K sul piano e la forza del piano su K sono uguali in valore e opposte in direzione, oppure che sono uguali in valore e opposte in direzione la forza attrattiva della Terra su K (il peso di K) e la forza attrattiva di K sulla Terra. La forza del piano su K è invece uguale al componente trasversale del peso di K per il fatto che *il centro di massa di K si muove di moto rettilineo*: il che richiede che la forza risultante su K abbia componente zero perpendicolarmente alla velocità del centro di massa.

32 La forza centripeta è il componente trasversale (perpendicolare cioè alla velocità) della forza risultante: ovvero, la somma dei componenti trasversali delle forze applicate. La $\vec{F}_1$ è parallela alla velocità, quindi non influisce sul valore della forza centripeta. La $\vec{F}_2$ e la $\vec{F}_4$ hanno come risultante una forza diretta verticalmente verso l'alto di valore 12 N. Tale forza, sommata con la $\vec{F}_4$, dà la forza centripeta, la quale quindi ha modulo $\sqrt{9^2 + 12^2}$ N = 15 N.

33 Dove è massima la forza centripeta: quindi al vertice della parabola, dove il peso, la sola forza applicata, è perpendicolare alla velocità.

34 *Concavità verso l'alto*. La forza centripeta $\vec{V} + \vec{P}_n$ (reazione del vincolo più componente trasversale del peso) è diretta verso il centro di curvatura, quindi verso l'alto. Essendo $\vec{P}_n$ diretto verso il basso, necessariamente $\vec{V}$ è diretta verso l'alto.

Concavità verso il basso. La forza centripeta è diretta verso il basso, come il peso: la reazione del vincolo sarà diretta verso l'alto o verso il basso a seconda del valore della forza centripeta, e quindi a seconda della velocità di K. Per velocità zero, la forza centripeta è zero e quindi la somma delle due forze trasversali è zero: $V =$ $= P\cos\varphi$ (dove φ è la pendenza della tangente alla traiettoria). Per velocità piccole, la forza centripeta è piccola e quindi V è un po' inferiore a P. Man mano che aumenta la velocità, aumenta la forza centripeta e quindi V diventa sempre più piccola. Se la velocità arriva a quel valore per cui la forza centripeta è uguale a $P\cos\varphi$, deve essere $V = 0$. Se la velocità aumenta ulteriormente, occorre che $\vec{V}$ sia diretta verso il basso.

35 1200 N. Avendo infatti valore superiore a quello del componente trasversale del peso, la reazione del vincolo è certamente diretta verso il basso (in caso contrario, il componente trasversale della forza risultante risulterebbe diretto verso l'esterno della curva).

36 Per definizione di kilogrammo-forza, quando l'accelerazione vale 9,81 m/s^2 il numero che misura la massa in kg (o in g) è (circa) uguale a quello che misura la forza in kg (o in g). Sulla sferetta A agisce dunque per effetto del filo una forza centripeta di 250 g, il che significa che il filo è tirato in senso centrifugo da una forza di 250 g. Avendo il filo massa zero, la somma delle forze sul filo deve essere zero,

quindi il filo è tirato in senso centripeto dalla sferetta B con una forza di 250 g. L'accelerazione $\omega^2 r$ della sferetta B è 2/3 di 9,81 m/s^2 (il raggio della circonferenza percorsa da B è infatti uguale ai 2/3 del raggio della circonferenza percorsa da A, mentre è identica la velocità angolare). Perciò la forza complessiva su B è (2/3) 60 g = 40 g, con direzione ovviamente verso il centro O. Tenuto conto che su B agisce una forza centrifuga di 250 g, ne deriva che la sferetta B è tirata verso O da una forza di 290 g. La tensione del filo è quindi 290 g nel tratto OB, 250 g nel tratto BA.

