Capitolo 10

Attrito

10.1 Che cos'è l'attrito

1. L'attrito tra un corpo A e un corpo B è un'interazione di contatto tra i due: precisamente, il termine «attrito» indica la resistenza che al moto di A rispetto a B – e di B rispetto ad A – viene opposta da parte di forze con cui i due corpi interagiscono nella zona di contatto. Quando le forze di attrito contrastano lo scivolamento di una superficie sull'altra (il che, come risulterà chiaro, può verificarsi *anche quando uno dei due corpi rotola sull'altro*) si parla di «attrito radente»: **attrito radente statico** se le due superfici a contatto sono immobili l'una rispetto all'altra, **attrito radente dinamico** (o «cinetico») se il moto di scivolamento è già in atto. Quando invece le forze d'attrito contrastano un moto di rotolamento si parla di **attrito volvente**.

2. Un esempio di *attrito radente statico* si ha nel caso di un libro appoggiato su un tavolo: grazie all'attrito, può accadere che il libro resti in equilibrio anche se il piano d'appoggio è inclinato rispetto all'orizzontale. Attrito radente statico è anche ciò che ci permette di camminare senza scivolare ad ogni passo e di afferrare gli oggetti senza che ci scivolino tra le dita, ciò che rende possibile l'uso di nodi, chiodi e viti, ciò che permette a una sfera o a un cilindro di scendere lungo un piano inclinato ruotando senza strisciare[1], ciò che permette a un veicolo di cambiare velocità o direzione di marcia.

Attrito radente dinamico è ad esempio ciò che frena la corsa di un oggetto che scivola – soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo – lungo un piano orizzontale: in assenza di attrito il moto proseguirebbe indefinitamente con velocità costante, non essendoci forza parallelamente alla velocità.

Attrito volvente è ad esempio ciò che frena il moto di puro rotolamento di una sfera – soggetta solo al peso e alla reazione del vincolo – lungo un piano orizzontale: se non ci fosse attrito volvente, il moto proseguirebbe con velocità costante.

[1] Pro memoria: in caso di *puro rotolamento* di una sfera o di un cilindro su una superficie S, i punti della sfera o del cilindro a contatto con S hanno la stessa velocità dei punti di S (se S è immobile, velocità zero). Ciò significa che la velocità del centro della sfera (o dell'asse del cilindro) rispetto a S è $v = \omega R$ (ω è la velocità di rotazione, R il raggio della sfera o del cilindro).

10.2 Attrito radente

1. Grazie all'attrito radente, l'equilibrio di un blocco appoggiato su un piano orizzontale è, entro limiti, possibile anche se sul blocco agisce (come in fig. 1) una forza che tende a metterlo in moto. L'attrito consiste, in questo specifico caso, in un sistema di forze complessivamente equivalenti a una forza orizzontale (nel disegno, la forza $\vec{A}_0$) che agisce sul blocco ostacolandone il movimento.

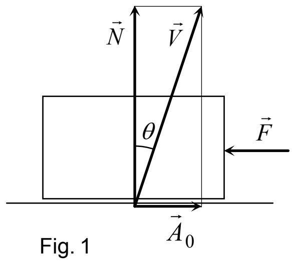

Fig. 1

Come si vede, la forza d'attrito radente è il *componente tangenziale della forza di contatto* $\vec{V}$ (forza che in molti casi chiameremo *reazione del vincolo*): vale a dire, la forza d'attrito radente è ciò che si ottiene proiettando ortogonalmente la forza di contatto sul piano tangente (alle due superfici a contatto). Se θ è l'angolo tra la forza di contatto e la perpendicolare alla superficie di contatto, il valore della forza d'attrito è $A_0 = V \operatorname{sen}\theta$.

2. Se un blocco K è posto su un piano inclinato e scivola verso il basso, la forza d'attrito radente (cinetico) è diretta parallelamente al piano verso l'alto, se K scivola verso l'alto la forza d'attrito radente è diretta parallelamente al piano verso il basso.
Se invece il blocco è immobile, la forza d'attrito radente (statico) su K è diretta nel senso che occorre per impedire a K di entrare in movimento, e quindi *in senso opposto al componente tangenziale del risultante delle altre forze* (le cosiddette «forze attive»).
Se per esempio K, in equilibrio sul piano inclinato, è soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, la forza d'attrito su K è diretta nel senso dalla salita perché il componente tangenziale del peso è diretto nel senso della discesa. Se però su K è anche applicata una forza che tende a far risalire il blocco, e se (come nel disegno a lato, fig. 2) la proiezione di tale forza sul piano inclinato è più grande della analoga proiezione della forza peso, la forza di attrito su K è invece diretta verso il basso.

