9.2 Forze posizionali e forze conservative

1. Si chiamano **posizionali** le forze che dipendono, nel loro valore e nella loro direzione, esclusivamente dalla posizione del punto *K* su cui agiscono: non dal tempo, non dalla velocità di *K*, non da altre circostanze[4]. Il lavoro compiuto da una forza posizionale quando il punto *K* di applicazione si sposta lungo una determinata traiettoria da *A* a *B* è chiaramente uguale e contrario al lavoro che la forza compie quando, lungo la stessa traiettoria, *K* si sposta da *B* ad *A*: in ogni punto del percorso risulta infatti invertita la direzione del vettore velocità, e quindi rispetto a prima risulta uguale e contrario il valore della componente tangenziale della forza.

2. Tra le forze posizionali hanno straordinario interesse le **forze conservative**, dette così per il fatto che, come vedremo, il loro lavoro «conserva» − lascia inalterato – il valore complessivo dell'energia del corpo su cui agiscono: *sono conservative le forze il cui lavoro dipende dallo spostamento* (subìto dal punto *K* su cui agiscono) *ma non dalla traiettoria* (seguita da *K* tra la posizione iniziale e quella finale). In altre parole, il lavoro di una forza conservativa è univocamente determinato se sono assegnate la posizione iniziale e la posizione finale del punto di applicazione. Se, in particolare, il punto di applicazione descrive un percorso chiuso (posizione finale coincidente con la posizione iniziale) lo spostamento è zero e il lavoro delle forze conservative è a sua volta zero. Condizione necessaria ma non sufficiente perché una forza sia conservativa è che sia posizionale: *le forze conservative sono sempre posizionali, le forze posizionali possono (a meno che non dipendano da un'unica coordinata) non essere conservative*.

3. Sono conservative tutte le *forze fondamentali* della natura:
(*a*) l'interazione gravitazionale (attrazione dipendente dalla massa dei corpi),
(*b*) l'interazione elettrostatica (attrazione - repulsione tra cariche elettriche),
(*c*) l'interazione forte (interazione tra protoni e neutroni nel nucleo di un atomo, e tra i *quark* costitutivi di un protone o di un neutrone),
(*d*) l'interazione debole (responsabile tra l'altro della radioattività β[5], è l'unica forza «universale», l'unica cioè che agisce tra *qualsiasi* coppia di particelle).

4. Qualsiasi forza costante in valore e direzione è conservativa (per definizione, il suo lavoro è $L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$, indipendente dalla traiettoria tra P_1 e P_2). È conservativa anche qualsiasi **forza centrale** (qualsiasi forza, cioè, la cui retta d'azione passa sempre, al variare della posizione del punto *P* su cui agisce, per uno stesso punto fisso *O*) purché il suo valore dipenda solo dalla distanza di *P* da *O*. Un esempio di forza con tali caratteristiche è la forza attrattiva esercitata dal Sole su un pianeta.

---

4 Ad esempio, le forze d'attrito su un corpo *A* che striscia su un corpo *B* non sono posizionali perché hanno sempre direzione contraria a quella della velocità di *A* rispetto a *B*, e quindi dipendono dalla direzione di tale velocità. Non sono posizionali neanche le forze magnetiche, perché dipendono anch'esse dalla velocità della particella su cui agiscono: sono infatti sempre perpendicolari alla velocità e sono direttamente proporzionali al suo valore.

5 Emissione di elettroni da parte di nuclei atomici.

5. Il lavoro di una forza non conservativa su un percorso chiuso può risultare, a seconda delle circostanze, positivo, negativo, o nullo. Se ad esempio facciamo strisciare un corpo K sul pavimento fino a riportarlo alla posizione iniziale, il lavoro delle forze d'attrito applicate a K è in ogni istante negativo (la forza è controversa alla velocità), perciò il lavoro sull'intero percorso chiuso sarà negativo, con un valore assoluto tanto più grande, a parità di ogni altra circostanza, quanto più lungo è il percorso effettuato. Se invece il piatto di un forno a microonde entra in rotazione trascinando rigidamente con sé, per effetto dell'attrito, un oggetto K appoggiato su di esso, fino a che la velocità di rotazione cresce il lavoro che la forza d'attrito applicata a K compie su un giro completo è positivo[6]. In fase di rallentamento il lavoro su un giro completo sarebbe negativo.

6. Si ricordi dall'Analisi matematica che una generica funzione vettoriale $\vec{k} = \vec{k}(x, y, z)$ è conservativa se (condizione necessaria e sufficiente) per $\vec{k}$ è verificata la 'condizione di Schwarz', se cioè sono uguali le derivate parziali 'in croce' delle sue componenti cartesiane ($\partial k_x/\partial y = \partial k_y/\partial x$, ecc.)[7]. In tal caso $\vec{k}$ è 'gradiente' di una funzione scalare $\varphi = \varphi(x, y, z)$, il che significa che:

- $k_x = \partial\varphi / \partial x$, cioè la componente di $\vec{k}$ in una generica direzione x è data dalla derivata parziale di φ rispetto a x;
- la direzione di $\vec{k}$ è quella in cui si verifica il più rapido incremento di φ;
- il modulo di $\vec{k}$ misura la rapidità con cui φ varia in tale direzione.
- per uno spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\vec{s}$ risulta $\mathrm{d}\varphi = \vec{k} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

9.3 Unità di misura per il lavoro

L'unità internazionale è il **joule** (simbolo J), che corrisponde al lavoro compiuto da una forza avente valore costante 1 N quando lo spostamento del punto d'applicazione nella direzione della forza è 1 m.

In termodinamica si usa spesso come unità di lavoro il **litroatmosfera** ($\ell \cdot$atm), corrispondente a poco più di 100 J (1 $\ell \cdot$atm = 101,3 J).

In fisica delle particelle è spesso comodo utilizzare un'unità di lavoro denominata **elettronvolt** (eV). Risulta 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J.

In elettrotecnica è largamente usato come unità di lavoro il **wattora** (simbolo Wh), e ancora di più l'unità mille volte più grande (kilowattora, kWh). Il wattora è il lavoro compiuto in 1 h, quando ad ogni secondo viene compiuto il lavoro di 1 J. Pertanto, 1 Wh = $3{,}6 \times 10^3$ J, e 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.

L'unità del Sistema CGS era l'**erg** (simbolo erg), corrispondente al lavoro compiuto da una forza di valore costante 1 dyn quando lo spostamento nella direzione della forza è 1cm. Risulta 1 J = 1 N × 1 m = 10^5 dyn × 10^2 cm = 10^7 erg.

---

[6] Lo si comprende subito se si considera che rispetto alla traiettoria di K la forza d'attrito ha un componente trasversale che rappresenta la forza centripeta e non compie lavoro, e un componente tangenziale *equiverso* alla velocità di K (il cui valore in effetti aumenta).

[7] Ovvero: se il *rotore* di $\vec{k}$ è identicamente nullo.

L'unità del sistema pratico era il **kilogrammetro** (simbolo kgf·m, o anche kgm), corrispondente al lavoro compiuto da una forza di valore 1 kg quando lo spostamento nella direzione della forza è 1 m. Risulta dunque
$1\ \mathrm{kgf} \times 1\ \mathrm{m} \approx 9{,}81\ \mathrm{N} \times 1\ \mathrm{m} = 9{,}81\ \mathrm{J}$.