37 (a) La forza centripeta $\vec{F}_{cp}$ è data qui dal componente orizzontale della reazione del vincolo (fig. 31): $V \,\mathrm{sen}\varphi = mv^2/R$, con $R = L\,\mathrm{sen}\varphi$. Da cui, $v = \sqrt{\dfrac{VL\,\mathrm{sen}^2\varphi}{m}}$. Rispetto alla direzione verticale la velocità della pallina si mantiene uguale a zero: niente accelerazione, quindi la somma dei componenti verticali delle forze è zero: $V\cos\varphi = mg$. Sostituendo nella relazione precedente otteniamo

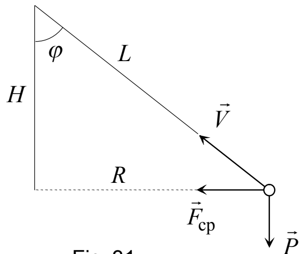

Fig. 31

$v = \sqrt{gL\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{tg}\varphi}$. Essendo poi $\omega = v/R = v/(L\,\mathrm{sen}\varphi)$, risulta

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\varphi}} = \sqrt{\dfrac{g}{H}}$, avendo indicato con H l'altezza del cono: la velocità angolare e il periodo sono uguali per tutti i pendoli conici aventi la stessa altezza, il periodo è uguale a quello delle piccole oscillazioni di un normale pendolo semplice di lunghezza H.

(b) Dato che H deve essere inferiore a L (altrimenti l'apertura del cono è zero) il valore di ω deve essere superiore a $\sqrt{g/L}$, e il valore del periodo T è inferiore a $2\pi\sqrt{L/g}$ (periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice di lunghezza L). Si noti che, quando l'apertura φ del cono tende a zero, il valore della velocità angolare tende a $\sqrt{g/L}$, ma la velocità lineare tende a zero, dato che tende a zero il raggio della circonferenza percorsa dalla pallina.

(c) La velocità angolare deve essere superiore (vedi punto precedente) alla pulsazione delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice di uguale lunghezza: $\omega > \sqrt{g/L} = \omega_{\min}$. La frequenza minima è quindi $f_{\min} = [\omega_{\min}/(2\pi)]$ giri/s. Posto $g = 9{,}81$ m/s^2 e $L = 1$ m, si ottiene che la frequenza minima è

$f_{\min} = 0{,}498$ giri/s $= 29{,}9$ giri/min.

8.8 La forza elastica

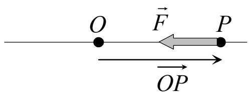

Fig. 32

1. È una forza che tende a spostare il punto P a cui è applicata (fig.32) verso una posizione fissa O, e ha modulo proporzionale alla distanza di P da O. La forza è cioè controversa allo spostamento $\overrightarrow{OP}$ e risulta ad esso proporzionale:

[A] $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OP}$

dove k è una costante positiva.

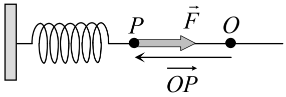

Fig. 33

2. Elastica è, ad esempio, la forza proveniente – in condizioni statiche[11] – da una buona molla elicoidale d'acciaio (fig.33). La costante di proporzionalità tra forza esercitata dalla molla e deformazione (allungamento o accorciamento) subita dalla molla rappresenta la **costante elastica** (o *rigidezza*) della molla: più grande è k, più 'rigida' è la molla, più grande cioè è la forza che la molla esercita per uno stesso valore costante della deformazione, ovvero anche la forza che occorre applicare alla molla per mantenerla deformata[12].

3. *Se un punto P si muove di moto rettilineo sotto l'azione di una forza elastica, il moto del punto è oscillatorio armonico*. Se infatti m è la massa di P, e $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OP}$ è la forza ad esso applicata, l'accelerazione di P è

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m}\overrightarrow{OP}$$

controversa allo spostamento da O e ad esso proporzionale, il che (vedi punto 5, pag. 117) è caratteristico del moto armonico. *Forza elastica e moto armonico sono quindi legati come causa ed effetto.*

In termini scalari, detta x la distanza dalla posizione di equilibrio sarà

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\,.$$

Si osservi che il coefficiente k/m rappresenta il quadrato della pulsazione ω, per cui il periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ e la frequenza $f = 1/T$ di-

---

[11] Oppure anche in condizioni dinamiche, *purché la massa della molla si possa trascurare*. In caso contrario, la forza applicata alla molla è la somma di due forze: quella che, in condizioni statiche, produce la deformazione più quella che accelera il centro di massa. Anche la forza esercitata *dalla* molla risulterebbe dunque diversa.

[12] La forza proveniente da un elastico non è un buon esempio di forza elastica perché, a differenza della molla, l'elastico può solo *tirare* verso una data posizione, non *spingere* in direzione opposta.

pendono dalla massa del punto oscillante e dalla costante elastica, ma *non* dall'ampiezza di oscillazione[13].