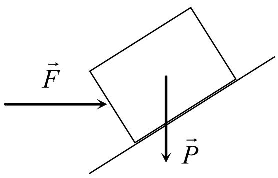

Fig. 2

3. Ma l'attrito radente si manifesta *anche in caso di rotolamento*. Si consideri ad esempio un'automobile alla partenza. Se non ci fosse attrito, le ruote motrici (quelle collegate al motore) girerebbero a vuoto, mentre le altre ruote (le ruote d'appoggio) resterebbero immobili. La forza d'attrito radente statico costringe i punti della ruota a contatto col terreno ad avere, come il terreno, velocità zero: perciò le ruote motrici possono girare solo a condizione di rotolare in avanti, e le ruote d'appoggio possono avanzare solo se ruotano. La forza d'attrito agisce *in avanti*

sulle ruote motrici, impedendo che striscino sul terreno; *all'indietro* invece sulle ruote d'appoggio, costringendole a girare. Si noti, per inciso, che la forza che spinge in avanti la macchina non proviene direttamente dal motore, ma dal terreno: la controprova è che se non c'è attrito sulle ruote motrici la macchina non si muove.[2]

4. Si consideri poi (fig. 3) una sfera rigida che rotola per effetto del peso (e in assenza di attrito volvente) prima in discesa, poi in direzione orizzontale, poi in salita. Se la sfera parte da ferma, in assenza di attrito radente procederebbe lungo l'intero percorso di moto traslatorio, scivolando senza ruotare.[3]

Fig. 3

Se invece c'è attrito, e ce n'è abbastanza, la sfera rotola senza strisciare, ruotando con velocità angolare via via più grande in discesa, costante sul piano orizzontale e via via più piccola in salita. *Le variazioni della velocità angolare sono prodotte dalla forza d'attrito radente statico*, la quale agisce parallelamente alla superficie d'appoggio in direzione *contraria* alla velocità del centro della sfera lungo la discesa, nella *stessa* direzione in salita, mentre *non agisce affatto* nel tratto orizzontale intermedio. Dunque, mentre nel tratto in salita l'attrito radente *contrasta* il moto di rotolamento (rallentando la velocità $\omega = v/R$ di rotazione), nel tratto in discesa l'attrito radente *produce* il rotolamento, e nel tratto orizzontale non si manifesta.

Si osservi anche che nel tratto in salita la forza d'attrito radente statico $\vec{A}_0$ rende meno rapido il rallentamento del centro C della sfera (se φ è l'angolo tra il piano inclinato e il piano orizzontale ed m è la massa della sfera, la velocità di C è $v = v_0 + at$, con $a = -g \operatorname{sen}\varphi + A_0/m$). In presenza di attrito radente la sfera arriva quindi più in alto[4] che in assenza di attrito (quando la sfera salirebbe senza variazioni della velocità angolare, e quindi scivolando sul piano d'appoggio).

5. Si consideri infine una palla da biliardo, e si supponga che venga colpita esattamente a metà della sua altezza (con stecca in posizione orizzontale). In assenza di attrito, la bilia si muoverebbe dopo l'urto di moto traslatorio, scivolando senza ruotare. L'attrito radente cinetico contrasta invece lo strisciamento sulla superficie

---

2 Naturalmente, anche in assenza di motore la macchina non parte... La spinta che il terreno esercita in avanti sulle ruote motrici è uguale alla spinta che le ruote motrici esercitano all'indietro sul terreno (ed è qui che interviene il motore).

3 Il momento complessivo delle forze rispetto al centro di massa sarebbe zero (vedere al capitolo *Dinamica rotazionale*)

4 La distanza percorsa lungo la salita (affrontata con velocità v) è $d = v^2/2a$. Alla stessa conclusione si può arrivare considerando che in assenza di attrito il lavoro resistente del peso deve annullare solo l'energia cinetica traslazionale (legata alla velocità del centro di massa), mentre in presenza di attrito tale lavoro deve annullare anche l'energia cinetica associata alla rotazione attorno al centro di massa. Nel caso di una sfera omogenea (che rotola senza strisciare), l'energia cinetica rotazionale è il 40 % di quella traslazionale: corrispondentemente, nel caso di rotolamento senza scivolamento il lavoro gravitazionale dovrà essere del 40 % superiore, e quindi l'altezza raggiunta risulterà a sua volta del 40 % superiore.

d'appoggio, cosicché il moto traslatorio iniziale si trasforma rapidamente in moto di rotolamento. Quando la velocità v_C del centro della sfera è diminuita e la velocità ω di rotazione è aumentata fino a che sono realizzate le condizioni ($v_C = \omega R$) del puro rotolamento, la forza d'attrito radente è azzerata e agisce sulla bilia solo l'attrito volvente.