9.4 Potenza

1. È la grandezza che misura la rapidità di esecuzione del lavoro. Se nell'intervallo di tempo finito Δt viene eseguito il lavoro L, il rapporto $L/\Delta t$ indica quanto lavoro è stato mediamente compiuto nell'unità di tempo, ovverossia la **potenza media**. Se invece si considera un intervallo di tempo infinitesimo dt, il rapporto dL/dt, in cui dL è il lavoro infinitesimo eseguito in dt, è la **potenza istantanea**, la rapidità cioè con la quale all'istante considerato viene eseguito lavoro. Essendo $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ lo spostamento durante dt quando la velocità è $\vec{v}$, risulta

[A] $$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,.$$

Vale a dire: il prodotto scalare tra forza e velocità (del punto su cui la forza agisce) corrisponde alla potenza istantanea, esprime quindi la rapidità con cui la forza in questione sta compiendo lavoro. Se la forza $\vec{F}$ è applicata a un corpo rigido che ruota con velocità angolare di modulo ω attorno a un asse z rispetto al quale il momento di $\vec{F}$ ha modulo τ, risulta analogamente $P = \pm\,\tau\omega$.

2. L'unità internazionale di potenza è il **watt** (simbolo W), che corrisponde al lavoro di 1 J in 1 s. Nella tecnica sono molto usati i multipli *kilowatt* (1 kW = 10^3 W) e *megawatt* (1 MW = 10^6 W). Resta tuttora in uso in ambito tecnico anche la vecchia unità *cavallo vapore*, che corrisponde a circa 3/4 di kilowatt (1 CV = 0,735 kW). Il numero che misura una data potenza in kW è conseguentemente circa i 3/4 del numero che misura la stessa potenza in CV.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Un punto P è in movimento nel piano cartesiano xy sotto l'azione di alcune forze tra cui la forza $\vec{F} = (5\ \mathrm{N})\vec{u}_x + (2\ \mathrm{N})\vec{u}_y + (11\ \mathrm{N})\vec{u}_z$. Si determini il lavoro compiuto da tale forza quando il punto mobile si sposta dalla posizione A (x = 15 cm, y = 0, z = 3 cm) alla posizione B (x = 0, y = 15 cm, z = 3 cm).

2 Una ipotetica forza avente direzione sempre uguale a quella della velocità del punto su cui agisce non sarebbe conservativa (*vero*/*falso*).

3 Si trovi per quale valore del parametro k la forza $\vec{F} = 5y\vec{u}_x - (kx - y^2)\vec{u}_y$ è conservativa.

4 Una pallina P di massa 40 g procede con velocità costante 150 cm/s in un piano verticale lungo una circonferenza di centro O. Si determini con quale rapidità il peso della pallina compie lavoro: (a) nell'istante in cui il vettore $\overrightarrow{OP}$ è diretto verti-

calmente verso l'alto, (*b*) quando il vettore $\overrightarrow{OP}$ è ruotato di 30°, (*c*) quando il vettore $\overrightarrow{OP}$ è ruotato di altri 60°.

5 La forza $\vec{F} = y^2\vec{u}_x + 5x\vec{u}_y$ (unità SI) agisce su una particella K mobile nel piano cartesiano xy.
(*a*) Si chiarisca se tale forza è conservativa.
(*b*) Considerati (fig. 8) i punti A (0;3), B (6;3) e C (6;0), si calcoli il lavoro compiuto dalla forza in questione quando K si sposta da O a B lungo il percorso OAB, il percorso OCB, il percorso OB.

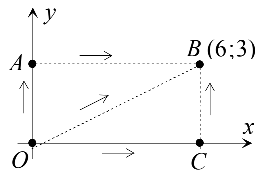

Fig. 8

6 (*a*) Si calcoli il lavoro che viene compiuto dalla forza $\vec{F} = (5y + x^2)\,\vec{u}_x - 9x\vec{u}_y$ (unità SI) quando la particella su cui agisce si sposta nel piano cartesiano xy (fig. 9) dal punto A (0;3) al punto B (3;0) lungo una traiettoria di equazione $y = 3 - x$ (linea 1 in figura).
(*b*) Come sopra, considerando però un percorso di equazione $y = 3 - x^2/3$ (linea 2 in figura).

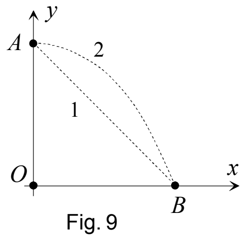

Fig. 9

7 Una molla ideale di costante k e di estremi A e B viene sottoposta ad allungamento. Si chiarisca se, sapendo che l'allungamento complessivo della molla è Δ e che lo spostamento dell'estremo B è controverso a quello di A e tre volte più grande, è possibile determinare
(*a*) il lavoro complessivamente compiuto dalle forze esterne sulla molla,
(*b*) il lavoro da esse compiuto a ciascuno dei due estremi.

8 Due recipienti identici, di base 1 dm^2, poggiano su uno stesso piano orizzontale: il recipiente A contiene 12 kg d'acqua, il recipiente B contiene 4 kg d'acqua. Se i due recipienti venissero messi in comunicazione, si verificherebbe ovviamente uno spostamento di liquido da A verso B fino al raggiungimento di una nuova situazione di equilibrio: quale sarebbe, in tale eventualità, il lavoro complessivamente compiuto dalla forza peso? Si ipotizzi che il collegamento venga realizzato tramite un condotto di volume trascurabile.

SOLUZIONI

1 Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è la somma dei lavori compiuti dai suoi componenti cartesiani. Il lavoro del componente x è $-5\,\text{N} \times 0{,}15\,\text{m} = -0{,}75\,\text{J}$, il lavoro del componente y è $2\,\text{N} \times 0{,}15\,\text{m} = 0{,}30\,\text{J}$, il lavoro del componente z è zero. Pertanto, $L = -0{,}45$ J. In modo più matematico:
$L = \vec{F} \times \overrightarrow{AB} = F_x(AB)_x + F_y(AB)_y + F_z(AB)_z$. Essendo $\overrightarrow{AB} = (-0{,}15\,\text{m})\vec{u}_x + (0{,}15\,\text{m})\vec{u}_y$, si ottiene $L = 5\,\text{N} \times (-0{,}15\,\text{m}) + 2\,\text{N} \times 0{,}15\,\text{m} = -0{,}45$ J.

2 Vero: essendo sempre e solo positivo, il lavoro di tale forza non potrebbe essere zero su un percorso chiuso.

3 Devono risultare uguali le derivate parziali 'in croce' delle componenti cartesiane delle forze (condizione di Schwarz). Nel caso in esame deve risultare $\partial F_x / \partial y =$ $= \partial F_y / \partial x$, vale a dire $5 = -k$. Per $k = -5$ la forza in questione è conservativa.

4 La rapidità di esecuzione del lavoro (potenza) corrisponde al prodotto scalare tra forza e velocità (del punto su cui la forza è applicata). Nel caso (*a*) (fig.10) i due vettori sono ortogonali, quindi $m\vec{g} \cdot \vec{v} = 0$. Nel caso (*b*) l'angolo tra i due vettori è 60°, cosicché $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv \cos 60° = 0{,}040$ kg × × 9,81 m/s^2 × 1,50 m/s × 0,5 = 0,294 W. Nel caso (*c*) i due vettori sono paralleli, perciò $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv$ = 0,040 kg × 9,81 m/s^2 × 1,50 m/s = 0,589 W.