→ *Sull'argomento forza elastica si veda anche il punto 7 a pag.237.*

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

38 La fig. 34 rappresenta un blocco di peso P che rimane in equilibrio sotto l'azione del peso, della forza proveniente da una molla e della reazione del piano d'appoggio, perpendicolare al piano stesso per la mancanza di attrito. Sapendo che la molla ha lunghezza di riposo L_0 e rigidezza k, determinarne la lunghezza nelle circostanze qui considerate.

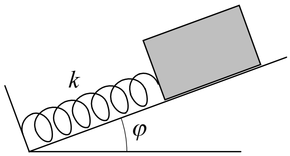

Fig. 34

39 Un blocchetto K, di massa 200 g, oscilla in assenza d'attrito lungo un segmento orizzontale di centro O sotto l'azione di una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k = 1{,}25\ \mathrm{N/cm}$. Determinare quanto tempo occorre come minimo perché la molla passi dalla condizione di massima compressione a quella di massima estensione.

40 Si dimostri che N molle «in parallelo» equivalgono a un'unica molla avente come costante elastica la somma delle N costanti elastiche, e che N molle «in serie» equivalgono a un'unica molla avente come costante elastica il reciproco della somma dei reciproci delle N costanti elastiche.

41 Due dischetti, appoggiati di piatto su un piano orizzontale, sono collegati da una molla di costante k, di massa trascurabile e di lunghezza a riposo zero. Si chiarisca quali condizioni devono essere verificate all'istante iniziale, in assenza di qualsiasi forma di attrito, affinché in seguito il centro di massa resti immobile e la distanza L tra i due dischetti resti costante.

---

[13] Un moto armonico può verificarsi *anche lungo un percorso non rettilineo*, per esempio lungo un arco di circonferenza: la distanza (che il punto mobile deve percorrere per giungere nel centro dell'oscillazione), la velocità scalare e l'accelerazione scalare sono anche in questo caso funzioni sinusoidali del tempo. L'accelerazione vettoriale ha un componente tangenziale e un componente trasversale: il primo è sempre diretto nel senso che porta verso il centro dell'oscillazione, con modulo uguale al valore assoluto dell'accelerazione scalare, il secondo è diretto verso il centro di curvatura e ha modulo v^2/R. *Quando la forza applicata a un punto mobile P ha un componente tangenziale che tende sempre a riportare P verso uno stesso punto O della traiettoria, e ha modulo proporzionale alla lunghezza dell'arco di traiettoria posto tra P e O, P oscilla attorno a O di moto armonico.*

42 Si vuole che un blocco di massa M, appoggiato come in fig. 35 su un piatto di massa m sostenuto da una molla di massa trascurabile e di rigidezza k, oscilli verticalmente senza mai staccarsi dal piatto. Quale valore massimo può assumere l'ampiezza di oscillazione?

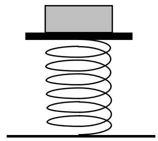
Fig. 35

43 Un blocco di massa m può oscillare senza attrito su un piano orizzontale sotto l'azione di due molle, come in fig. 36. La distanza tra le due pareti fisse è L, il blocco ha massa m e larghezza d, le molle hanno rigidezza k_1 e k_2 e lunghezza a riposo L_1 ed L_2. Si determini:
(a) la posizione di equilibrio del blocco,
(b) la frequenza di oscillazione.

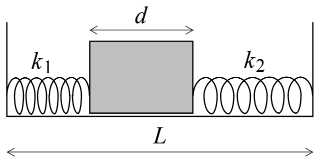

Fig. 36

44 Un cilindro di altezza H (fig. 37) galleggia in equilibrio su acqua: l'altezza della parte immersa è L. Descrivere il moto che il cilindro compirebbe se subisse uno spostamento verticale $\vec{y}_0$ dalla posizione di equilibrio, e venisse poi lasciato andare. Si assuma che la spinta verticale $\vec{F}$ esercitata sul cilindro dal fluido circostante sia in ogni caso pari alla spinta idrostatica, e si considerino trascurabili tutte le altre forze in confronto a $\vec{F}$ e al peso.