6. Il fenomeno dell'attrito radente è molto complesso[5]: tuttavia può essere descritto, in modo sufficientemente accurato per la maggior parte delle applicazioni, in termini di poche, semplici regole dettate dall'esperienza.

(*a*) La forza di attrito radente statico $\vec{A}_0$ tra due superfici assegnate può variare da zero fino a un ben determinato valore massimo: tale valore massimo risulta direttamente proporzionale al valore della «forza premente», cioè della forza con cui i due corpi a contatto interagiscono nella direzione della normale alla superficie di contatto, premendo l'uno sull'altro. In fig. 1 (pag. 196) la forza con cui il piano d'appoggio «preme» sul blocco è $\vec{N}$: possiamo allora scrivere

[A] $\quad A_0 = V\,\mathrm{sen}\theta \le A_{0/\max} = \mu_0 N = \mu_0 V\cos\theta.$

(*b*) La costante di proporzionalità μ_0 (**coefficiente di attrito radente statico**) dipende esclusivamente dalla natura chimico-fisica delle superfici a contatto (tipo di materiale, stato delle superfici): non, quindi, dal fatto che l'area di contatto sia più o meno estesa (ad esempio, per un mattone appoggiato su un piano l'effetto dell'attrito è lo stesso qualunque sia la faccia del mattone a contatto col piano)[6].

(*c*) La forza di attrito radente cinetico tra due corpi è *indipendente dalla velocità* con cui un corpo striscia sull'altro[7], ed è direttamente proporzionale alla forza premente:

[B] $\quad A = V\,\mathrm{sen}\theta = \mu N = \mu V\cos\theta.$

(*d*) La costante di proporzionalità μ (**coefficiente di attrito radente dinamico**) dipende solo dalla natura chimico-fisica delle superfici a contatto (non dall'estensione dell'area di contatto). Il suo valore risulta di solito alquanto più piccolo di quello del coefficiente statico μ_0 (cfr. tabella 1).

---

5 L'attrito è un fenomeno *statistico*. La forza d'attrito è cioè l'effetto macroscopico, complessivo, di una moltitudine di eventi microscopici non prevedibili individualmente: essenzialmente, la formazione di vere e proprie «saldature» tra le due superfici a contatto, per effetto dell'attrazione elettromagnetica tra le molecole dei due corpi nei punti di contatto (le superfici non combaciano mai perfettamente, l'effettiva zona di contatto è molto più piccola di quanto non appaia alla scala macroscopica). Il moto di una superficie rispetto all'altra implica la rottura di tali saldature microscopiche, e il loro continuo riformarsi nella nuova zona di contatto. L'attrito volvente è invece dovuto prevalentemente al fatto che le superfici a contatto si deformano assorbendo energia e riscaldandosi.

6 Variando l'area di contatto varia in proporzione inversa la forza premente per unità di area: cosicché, moltiplicando per l'area di contatto si ritrova per la forza di attrito complessiva lo stesso valore massimo.

7 Regola di prima approssimazione, da utilizzare con particolare cautela.

Coefficienti d'attrito radente statico e dinamico

MATERIALI	μ_0	μ
acciaio su acciaio	0,75	0,50
acciaio su ghiaccio	0,03	0,015
vetro su vetro	0,94	0,40
gomma su asfalto asciutto	1,0	0,80
gomma su asfalto bagnato	0,30	0,25

Tabella 1

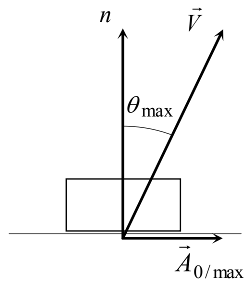

Fig. 4

7. La relazione [A] significa che nel caso di attrito radente statico la reazione del vincolo non può risultare inclinata a piacere sulla normale (alla superficie di contatto): il massimo valore dell'angolo è $\theta_{max} = \text{arctg}\,\mu_0$ (fig. 4). Ne consegue che la possibilità della reazione di un vincolo rigido di salvare per attrito l'equilibrio di un corpo neutralizzando l'azione di una forza $\vec{F}$ è legata *non al valore, ma alla direzione* di tale forza: se l'angolo tra la normale (alla superficie di contatto) e la retta d'azione di $\vec{F}$ è più grande di θ_{max}, la reazione del vincolo non è in grado di salvare l'equilibrio.