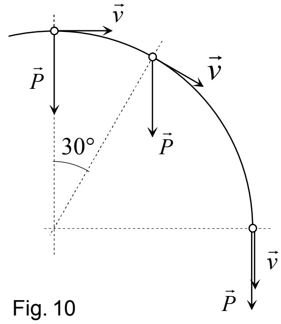

Fig. 10

5 (*a*) Devono risultare uguali le derivate 'in croce' delle componenti cartesiane della forza. Nel caso qui considerato è $\partial F_x / \partial y = 2y$ mentre $\partial F_y / \partial x = 5$, dunque la forza non è conservativa.

(*b*) Non essendo la forza conservativa, ci aspettiamo che il lavoro possa risultare diverso lungo i diversi percorsi. Da *O* ad *A* il percorso è verticale, quindi lavora solo il componente verticale della forza, che però su tale tratto è zero: il lavoro è zero. Da *A* a *B* lavora solo il componente orizzontale, che su tale tratto ha valore costante 3^2 N. Dato che lo spostamento è 6 m, il lavoro è 54 J. Complessivamente, lungo il percorso *OAB* il lavoro è 54 J.

Da *O* a *C* lavora solo il componente orizzontale della forza, che però su tale tratto è zero: lavoro uguale a zero. Da *C* a *B* lavora solo il componente verticale, che su tale tratto ha valore costante 5×6 N. Dato che lo spostamento è 3 m, il lavoro è 90 J. In totale, il lavoro lungo il percorso *OCB* è 90 J.

Nel tratto da *O* a *B* (lungo il quale è $y = 0{,}5\,x$) il lavoro elementare dL è la somma del lavoro dL_x compiuto dal componente x e del lavoro dL_y compiuto dal componente y. Risulta $\mathrm{d}L_x = F_x\,\mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}x = (0{,}5\,x)^2\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}L_y = F_y\,\mathrm{d}y = 5\,x\,\mathrm{d}y = 10\,y\,\mathrm{d}y$. Il lavoro complessivo del componente x è pertanto

$L_x = \int_0^6 (0{,}5\,x)^2\,\mathrm{d}x = 0{,}25\left[x^3/3\right]_0^6 = 18$ J. Il lavoro complessivo del componente y è $L_y = \int_0^3 10y\,\mathrm{d}y = 10\left[y^2/2\right]_0^3 = 45$ J. In totale, il lavoro della forza è $L = L_x +$ $+ L_y = 18$ J + 45 J = 63 J.

6 (*a*) Il lavoro del componente x della forza è $L_x = \int_0^3 F_x\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (5y + x^2)\,\mathrm{d}x$. Es-

sendo, lungo il percorso 1, $y = 3 - x$, si ottiene $L_x = \int_0^3 [5(3-x)+x^2]\ \mathrm{d}x =$

$= \int_0^3 (15-5x+x^2)\ \mathrm{d}x = \left[15x - 5x^2/2 + x^3/3\right]_0^3 = 31{,}5$ J.

Il lavoro del componente y della forza è $L_y = \int_3^0 F_y\ \mathrm{d}y = -\int_3^0 9x\ \mathrm{d}y$. Essendo, lungo il percorso 1, $y = 3 - x$, è $x = 3 - y$ e quindi $L_y = -\int_3^0 9\,(3-y)\ \mathrm{d}y =$

$= \int_0^3 (27-9y)\ \mathrm{d}y = \left[27y - 9y^2/2\right]_0^3 = 40{,}5$ J. Il lavoro complessivo della forza è $L = L_x + L_y = 31{,}5\ \mathrm{J} + 40{,}5\ \mathrm{J} = 72{,}0$ J.

(b) Il lavoro del componente x della forza è $L_x = \int_0^3 (5y + x^2)\,\mathrm{d}x$, con $y =$ $= 3 - x^2/3$. Dunque $L_x = \int_0^3 [5(3-x^2/3)+x^2]\ \mathrm{d}x = \int_0^3 (15 - 2x^2/3)\ \mathrm{d}x = 39$ J.

Il lavoro del componente y è $L_y = -\int_3^0 9x\ \mathrm{d}y$. Essendo $y = 3 - x^2/3$, è $\mathrm{d}y =$ $= -(2/3)x\,\mathrm{d}x$. Perciò, tenuto conto che i limiti di integrazione per x sono 0 e 3, possiamo scrivere $L_y = -\int_0^3 9x(-2/3)\,x\ \mathrm{d}x = \int_0^3 6x^2\ \mathrm{d}x = 54$ J. Il lavoro complessivo è $L = L_x + L_y = 39\ \mathrm{J} + 54\ \mathrm{J} = 93$ J.

7 Il lavoro L compiuto sulla molla (da parte delle forze che la tirano ai due estremi) è uguale e contrario a quello compiuto dalla molla: $L = (k/2)\Delta^2$.

È invece indeterminato il lavoro compiuto sulla molla ai due estremi: si sa infatti che le forze che agiscono sulla molla in A e in B sono in ogni istante identiche in valore (la molla ha massa zero, quindi la somma delle forze applicate è zero), ma non si conoscono le modalità di movimento di A e B, e quindi non si sa su quali spostamenti parziali le due forze lavorano (si conoscono solo gli spostamenti complessivi). Supponiamo ad esempio che, durante l'allungamento della molla, la velocità di B sia in ogni istante tre volte più grande di quella di A. Allora durante ogni intervallo di tempo infinitesimo dt lo spostamento di B è tre volte più grande dello spostamento di A, e conseguentemente la forza applicata in B compie un lavoro tre volte più grande di quello della forza (identica in valore) applicata in A. Anche il lavoro complessivo L_B è pertanto tre volte più grande:
$L_A = L/4 = (k/8)\,\Delta^2$, $L_B = 3L/4 = 3k/8)\,\Delta^2$.

Supponiamo ora invece che in un primo tempo si sposti B mentre A rimane immobile, e successivamente, con B immobile, si sposti A. Il lavoro della forza applicata in B è chiaramente minore di prima, perché durante lo spostamento di B la molla è meno allungata di prima e quindi è minore il valore della forza elastica. Precisamente, il lavoro sull'estremo B è ora $L'_B = (k/2)\,(3\Delta/4)^2 = (9k/32)\,\Delta^2 =$ $= (3/4)\,L_B$.

Per analoghe ragioni il lavoro su A sarà invece più grande: A comincia a muoversi quando la molla ha già subìto 3/4 dell'allungamento complessivo Δ, e quindi la forza che tira la molla in A cresce linearmente con lo spostamento di A a partire non da zero ma da $(3/4)k\Delta$. Sarà pertanto
$L'_A = (k/2)\,[\Delta^2 - (3\Delta/4)^2] = (7k/32)\Delta^2 = (7/4)\,L_A$.

Si noti che $L'_B + L'_A = L_B + L_A$. Il lavoro complessivo non dipende dai singoli spostamenti degli estremi, ma dallo spostamento dell'uno rispetto all'altro (e quindi solo da quanto la molla si è deformata).