Fig. 37

SOLUZIONI

38 Dalla molla, che ha subìto l'accorciamento x, proviene una forza kx che neutralizza il componente $P\,\text{sen}\varphi$ del peso parallelo al piano d'appoggio. Dunque la lunghezza della molla è $L_0 - x = L_0 - (P\,\text{sen}\varphi)/k$.

39 In quanto soggetto a una forza risultante elastica, il punto P oscilla di moto armonico. La pulsazione è $\omega = \sqrt{k/m}$, con k = 1,25 N/cm = 125 N/m e m = 0,2 kg, il periodo è $T = 2\pi/\omega$. Il tempo occorrente perché P si sposti da un estremo all'altro è pertanto $T/2 = \pi/\omega = \pi\sqrt{m/k} = \pi\sqrt{0{,}2/125}$ s $= 0{,}126$ s.

40 *Collegamento in parallelo* (fig.38): tutte le molle subiscono la stessa deformazione, la forza F complessivamente applicata è la somma delle forze che deformano le N molle: $F = F_1 + F_2 + \ldots = k_1 x + k_2 x + \ldots = (k_1 + k_2 + \ldots)x$. La stessa forza produrrebbe la stessa deformazione su una molla di costante $k = k_1 + k_2 + \ldots$ In particolare, N molle

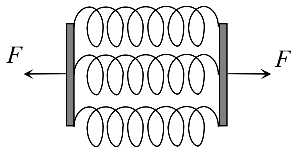

Fig. 38

uguali in parallelo equivalgono a un'unica molla N volte più rigida di ogni singola molla (a parità di forza applicata, la deformazione è N volte più piccola).

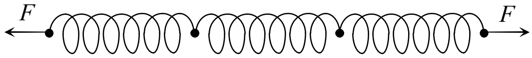

Fig. 39

Collegamento in serie (fig. 39): la forza agli estremi di ciascuna molla è uguale, in condizioni di equilibrio, alla forza F applicata agli estremi della serie, la deformazione complessiva x è la somma delle N deformazioni: $x = x_1 + x_2 + ... = F/k_1 + F/k_2 = F\,(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ...)$. La stessa forza produrrebbe la stessa deformazione su un'unica molla di costante $k = F/x = 1/(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ...)$, una molla quindi la cui costante elastica ha come reciproco $1/k$ la somma dei reciproci delle costanti elastiche delle diverse molle. In particolare, N molle uguali in serie equivalgono a un'unica molla N volte meno rigida di ogni singola molla (a parità di forza applicata, la deformazione è N volte più grande).

41 Il centro di massa resta immobile se inizialmente ha velocità zero: in assenza infatti di forze orizzontali esterne, la sua velocità sul piano d'appoggio non potrà subire variazioni.
Siano A e B i due dischetti (fig. 40). Se la distanza L tra essi resta costante, resta necessariamente costante anche la distanza di ogni dischetto dal centro di massa. Essendo allora il CM immobile, i due dischetti descrivono con moto uniforme (la forza è sempre perpendicolare alla velocità) circonferenze centrate nel CM. In ogni istante, le due velocità sono dirette in senso opposto, come richiesto dal fatto che la velocità del CM (media delle due velocità pesata sulle masse) è zero. La forza elastica kL corrisponde, per entrambi i dischetti, alla forza centripeta: $kL = m_A\omega^2 L_A$, $kL = m_B\omega^2 L_B$. Sommando allora membro a membro le relazioni $kL/m_A = \omega^2 L_A$ e $kL/m_B = \omega^2 L_B$ si ottiene $kL/(1/m_A + 1/m_B) = \omega^2(L_A + L_B) = \omega^2 L$. Dunque, la condizione perché la distanza L resti costante è che i due dischetti siano inizialmente in rotazione con velocità angolare $\omega = \sqrt{\dfrac{k\,(m_A + m_B)}{m_A m_B}}$.

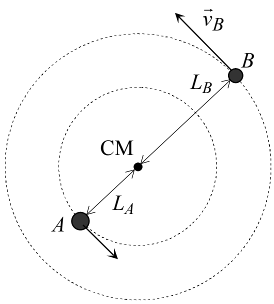

Fig. 40

Il problema poteva anche essere risolto utilizzando il concetto di **massa ridotta**. L'accelerazione $\vec{a}_B - \vec{a}_A$ di B rispetto ad A (o, per meglio dire, rispetto a un riferimento che nei riferimenti inerziali trasla con la velocità di A) ha modulo $a_{B(A)} =$