8. Analogamente, dalla [B] discende che in caso di attrito radente cinetico è $\text{tg}\,\theta =$ $= \mu$. Dunque, quando un corpo scivola su di un altro la forza di contatto ha *una ben precisa inclinazione* sulla normale alla superficie di contatto.[8]

10.3 Il lavoro dell'attrito radente

1. Si supponga che un blocco K di massa m venga lanciato con velocità v_0 lungo un piano orizzontale in presenza di attrito, e si supponga di voler calcolare la distanza x percorsa dal blocco prima di arrestarsi per effetto dell'attrito, fatta l'ipotesi che le uniche forze applicate al blocco siano il peso e la forza $\vec{A}$ d'attrito (che supponiamo nota). Dato che l'unica forza che compie lavoro (un lavoro resistente) è la forza d'attrito, è spontaneo scrivere subito (teorema dell'energia cinetica)

$$\frac{m v_0^2}{2} = Ax$$

[8] Si osservi in particolare che, se un corpo K scivola lungo un piano, la reazione $\vec{V}$ del vincolo può neutralizzare una forza $\vec{F}$ applicata a K (e il moto di K può conseguentemente risultare rettilineo e uniforme) solo quando la forza $\vec{F}$ e la reazione $\vec{V}$ hanno la stessa retta d'azione, il che richiede che $\vec{F}$ formi con la normale al piano un angolo di tangente μ.

dove con x è indicato lo spostamento incognito del blocco. In effetti, il valore che in tal modo si ottiene per x è corretto. Ma è importante rendersi conto che la grandezza Ax non rappresenta affatto il valore (assoluto) del lavoro della forza d'attrito, che sarà invece necessariamente minore. Ciò risulta evidente se si considera che, a causa dell'attrito, il blocco si riscalda, e che tale effetto di riscaldamento sta ad indicare la comparsa, nel blocco, di una certa quantità di energia termica (l'energia cinetica associata al moto interno di vibrazione delle molecole): l'energia cinetica originariamente associata al moto macroscopico del blocco non è stata dunque completamente azzerata, una parte di essa di ritrova all'interno del blocco come energia cinetica del moto di vibrazione delle molecole. Esempio numerico: energia cinetica originaria del blocco 100 J, energia termica sviluppata nel blocco durante la fase di rallentamento fino all'arresto 20 J, lavoro della forza d'attrito – 80 J.

2. Si presenta naturalmente un interrogativo: come mai il lavoro della forza d'attrito è inferiore al prodotto forza per spostamento? Evidentemente, questo è uno di quei casi in cui la schematizzazione di corpo rigido non funziona: le forze che, per attrito, sono applicate al blocco, agiscono su zone superficiali il cui moto risulta bruscamente ostacolato con effetti di deformazione locale: le forze d'attrito agiscono cioè su punti il cui moto, rallentato rispetto a quello complessivo del blocco, dà luogo in definitiva a spostamenti inferiori. Potremmo schematizzare la situazione dicendo che la forza d'attrito lavora su una distanza x^* inferiore allo spostamento x subìto dal blocco nel suo insieme.

3. Un discorso analogo può essere fatto per la superficie piana S su cui il blocco scivola. Su S agisce una forza d'attrito uguale e contraria a quella che agisce sul blocco: lo spostamento macroscopico di S è zero, ma il lavoro della forza d'attrito ad essa applicata non può essere zero, deve essere un lavoro *positivo* che renda ragione dell'effetto di riscaldamento subìto da S. Le forze d'attrito agiscono su punti di S che subiscono spostamenti microscopici nella direzione stessa delle forze.

4. Osservazione importante: considerazioni di termodinamica portano a concludere che *il lavoro complessivo delle forze d'attrito tra due superfici a contatto è sempre zero*: perciò il lavoro delle forze d'attrito non modifica l'energia cinetica complessiva delle particelle del sistema, semplicemente la trasferisce dal moto macroscopico d'assieme al moto disordinato di agitazione termica. Ciò vale anche per il caso di una massa fluida che scorre lungo una parete solida, e trova ulteriore giustificazione nel fatto che ciò che chiamiamo «attrito» è in realtà l'effetto globale, macroscopico di un grande numero di interazioni elementari («urti elastici») tra particelle che prima entrano l'una nella sfera d'azione dell'altra e poi ne escono, con un lavoro complessivo uguale a zero.[9]

[9] Sul lavoro delle forze d'attrito radente si veda anche il capitolo 69 («Quanto lavora l'attrito») in G. Tonzig, *100 errori di Fisica* (Maggioli).