È interessante esaminare la cosa sotto l'aspetto grafico. Caso 1. In fig.11, la linea 3 mostra la forza ai due estremi della molla in funzione dell'allungamento complessivo x, e l'area sottesa è il lavoro complessivo sulla molla. La linea 1 mostra che mentre A si sposta di $\Delta/4$ la forza che tira sulla molla in A cresce da 0 a $k\Delta$: l'area sottesa è il lavoro compiuto sulla molla in A. La linea 2 mostra che mentre B si sposta di $3\Delta/4$ la forza sulla molla in B cresce da 0 a $k\Delta$: l'area sottesa è il lavoro compiuto sulla molla in B. Sommando l'area sottesa dalla 1 con l'area sottesa dalla 2 si ottiene l'area sottesa dalla 3.

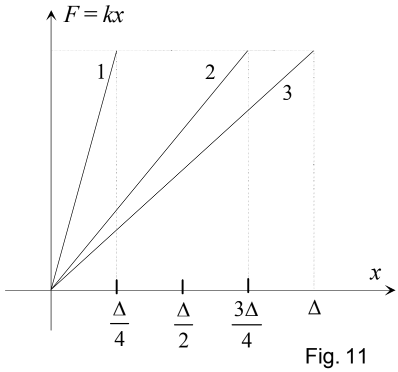

Fig. 11

Caso 2. In fig.12 la linea 3 ha lo stesso significato di prima. La linea 2, sovrapposta alla 3 ma limitata al solo intervallo da 0 a $3\Delta/4$, mostra che la forza su B cresce da 0 a $(3/4)k\Delta$ mentre B si sposta di $(3/4)\Delta$: l'area sottesa è il lavoro compiuto sulla molla in B. La linea 1 mostra che la forza su A cresce da $(3/4)k\Delta$ a $k\Delta$ mentre A si sposta di $\Delta/4$: l'area sottesa è il lavoro compiuto sulla molla in A. Sommando l'area sottesa alla 1 con l'area sottesa dalla 2 si ottiene anche in questo caso l'area sottesa dalla 3.

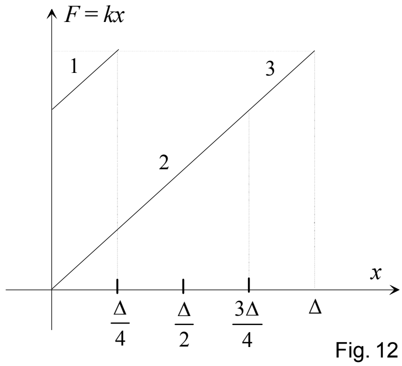

Fig. 12

8 Se h (40 cm) è il livello inizialmente raggiunto in B, il livello in A è $3h$ (fig.13). Il baricentro si trova perciò ad altezza $h/2$ per il liquido in B e ad altezza $3h/2$ per il liquido in A. Se P è il peso del liquido in B, il peso del liquido in A è $3P$, perciò il baricentro G dell'intero sistema si trova inizialmente ad altezza $h_G = \dfrac{(3h/2)\,3P + (h/2)P}{4P} = (5/4)\,h$.

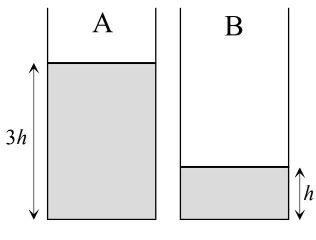

Fig. 13

Nella situazione finale il liquido arriverà in entrambi i recipienti a livello $2h$, il baricentro del sistema si troverà quindi ad altezza h e subirà in definitiva un abbassamento $\Delta h_G = (5/4)h - h = h/4$. Pertanto il lavoro delle forze gravitazionali, motore dal lato A e resistente dal lato B, sarà complessivamente

$L_g = (4P)h/4 = (12+4)\,\text{kgf} \times (1/4)\,0{,}4\text{ m} = 1{,}6\text{ kgm} = (1{,}6 \times 9{,}81)\text{ J} = 15{,}7\text{ J}.$

9.5 Energia cinetica di un punto materiale

1. Si definisce **energia cinetica** di un punto materiale, avente massa m e velocità v, la grandezza scalare $EC = \frac{1}{2}mv^2$.

Il significato di tale grandezza – che ha le stesse dimensioni di un lavoro[8] e si misura mediante le stesse unità – è espresso dal seguente fondamentale teorema: *l'aumento dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze:*

[A] $\Delta(EC) = L.$

Se cioè, in un dato intervallo di tempo, le forze applicate a una particella compiono un lavoro L, in quel dato intervallo di tempo il valore dell'energia cinetica di quella particella aumenta di L. Ovviamente, parlare di «aumento» dell'energia cinetica non significa che l'energia cinetica debba sempre e solo aumentare: per «aumento» dell'energia cinetica si deve intendere semplicemente *la differenza tra il valore finale e il valore iniziale*. Il lavoro L delle forze applicate può risultare nullo o negativo: nel primo caso l'aumento dell'energia cinetica è zero, nel secondo caso l'aumento dell'energia cinetica è negativo, il che significa che il valore finale è inferiore al valore iniziale (e quindi che l'energia cinetica è in realtà diminuita).

In modo equivalente, potremo esprimere il teorema dell'energia cinetica nei seguenti termini: *l'energia cinetica finale è uguale all'energia cinetica iniziale più il lavoro delle forze*:

[B] $EC_f = EC_i + L.$

Se, in particolare, supponiamo che l'energia cinetica iniziale sia zero, otteniamo $EC_f = L$. Perciò possiamo dire che l'energia cinetica di una particella K avente velocità v corrisponde al lavoro che le forze applicate a K hanno dovuto compiere per portarne la velocità da zero a v. Analogamente, quando l'energia cinetica finale è zero risulta $EC_i = -L$. Così, dire che l'energia cinetica di una particella è uguale a 5 erg corrisponde a dire che sarebbe necessario un lavoro resistente di 5 erg (un lavoro di -5 erg) per annullare la velocità della particella.

A queste semplicissime considerazioni può sempre essere riportato in Fisica il significato ultimo del termine «energia»[9].

---

8 $[EC] = ML^2T^{-2} = [L]$.

9 Sull'alone di mistero che circonda, a volte anche nei manuali scolastici, la parola *energia*, si veda il capitolo 39 («Il mistero e la crisi») in G. Tonzig, *100 errori di Fisica* (Maggioli).

2. Dimostrazione della [A]. Il lavoro elementare dL è

[C] $$\mathrm{d}L = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = m\vec{a}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

Si osservi che, per la regola di derivazione del prodotto, risulta $\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}$. Dunque è $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}$. Ma $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$, perciò $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}$, col che la [C] diventa

[D] $$\mathrm{d}L = m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\frac{mv^2}{2}) = \mathrm{d}EC\,.$$

Integrando allora tra la posizione iniziale A e la posizione finale B, otteniamo

[E] $$L = \int_A^B \mathrm{d}L = \int_A^B \mathrm{d}EC = \Delta EC$$

che è quanto intendevamo dimostrare.

3. Si noti: osservatori inerziali diversi attribuiscono a una data forza lo stesso valore e la stessa direzione, ma vedono in generale spostamenti diversi *e quindi valutano in modo diverso il lavoro* che da quella forza viene compiuto[10].