10.4 Attrito volvente

1. Spostare un carrello a ruote bloccate è decisamente più faticoso che spostarlo a ruote libere: questo suggerisce l'idea corrente che la resistenza offerta dall'attrito volvente al moto di rotolamento sia di gran lunga inferiore, a parità ovviamente di materiali a contatto e di forza premente, alla forza con cui l'attrito radente riesce a contrastare il moto di strisciamento. In realtà, mentre l'attrito radente contrasta il moto di strisciamento con una forza, l'attrito volvente contrasta il moto di rotolamento con una coppia: e non ha molto senso confrontare una forza con una coppia. Quello che possiamo senz'altro dire è che far rotolare una ruota *applicando ad essa una forza motrice all'altezza del perno* (come avviene nel caso di un carrello, o della ruota anteriore di una bicicletta, o delle ruote di puro appoggio di un qualsiasi veicolo) è in genere molto meno impegnativo che trascinare la ruota in assenza di rotolamento.

2. La resistenza che l'attrito volvente oppone al moto di rotolamento è essenzialmente dovuta al fatto che in corrispondenza della zona di contatto i corpi a contatto si deformano in modo non perfettamente elastico: per cui *non c'è attrito volvente nel caso ideale di corpi rigidi*, così come non ci sarebbe attrito volvente nel caso ideale di corpi perfettamente elastici (quanto meno, nel limite di velocità di rotolamento sufficientemente basse).

3. Un corpo si comporterebbe in modo perfettamente elastico se esistesse una corrispondenza biunivoca tra forza applicata (per produrre la deformazione) e deformazione prodotta: azzerando la forza risulterebbe allora rigorosamente azzerata anche la deformazione, e le variazioni di configurazione si verificherebbero senza alcun effetto concomitante di riscaldamento, e quindi di dispersione energetica. Per alcuni materiali (ferro, acciaio) tutto questo si verifica piuttosto bene fino a che le forze applicate – e le deformazioni prodotte – si mantengono piccole, e precisamente inferiori al *limite di snervamento*. Se tale limite è superato, la deformazione non è più reversibile: il semplice azzeramento della forza applicata non porta più all'azzeramento della deformazione; a uno stesso valore della deformazione possono corrispondere infiniti valori diversi della forza, a seconda di quanto in precedenza si è già verificato in fatto di deformazioni. In generale, *la forza da esercitare è, a parità di deformazione, più grande in fase di aumento che in fase di diminuzione della deformazione* (e lo stesso vale chiaramente per la forza, uguale e contraria, proveniente dal corpo deformato). Questa mancanza di elasticità, o *anelasticità*, è evidente nel caso di materiali come la plastilina, o come la cera, o come il piombo, o come uno strato di sabbia, per i quali nessuna forza è richiesta per mantenere la deformazione, una volta prodotta.

4. Per un corpo che rotola, la non perfetta elasticità dei materiali ha come conseguenza che la distribuzione delle pressioni sulle superfici a contatto non è più simmetrica: *davanti c'è più pressione che dietro*: davanti al piano teorico di simmetria (il piano γ della fig. 5, pag. seguente) c'è, a parità di distanza, una pressione maggiore che dietro. In fig. 5 si suppone che il rotolamento avvenga (o, nel caso statico,

stia per avvenire) verso destra: si suppone inoltre che la deformazione riguardi essenzialmente il piano d'appoggio (ruota d'acciaio su terreno cedevole), ma il discorso potrebbe essere senz'altro riferito anche al caso inverso (ruota di gomma su terreno duro), così come al caso di superfici a contatto entrambe deformate. È chiaro dalla figura che, tanto in condizioni statiche quanto in condizioni di movimento già in atto, l'effetto delle forze di pressione (le forze che la superficie d'appoggio esercita a 90° sulla superficie del corpo appoggiato) è non solo quello di fare equilibrio al peso, ma anche quello di fare contrasto al moto di rotolamento: rispetto all'asse d'istantanea rotazione della ruota (nel caso della figura, l'intersezione K del piano γ col terreno) le forze di pressione (schematizzate in figura con i due vettori $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$) hanno complessivamente un momento diverso da zero. In definitiva, le forze di pressione possono essere ridotte a una forza risultante $\vec{N}$ di sostegno, perpendicolare al piano d'appoggio e indipendente dalla presenza di attrito volvente, più una coppia che contrasta il rotolamento, dovuta all'attrito volvente. Ovviamente la reazione del vincolo può anche includere una forza di attrito radente, parallela alla superficie d'appoggio: questo accade solo quando l'assenza di attrito radente comporterebbe automaticamente un moto di strisciamento.

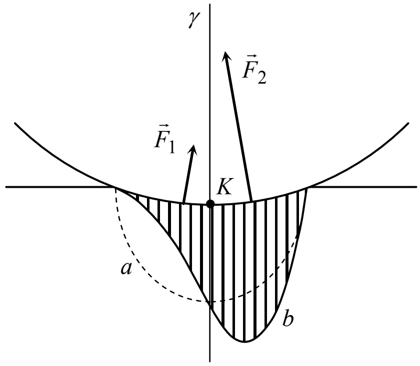

Fig. 5 – *La linea a) mostra la distribuzione delle pressioni sulle superfici a contatto nel caso ideale di deformazione elastica. La linea b) mostra la distribuzione effettiva delle pressioni (rotolamento verso destra)*

5. In realtà, gli effetti di resistenza al moto (e di riscaldamento) che si verificano a rotolamento in atto sono da imputare non solo all'imperfetta elasticità dei materiali, ma anche a piccoli strisciamenti di una superficie sull'altra nella zona di contatto, dovuti alla diversità (inevitabile quando si trovano a contatto materiali diversi, o superfici a curvatura diversa) delle deformazioni tangenziali. Per di più, le particelle materiali della superficie che si deforma oppongono la propria inerzia agli improvvisi spostamenti connessi alla deformazione: il che, come è facile comprendere, rende ancora più grande la forza di pressione che agisce sulla parte anteriore della ruota in rapporto alla forza di pressione che agisce dietro (dove, al limite, la superficie d'appoggio potrebbe perdere il contatto con la superficie che rotola). Più il rotolamento è lento, più sono lente le deformazioni e più sono piccole le accelerazioni richieste alle particelle poste sulle superfici a contatto: l'effetto dell'inerzia diventa allora secondario.

6. L'esperienza mostra in definitiva che, rispetto alla maggior parte delle situazioni concrete, l'effetto dell'attrito volvente può essere schematizzato in questi termini:

(*a*) in condizioni statiche il modulo τ_0 del momento della coppia di contrasto può variare da zero fino a un massimo che si può ritenere proporzionale al valore N della forza con cui le due superfici premono una sull'altra:

[A] $\tau_{0/\max} = \mu_V N$

dove il coefficiente di proporzionalità μ_V (**coefficiente d'attrito volvente**) non dipende in alcun modo dal raggio di rotolamento (ruota grande o piccola) ma solo dalla natura chimico-fisica delle superfici a contatto[10]. È chiaro dalla [A] che, a differenza dei coefficienti d'attrito radente statico e dinamico, il coefficiente d'attrito volvente non è un puro numero, ma una lunghezza.

(*b*) in condizioni dinamiche, alla coppia di contrasto dovuta all'attrito volvente si può attribuire un momento di valore uguale al valore massimo del momento di contrasto statico.

VALORI INDICATIVI DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO VOLVENTE

legno su legno	0,5 mm
ferro su ferro	0,05 mm
sfere d'acciaio nei cuscinetti a sfera	0,005 ÷ 0,01 mm
ruote di vettura su strada	10 ÷ 75 mm

Tabella 2

7. Supponiamo (fig. 6) di applicare a una ruota di raggio R, ferma su un piano orizzontale, una forza motrice orizzontale $\vec{F}$ in corrispondenza del perno (caso della ruota anteriore di una bicicletta). Se ci fosse attrito radente ma non attrito volvente, l'equilibrio della ruota sarebbe impossibile: anche la più debole forza motrice avrebbe momento FR non nullo rispetto all'asse d'istantanea rotazione (che attraversa a 90° il piano della figura in corrispondenza del punto K), e nulla potrebbe contrastare il moto di rotolamento. Analogamente, se ci fosse attrito volvente ma non attrito radente l'equilibrio della ruota sarebbe impossibile: per valori della forza

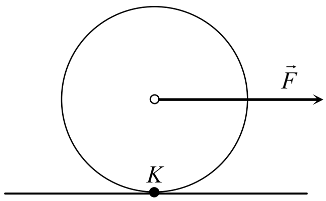

Fig. 6 – *Ruota sottoposta a forza motrice.*

[10] In realtà, il momento di contrasto massimo cresce più rapidamente del carico, perché al crescere del carico crescono le deformazioni e aumentano di conseguenza gli effetti dell'inerzia e della non perfetta elasticità.

motrice $\vec{F}$ insufficienti a vincere il contrasto della coppia d'attrito volvente, la ruota traslerebbe nella direzione di $\vec{F}$ senza incontrare alcuna resistenza.