Esempio: su un ascensore che procede in salita con velocità costante v_0 (fig. 14), il signor K' lascia cadere una pallina. Nel tempo necessario perché, rispetto a K', la velocità passi da zero a v_0 verso il basso, l'osservatore esterno (il signor K) vede la velocità della pallina passare da v_0 verso l'alto a zero. Il primo vede un lavoro positivo (forza verso il basso, spostamento verso il basso) con produzione di energia cinetica, il secondo vede un lavoro negativo (forza verso il basso, spostamento verso l'alto) con azzeramento dell'energia cinetica. Da questo istante lo spostamento sarà verso il basso per entrambi gli osservatori, e tutti e due vedranno un lavoro positivo (di valore diverso) fino all'impatto della pallina sul pavimento dell'ascensore.

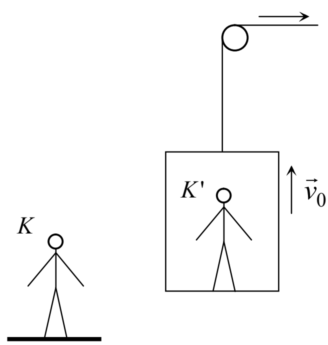

Fig. 14

[10] Al riguardo si veda anche il capitolo 12, *Dinamica relativa.*

9.6 Energia cinetica di un sistema di punti materiali

1. L'energia cinetica di un corpo – o di un qualsivoglia sistema materiale – è la somma delle energie cinetiche dei punti materiali che lo costituiscono.

2. *a*) Nel caso di *moto rigido di traslazione*, tutti i punti del sistema hanno nello stesso istante la stessa velocità, per cui, indicata con M la massa complessiva, l'energia cinetica del sistema è semplicemente $\frac{1}{2}Mv^2$.

b) Nel caso di *moto rigido di rotazione*, tutti i punti del sistema descrivono circonferenze coassiali (tutte centrate sull'asse di rotazione) con uguale velocità angolare ω, cosicché la velocità lineare $v = \omega r$ è proporzionale al raggio della circonferenza percorsa. L'energia cinetica di un singolo punto è $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, l'energia cinetica dell'intero sistema è la somma di tanti termini dello stesso tipo quanti sono i punti del sistema. Mettendo a fattor comune in tale somma la grandezza $\frac{1}{2}\omega^2$, otteniamo che l'energia cinetica del sistema è

[A] $$EC = \frac{1}{2}J\omega^2$$

dove con J si è indicata la somma di tutti i termini del tipo mr^2, vale a dire la somma $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...$: tale somma rappresenta il **momento d'inerzia** del sistema rispetto a quel dato asse di rotazione.

3. Se cambia l'asse di rotazione, cambia (in generale almeno) il valore del momento d'inerzia di uno stesso sistema. Vale al riguardo un'importante proprietà (**teorema di Steiner**, o «degli assi paralleli»): se un sistema di massa M ha momento d'inerzia J_0 rispetto a un asse x_0 passante per il centro di massa, il momento d'inerzia rispetto a un asse x parallelo a x_0 e distante d da x_0 è

[B] $$J = J_0 + Md^2.$$

Perciò: *tra tutti gli assi aventi uguale direzione, quello rispetto al quale il momento d'inerzia è minimo passa per il centro di massa.*

4. Il calcolo matematico del momento d'inerzia può essere facilmente effettuato solo per corpi a geometria regolare. Si trova ad esempio che:

a) per un cilindro omogeneo (densità uguale in ogni punto) di massa M e raggio R, il momento d'inerzia rispetto all'asse geometrico è $\frac{1}{2}MR^2$;

b) per un cilindro cavo omogeneo di raggio interno r e raggio esterno R, il momento d'inerzia rispetto all'asse geometrico è $\frac{1}{2}M(r^2 + R^2)$;[11]

c) per una sfera omogenea di massa M e raggio R, il momento d'inerzia rispetto a un qualsiasi asse passante per il centro è $\frac{2}{5}MR^2$;

---

[11] Per un cilindro vuoto ($r = R$) $J = MR^2$, per un cilindro pieno ($r = 0$) $J = MR^2/2$.

d) per una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L il momento d'inerzia rispetto a un asse baricentrale perpendicolare alla sbarra è $ML^2/12$.

5. Il momento d'inerzia rispetto a un asse passante dal centro di massa si può sempre misurare direttamente mediante un *pendolo di torsione*[12] (col teorema di Steiner se ne può quindi dedurre il momento d'inerzia rispetto a un asse qualsiasi).

6. *Il momento d'inerzia rappresenta per l'accelerazione angolare quello che la massa rappresenta per l'accelerazione lineare del centro di massa*: la massa di un corpo misura la sua capacità di contrastare per inerzia le variazioni della velocità lineare del centro di massa, il momento d'inerzia rispetto a un dato asse misura analogamente la capacità di un corpo di contrastare per inerzia le variazioni della velocità angolare attorno a quell'asse. Alla relazione $F_e = Ma_{CM}$ (somma delle forze esterne uguale a massa complessiva per accelerazione del centro di massa) fa riscontro l'analoga relazione rotazionale

[C] $\tau_e = J\alpha$

(momento risultante delle forze esterne uguale a momento d'inerzia per accelerazione angolare).[13]

7. Un moto rigido può a volte essere descritto come un moto di rotazione attorno a un asse di rotazione la cui posizione cambia nel tempo[14]. In tal caso l'energia cinetica può essere calcolata come nel caso di moto rotatorio: $EC = (1/2)J\omega^2$, dove naturalmente il momento d'inerzia deve essere riferito all'asse di rotazione.

Esempio: supponiamo che un cilindro omogeneo di raggio R rotoli con velocità angolare ω senza strisciare: in tal caso il suo asse geometrico si sposta con velocità $v_0 = \omega R$ [15]. Essendo il moto del cilindro un moto di rotazione attorno alla retta di

---

[12] Il pendolo di torsione viene realizzato sospendendo un corpo C ad un filo: in condizioni di equilibrio, il filo giace lungo una retta che passa necessariamente dal baricentro di C. Se ora viene fatto ruotare attorno a tale retta, e viene poi abbandonato all'azione delle forze elastiche provenienti dal filo, C recupera la posizione iniziale solo dopo una serie di movimenti di rotazione, alternativamente in un senso e nel senso opposto. Si dimostra (cfr. punto 2 a pag. 375) che la durata di un'oscillazione completa (andata e ritorno) è $T = 2\pi\sqrt{J/k}$, dove J è il momento d'inerzia di C rispetto all'asse di rotazione, e k è la *costante elastica torsionale* del filo (costante di proporzionalità tra momento della coppia di forze proveniente dal filo e angolo di rotazione).

[13] Importante: come si vedrà al capitolo *dinamica rotazionale*, tale relazione vale *solo se il momento d'inerzia è costante e se l'asse di rotazione è fisso, oppure cambia posizione senza cambiare direzione*: il momento delle forze e il momento d'inerzia devono essere calcolati entrambi rispetto a uno stesso asse, che può essere o l'asse di rotazione, oppure un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse di rotazione. L'accelerazione angolare che figura nella [C] è invece (come la velocità angolare) *un dato assoluto*, uguale quindi rispetto ai due assi indicati.