8. Le condizioni per l'equilibrio della ruota sono quindi due:

[B] $F \leq \mu_0 N$

[C] $FR \leq \mu_V N.$

Se è verificata la [B] la ruota non può traslare. Se è verificata la [C] la ruota non può girare. Se è verificata la più restrittiva tra le due condizioni, l'equilibrio è senz'altro possibile. Se, come in genere accade, è verificata la [B] ma non la [C], la ruota entra in rotazione senza strisciare; se fosse verificata la [C] ma non la [B], la ruota comincerebbe a strisciare senza ruotare.

9. Si noti che, a norma della [C], a parità di forza premente e di superfici a contatto (quindi di coefficiente μ_V) *la forza capace di produrre il moto di rotolamento è tanto più grande quanto più piccolo è il raggio*. Se R diventa molto piccolo, la forza da applicare ad altezza R per produrre il rotolamento diventa molto grande: la [C] può allora diventare meno restrittiva della [B], produrre il moto di rotolamento può diventare più impegnativo che produrre il moto di traslazione.

10. Un discorso analogo vale per il caso dinamico. In assenza di attrito volvente, la velocità di avanzamento di una ruota che rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale, soggetta solo al proprio peso e alla reazione del vincolo, si manterrebbe costante (non dovendo contrastare alcun moto di strisciamento, l'attrito radente non si manifesterebbe). A causa invece dell'attrito volvente, per mantenere costante la velocità della ruota occorre che alla ruota venga applicato, tramite l'asse a cui è fissata, o un momento motore uguale al momento di contrasto dinamico $\mu_v N$ (caso delle ruote motrici, come la ruota posteriore della bicicletta), oppure (caso delle ruote d'appoggio) occorrerà applicare al perno della ruota una forza motrice orizzontale $\vec{F}$ (cfr. fig. 6, pagina precedente), di valore $F = \mu_v N/R$.

11. Si noti che su un corpo che rotola l'attrito volvente, a differenza dell'attrito radente, agisce *sempre e solo* nel senso di contrastare il moto di rotolamento: sia in discesa (dove invece l'attrito radente favorisce il rotolamento), sia in orizzontale (dove nel caso di puro rotolamento l'attrito radente non agisce), sia in salita (dove anche l'attrito radente contrasta il rotolamento).

QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

1 L’attrito radente si manifesta quando un corpo striscia, l’attrito volvente quando un corpo rotola (*vero*/*falso*).

2 Una pallina scende rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato. L’attrito che produce il rotolamento deve considerarsi statico o dinamico?

3 Un blocco K di 20 kg è immobile su un piano orizzontale, soggetto solo al peso e alla reazione del piano d’appoggio: il coefficiente d’attrito statico tra le superfici a contatto è $\mu_0 = 0{,}4$. Si determini:
(*a*) la forza d’attrito sul blocco,
(*b*) il massimo valore di una forza orizzontale sul blocco se vogliamo che l’equilibrio non sia compromesso,
(*c*) il valore della forza d’attrito se al blocco viene applicata una forza orizzontale di 5 kg.

4 La forza d’attrito statico tra due superfici assegnate può teoricamente raggiungere valori grandi a piacere (*vero*/*falso*).

5 Un blocco di massa 60 kg è appoggiato sul pavimento di un ascensore. Trovare il massimo valore per la forza di attrito statico (coefficiente $\mu_0 = 0{,}5$):
(*a*) quando l’ascensore viaggia con velocità costante,
(*b*) quando l’accelerazione dell’ascensore è $a = (9{,}81/5)$ m/s^2 verso l’alto (o verso il basso).

6 Un blocco è soggetto solo al peso e alla reazione di un piano d’appoggio. Sapendo che il blocco resta in equilibrio fino a che l’angolo θ del piano d’appoggio sul piano orizzontale non supera i 34°, si determini il coefficiente d’attrito statico tre le due superfici a contatto.

7 Nella stessa situazione della domanda precedente, come si potrebbe determinare il coefficiente d’attrito cinetico in base all’inclinazione del piano?

8 *(*a*) In che direzione agisce sulle ruote la forza d’attrito radente alla partenza di un’automobile? (*b*) In che direzione, se l’automobilista toglie gas? (*c*) In che direzione, se l’automobilista frena? (*d*) Per quale ragione in una frenata a ruote bloccate lo spazio d’arresto può risultare più grande?

9 Una sfera è costituita per metà di sughero, per metà d’ottone. Supponiamo di tenere in equilibrio la sfera su un piano orizzontale in modo che il piano di separazione delle due semisfere risulti verticale. Se lasciamo andare la sfera, come si muoverebbe il suo baricentro in assenza di attrito?