[14] Avendo i punti dell'asse di rotazione velocità zero, più che di «asse di rotazione in movimento» sembra opportuno parlare di «asse di rotazione via via diverso».

[15] Dato che, per l'assenza di strisciamento, la generatrice di contatto tra cilindro e terreno ha velocità zero, l'asse di rotazione coincide precisamente con tale generatrice (il moto del cilindro si può quindi descrivere come una rotazione con velocità angolare ω attorno a un asse che si sposta sul terreno con la stessa velocità con cui si sposta l'asse del cilindro). Da ciò deriva che, essendo R la distanza dell'asse del cilindro dall'asse di rotazione, la sua velocità è $v = \omega R$.

contatto, e tenendo conto che il momento d'inerzia del cilindro rispetto a tale retta è (teorema di Steiner) $\frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$, si trova

$EC = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2)\,\omega^2 = \frac{3}{4}Mv_0{}^2 = 0{,}75\ Mv_0{}^2$ (v_0 è la velocità del centro di massa). Ciò significa che, *se rotola senza strisciare*, un cilindro omogeneo possiede un'energia cinetica del 50% superiore a quella ($\frac{1}{2}Mv_0{}^2$) che avrebbe qualora avanzasse con la stessa velocità, ma scivolando senza ruotare.

Per una sfera omogenea che rotola senza strisciare risulta analogamente $EC = \frac{1}{2}J\omega^2$ con $J = 2MR^2/5 + MR^2$, cosicché in definitiva $EC = 0{,}70\ M\omega^2R^2 = 0{,}70\ Mv_0{}^2$. L'energia cinetica di una sfera che rotola senza strisciare è maggiore del 40% rispetto all'energia cinetica che, a pari velocità di avanzamento, la sfera avrebbe se animata da moto di pura traslazione.

8. Si osservi attentamente che, a differenza della quantità di moto, l'energia cinetica di un sistema materiale *non può in generale essere calcolata concentrando idealmente tutta la massa nel centro di massa*: la cosa è possibile solo nel caso di moto traslatorio. Ad esempio, per un cilindro omogeneo in rotazione attorno al proprio asse geometrico la velocità del centro di massa è zero ed è zero la quantità di moto, mentre è ovviamente diversa da zero l'energia cinetica.

9. Dal fatto che l'energia cinetica dipende solo dal modulo del vettore velocità e non dalla sua direzione discende tra l'altro che, benché il moto di un corpo possa sempre considerarsi come l'effetto complessivo di un certo numero di moti componenti, nella valutazione dell'energia cinetica occorre sempre riferirsi al moto effettivo e alle relative velocità, *non* alle velocità che compaiono nei moti componenti. Ad esempio, l'immobilità di un blocco potrebbe essere interpretata come l'effetto di due moti di traslazione in direzione opposta con velocità di uguale valore: a ciascuno dei due moti componenti competerebbe una stessa energia cinetica EC, ma l'energia cinetica del blocco è zero, non certo $2EC$.

10. Si dimostra tuttavia (**secondo teorema di König**) che l'energia cinetica di un *qualsiasi* sistema materiale si può sempre esprimere come somma di due termini: l'energia cinetica «traslazionale», o «del centro di massa» (l'energia cinetica che il sistema avrebbe nel caso traslasse con la velocità del CM, ovvero l'energia cinetica che il CM avrebbe se in esso fosse concentrata l'intera massa del sistema) più l'energia cinetica «rispetto al centro di massa» (l'energia cinetica del sistema valutata nel **riferimento del centro di massa**, cioè di quel riferimento che – dal punto di vista di un qualsiasi osservatore inerziale – si muove di moto traslatorio con la velocità del centro di massa). Ad esempio, per un cilindro omogeneo che rotola senza strisciare l'energia cinetica «del centro di massa» è $\frac{1}{2}Mv_0{}^2$, l'energia cinetica «rispetto al centro di massa» è $\frac{1}{2}J\omega^2$, con $J = \frac{1}{2}MR^2$. Essendo per ipotesi $\omega R =$

$= v_0$ (puro rotolamento), si ottiene in definitiva $EC = \frac{3}{4}Mv_0{}^2$, lo stesso risultato ottenuto in precedenza[16].

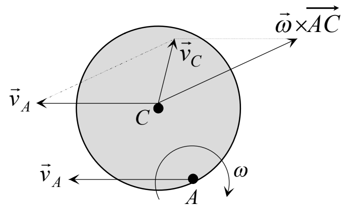

Fig. 15

11. Nell'applicazione del secondo teorema di König occorre tenere ben presente che l'energia cinetica che chiamiamo 'traslazionale' è quella che compete a un moto di traslazione *con la velocità del centro di massa*, e non di un punto generico del sistema. Si consideri ad esempio il caso illustrato in fig. 15: un disco di centro C e massa M ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ attorno a un asse parallelo all'asse geometrico del disco e passante per un punto A dotato di velocità costante $\vec{v}_A$ perpendicolare all'asse di rotazione. Dalla cinematica del corpo rigido (pag. 148) sappiamo che per valutare la velocità $\vec{v}_P$ di un punto P del disco possiamo sommare la velocità che competerebbe a tale punto in un moto di traslazione con la velocità di un suo punto O qualsiasi con la velocità che a P competerebbe in un moto di rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno a un asse passante per O, supposto fermo: se, per esempio, il punto in questione è il punto A della figura, per la velocità del centro C otteniamo

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AC}\,.$$

Se ora, in violazione di quanto stabilito al punto 9, facessimo lo stesso per l'energia cinetica, otterremmo $EC = \frac{1}{2}J_A\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2$, un valore, si noti, costante nel tempo.

Se invece applichiamo correttamente il teorema di Steiner otteniamo

$$EC = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2\,,$$

un valore che varia nel tempo assieme alla velocità di C (che è chiaramente massima nel momento in cui le due velocità componenti hanno la stessa direzione).

12. Da quanto già sappiamo sulla proprietà fondamentale del centro di massa – quella di comportarsi come una ipotetica particella dotata di tutta la massa del sistema e soggetta a tutte le forze applicate al sistema – discende che l'energia cinetica del CM (il semiprodotto, cioè, della massa totale per il quadrato della velocità del CM) si può calcolare in funzione di un lavoro fittizio (da alcuni Autori denominato 'pseudolavoro'): il **lavoro sul centro di massa**, il lavoro cioè che verrebbe

[16] Si osservi che il riferimento del centro di massa *non è*, in genere, inerziale (è inerziale solo se nei riferimenti inerziali il moto del CM è rettilineo e uniforme, il che si verifica quando è zero la somma delle forze applicate al sistema considerato). Ciò implica (cfr. cap. *Dinamica relativa*, pag. 330) che in esso possono comparire forze 'apparenti': forze fittizie che in realtà non esistono, e che non compaiono in effetti nei riferimenti inerziali, ma del cui lavoro occorrerebbe ugualmente tener conto se nel riferimento del CM si volessero valutare le variazioni subite dall'energia cinetica del sistema.

compiuto dalla forza risultante (la somma di tutte le forze esterne) se fosse applicata nel CM. Si osservi attentamente che tale lavoro fittizio non è, in generale, identificabile col lavoro effettivamente compiuto dalle forze esterne: *non sarebbe quindi assolutamente corretto dire che l'energia cinetica del CM "dipende solo dal lavoro delle forze esterne"*.

13. Il teorema dell'energia cinetica può essere applicato a qualsiasi sistema fisico, purché si riesca a tener conto del lavoro compiuto da *tutte* le forze, e in particolare di quello compiuto dalle forze interne. In pratica, nel caso di corpi che subiscono deformazioni il calcolo dell'energia cinetica *non è in genere possibile*, perché il lavoro delle forze interne resta indeterminato.

Primo esempio: una molla (reale, dotata di massa) inizialmente in quiete viene allungata mediante applicazione di due forze di trazione uguali e contrarie ai suoi estremi, fino a una nuova situazione di quiete. In definitiva, l'energia cinetica della molla non ha subito variazioni: è zero all'inizio, è zero alla fine. Eppure, le forze esterne hanno compiuto un lavoro positivo, e, per la legge di azione a reazione, le forze interne (*intese come forze di contatto tra parti macroscopiche contigue della molla*) hanno compiuto esattamente tanto lavoro motore (per esempio, una parte A sulla parte restante B) quanto lavoro resistente (la parte B sulla parte A): forze uguali e contrarie, spostamenti identici. Da che cosa, allora, è stato annullato il lavoro positivo delle forze esterne?

Secondo esempio: supponiamo che, nella situazione mostrata in fig. 16, la molla sia agganciata al blocco, e sia invece semplicemente appoggiata alla parete fissa a sinistra: se la molla è inizialmente compressa, quando la molla si distende il sistema molla + blocco parte verso destra. Da dove proviene l'energia cinetica della molla? La forza proveniente dalla parete non ha compiuto lavoro, la forza proveniente dal blocco ha compiuto un lavoro resistente, le forze interne (*intese come forze di contatto tra parti macroscopiche adiacenti*) hanno compiuto tanto lavoro motore quanto lavoro resistente.

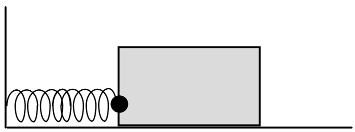

Fig. 16

Chiaramente, in entrambi i casi considerati il teorema dell'energia cinetica non può essere applicato alla molla per il fatto che non riusciamo a tener conto delle forze che agiscono internamente ad essa a livello microscopico – dove l'interazione «a contatto» non esiste – per effetto delle deformazioni del reticolo (scorrimento l'uno sull'altro di piani reticolari contigui, con variazione della distanza tra particelle adiacenti e con lavoro complessivo delle forze di azione e reazione *diverso*, questa volta, da zero: positivo quando la deformazione diminuisce, negativo quando la deformazione cresce)[17]. Si noti che il lavoro delle forze esterne sul sistema molla + blocco è zero (l'energia cinetica del sistema proviene quindi esclusivamente dal lavoro di forze interne al sistema, esattamente come l'energia cinetica del nostro corpo quando camminiamo o quando spicchiamo un salto) ma non è zero quello che più sopra abbiamo chiamato *lavoro sul centro di massa*.

14. Nessun corpo reale è rigorosamente rigido: nell'applicazione del teorema dell'energia cinetica, la schematizzazione di corpo rigido può pertanto portare a volte a valutazioni errate. Questo accade tipicamente nel calcolo del lavoro delle forze di attrito radente: nel caso di un blocco che scivola, calcolare tale lavoro come prodotto della forza d'attrito per lo spostamento del blocco fornisce un risultato corretto per l'energia cinetica del blocco, ma *è di per sé del tutto errato*. Il risultato per l'energia cinetica è corretto solo perché in questo specifico caso (moto di traslazione) l'energia cinetica del blocco viene a coincidere con l'energia cinetica del CM (che subisce uno spostamento pari a quello del blocco, e al quale possiamo fingere sia applicata la forza d'attrito). Ma porre uguale a «forza d'attrito per spostamento del blocco» il lavoro d'attrito è concettualmente sbagliato: nel caso, ad esempio, sopra considerato, l'effettivo lavoro d'attrito è – in valore assoluto – inferiore. Si veda per tale questione il paragrafo 3 al capitolo 10 (pag. 290)

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

Energia cinetica del punto
Energia cinetica del moto di traslazione

9 Si verifichi la validità del teorema dell'energia cinetica relativamente al caso di un punto materiale di massa m la cui velocità (scalare) cresce linearmente nel tempo da v_1 a v_2 mentre l'ascissa curvilinea s varia da s_1 a s_2.

10 Un corpo di massa m cade nel vuoto partendo da fermo da un'altezza h. Con quale velocità arriva al suolo?

11 Un corpo di massa m viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v. Determinare l'altezza h raggiunta.

12 Un corpo di massa 500 g, lanciato in aria verticalmente verso l'alto con velocità v_0 = 20 m/s, raggiunge l'altezza di 15 m. Quanta energia ha perduto per effetto della resistenza dell'aria?

13 Un corpo soggetto esclusivamente al peso cade da fermo da un livello 1 a un livello 2 acquistando una velocità di 10 m/s. Se ne può dedurre (*vero*/*falso*) che se la velocità iniziale fosse stata 10 m/s la velocità finale sarebbe stata 20 m/s, e più in generale che se la velocità iniziale fosse v_0 la velocità finale sarebbe $v_0 + 10$ m/s.

---

[17] Alle deformazioni del reticolo devono essere ricondotti anche gli attriti interni alla molla, per effetto dei quali parte dell'energia cinetica prodotta viene convertita in energia cinetica del moto di agitazione termica.

14 Quando le forze applicate a un certo punto materiale P compiono un lavoro L_0 la velocità di P passa da 0 a 10 km/h. Quale lavoro è perciò necessario perché la velocità di P passi da 100 a 110 km/h?

15 Un corpo viene lanciato con velocità v_0, nel senso della salita, lungo un piano inclinato privo di attrito. Si dimostri che, se si trascura la resistenza dell'aria, l'altezza raggiunta è del tutto indipendente dall'inclinazione del piano.

16 Un sasso viene lanciato con velocità $\vec{v}_0$. Sapendo che $\vec{v}_0$ forma un angolo φ col terreno e che dopo il lancio agisce solo la forza peso, si determini l'altezza h raggiunta.

17 Un blocco C di massa m scivola senza attrito con velocità v lungo un piano orizzontale (fig. 17), soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo. La corsa di C viene poi arrestata da una molla di rigidezza k, che rilancia C in direzione opposta. Quale deformazione ha subìto la molla?

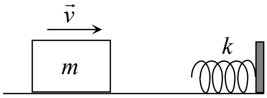

Fig. 17

18 Un blocco C di massa m è sospeso a un filo: immediatamente al disotto di C (fig. 18) c'è un piatto orizzontale di massa trascurabile sostenuto da una molla di costante elastica k. Di quanto si comprime la molla se si taglia il filo?

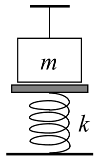

Fig. 18

19 Moto armonico con ampiezza $A = 16$ cm e con energia cinetica massima 80 J. Determinare il valore dell'energia cinetica a 12, a 8, a 4 cm dal centro O.

20 Un blocco C di massa m, fissato all'estremità di una molla di costante k, oscilla di moto armonico.
(a) Come varia la velocità massima al variare dell'ampiezza?
(b) Come varia, per una data ampiezza, la velocità in funzione della posizione?

21 Due fionde sono costruite con elastici aventi diversa costante k di elasticità. Quale delle due conviene usare se ciò che interessa è lanciare il sasso alla maggior distanza possibile?

22 Se le forze applicate ad un corpo rigido hanno risultante zero, il relativo lavoro è zero e quindi non influisce sul valore dell'energia cinetica (*vero*/*falso*).

23 Un pendolo è costituito da una sferetta di massa m fissata a un'asta rigida di lunghezza L e massa trascurabile. Determinare a quale sforzo massimo l'asta deve resistere, considerando ampiezze angolari di oscillazione di 60°, 90°, 120°, 180°.

24 Problema «del giro della morte» (fig. 19). Da quale altezza minima deve partire (da fermo) il blocchetto K, soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, per riuscire a effettuare l'intero percorso senza mai staccarsi dalla guida su cui scivola? Si consideri nullo l'attrito, ma si chiarisca qualitativamente in che modo il risultato verrebbe modificato dalla presenza di attrito.

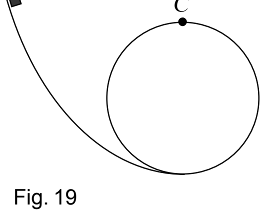

Fig. 19

25 Supponiamo che, nella situazione descritta al quesito precedente, il blocchetto parta da un punto posto esattamente all'altezza del punto *C*. A quale altezza si staccherebbe dalla guida in assenza di attrito? Che influenza avrebbe l'attrito sulla posizione del punto di distacco?

26 Un blocchetto *K*, inizialmente in quiete sulla sommità di una semisfera di raggio *R* (fig. 20), subisce un urto che gli conferisce una velocità orizzontale $\vec{v}_0$. Si spieghi in che modo, in assenza di ogni di attrito, la posizione di distacco di *K* dalla superficie d'appoggio dipende dal valore di $\vec{v}_0$.

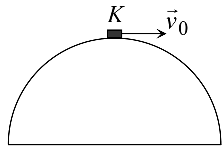

Fig. 20

27 Una tonnellata d'acqua, inizialmente contenuta in un recipiente a forma di parallelepipedo a base quadrata di lato L = 0,5 m, viene trasferita mediante una pompa in un recipiente cilindrico di raggio R = 0,25 m. Le basi dei due recipienti sono allo stesso livello, la potenza assorbita dalla pompa è P = 0,5 kW e la portata è Q = 5 ℓ/s. Determinare il lavoro compiuto dalle forze d'attrito tra l'inizio dell'operazione e la fine di ogni movimento della massa d'acqua.

28 Due sferette *A* e *B* aventi rispettivamente massa m_A e $m_B = 2\,m_A$ sono sospese a uno stesso punto fisso mediante due fili di uguale lunghezza L, inestensibili e di massa trascurabile. La sferetta *A* viene spostata (fig. 21) fino a che il suo filo forma un angolo θ = 60° con la verticale e poi è lasciata libera: quando ripassa per la verticale, urta la sferetta *B*. Supponendo che le due sferette restino attaccate l'una all'altra, calcolare l'ampiezza angolare di oscillazione del sistema dopo l'urto.

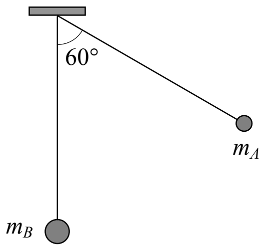

Fig. 21

29 Una fune, che appoggia senza attrito su un sostegno sagomato come in fig. 22, inizia a un tratto a scivolare verso il basso. Sapendo che la lunghezza complessiva è L e che la lunghezza del tratto inizialmente posto sul piano inclinato è d, si determini la velocità con cui l'estremo *A* raggiunge l'inizio della discesa.

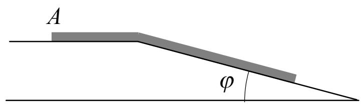

Fig. 22

Energia cinetica del moto rotatorio e rototraslatorio

30 Tre punti materiali di massa m percorrono una circonferenza di raggio R (fig. 23) con la stessa velocità v. Si verifichi che l'energia cinetica del sistema può essere espressa nella forma $\frac{1}{2}J\omega^2$,

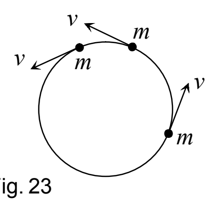

Fig. 23

dove J è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse geometrico della circonferenza.

31 Per il teorema degli assi paralleli, se è noto il momento d'inerzia J di un corpo K di massa M rispetto ad un particolare asse y, è automaticamente noto il momento d'inerzia J' di K rispetto ad un asse y' parallelo a y: risulta infatti (*vero/falso*) $J' = J + Md^2$, dove d è la distanza tra i due assi.

32 Un cilindro omogeneo di raggio R e massa M rotola senza strisciare.
(*a*) Si esprima la sua energia cinetica in funzione della velocità angolare ω.
(*b*) Si verifichi che lo stesso risultato si ottiene sommando l'energia cinetica che il cilindro avrebbe nel caso traslasse con la velocità v_0 del suo asse geometrico con l'energia cinetica che il cilindro avrebbe se il suo asse geometrico fosse immobile e il cilindro ruotasse attorno ad esso con velocità angolare ω.

33 Si chiarisca da quali elementi dipende il tempo impiegato da un cilindro omogeneo a percorrere, con partenza da fermo, un piano inclinato di lunghezza L, supponendo che l'attrito sia abbastanza grande da impedire al cilindro di scivolare. Si confronti il risultato con quello che si sarebbe ottenuto nel caso di attrito zero. Si descrivano valore e direzione della reazione del vincolo.

34 Si esamini lo stesso problema con riferimento a una sfera omogenea.

35 Un disco omogeneo, il cui asse ha direzione orizzontale, è vincolato in modo da poter oscillare senza attrito attorno alla più alta delle sue generatrici. Sapendo che inizialmente il disco è in equilibrio sotto l'azione del peso e della reazione del vincolo, determinare lo spostamento angolare subito dal disco per effetto di un urto che gli imprime una velocità angolare ω.

SOLUZIONI

9 Il punto si muove con accelerazione scalare costante a positiva: il componente tangenziale della forza risultante (il componente che compie lavoro) ha quindi modulo costante ma, il lavoro di tale forza è $L = ma\,(s_2 - s_1)$. Essendo il moto uniformemente vario, risulta (cfr. pag. 81) $v_2^2 = v_1^2 + 2a\,(s_2 - s_1)$, da cui moltiplicando per $m/2$ si ottiene $\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + L$.

10 Per il teorema dell'energia cinetica, $\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$, da cui $v_f = \sqrt{2gh}$, risultato già noto dalla cinematica.

11 Per il teorema dell'energia cinetica, $0 = mv^2/2 - mgh$, da cui $h = v^2/2g$, risultato già noto dalla cinematica.

12 Il corpo arriva per ipotesi a quota 15 m con energia cinetica zero, mentre in assenza d'aria l'energia cinetica nella stessa posizione sarebbe stata $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = (0{,}5 \times 20^2/2 - 0{,}5 \times 9{,}81 \times 15)$ J $= 26{,}4$ J. Questa energia è stata azzerata dal lavoro negativo della resistenza dell'aria.