10 Dovendo calcolare la forza d’attrito dinamico su un corpo di peso P che scivola su una superficie concava (fig. 7), uno studente ha moltiplicato il componente P_n del peso sulla normale alla superficie d’appoggio per il coefficiente d’attrito radente dinamico. Quale errore ha commesso?

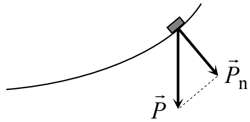

Fig. 7

11 Le forze d’attrito possono compiere solo lavoro resistente (*vero*/*falso*).

12 Se un corpo K, soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, scivola in linea retta da A a B lungo un piano inclinato, il lavoro compiuto dalla forza d'attrito radente 'sul centro di massa' (cfr. pag. 183 e 184) dipende solo dalla distanza orizzontale d tra A e B, non dal dislivello h tra i due punti (*vero*/*falso*).

13 Sulla ruota di una carriola, di raggio $R = 20$ cm, grava un carico di 50 kg. Il coefficiente d'attrito radente statico tra ruota e terreno è $\mu_0 = 0{,}7$, il coefficiente d'attrito volvente è $\mu_v = 6$ mm.
(*a*) Quale forza orizzontale minima occorre venga applicata dal perno alla ruota per produrne il moto di rotolamento?
(*b*) Quale sarebbe la risposta se la ruota avesse un diametro di 10 cm?
(*c*) Se, per qualche motivo, la ruota non potesse girare, quale sarebbe la forza minima capace di produrne il moto di strisciamento?

14 Un blocco K di 20 kg è immobile su un piano orizzontale, soggetto al peso e alla reazione del piano d'appoggio: il coefficiente d'attrito statico tra le superfici a contatto è $\mu_0 = 0{,}4$.
(*a*) Se al blocco viene applicata una forza $\vec{F}$ inclinata rispetto al piano orizzontale di 30° verso il basso, qual è il massimo valore che, senza pregiudizio dell'equilibrio, può assumere $\vec{F}$?
(*b*) * A quale valore minimo può scendere, facendone variare l'inclinazione, la forza capace di mettere il blocco in movimento?

15 Un blocco scivola sul pavimento percorrendo 240 cm in 1 s prima di arrestarsi. Quanto vale il coefficiente di attrito radente tra blocco e pavimento?

16 (*a*) Si osserva che un piccolo blocco K si può mantenere aderente alla parete interna di un contenitore cilindrico (asse verticale, raggio $R = 30$ cm) senza scivolare sul fondo, purché il cilindro ruoti attorno al proprio asse con velocità angolare sufficientemente elevata. Come mai?
(*b*) Se K è soggetto solo al peso e alla reazione del vincolo, e se il coefficiente d'attrito radente statico tra blocco e superficie interna del cilindro è $\mu_0 = 0{,}20$, qual è la velocità di rotazione necessaria?

17 * Un blocco di massa 12 kg è in quiete su una superficie piana S inclinata di 30° sul piano orizzontale. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu_0 = = 0{,}64$, determinare quale forza minima occorre applicare al blocco parallelamente ad S per mettere in movimento il blocco (*a*) verso il basso, (*b*) verso l'alto, (*c*) in direzione orizzontale, (*d*) con una forza orizzontale.

18 Alcuni blocchi, di peso diverso ma di uguale materiale, sono in equilibrio su un piano inclinato (la cui superficie ha uguali caratteristiche chimico-fisiche in ogni punto). Al crescere dell'inclinazione del piano, finché un blocco è in equilibrio anche tutti gli altri sono in equilibrio, quando un blocco comincia a scivolare anche gli altri fanno lo stesso. Se poi l'inclinazione del piano viene ridotta in modo tale che la velocità di un blocco si mantiene costante, anche tutti gli altri blocchi scivolano con velocità costante. Spiegare.

19 Dopo aver percorso ruotando senza strisciare un tratto orizzontale, una pallina inizia la risalita di un piano inclinato. Arriverà più in alto in assenza oppure in presenza di attrito radente? Nel secondo caso, si faccia l'ipotesi che l'attrito sia abbastanza grande da impedire ogni strisciamento.

20 Un blocco A di massa $m_A = 30$ kg appoggia senza attrito su un piano orizzontale (fig. 8). Sul blocco A è appoggiato un blocco B di massa $m_B = 10$ kg. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico tra i due blocchi è $\mu_0 = 0{,}2$, si determini il minimo valore che deve assumere una forza orizzontale applicata al blocco A se vogliamo che il blocco B scivoli all'indietro su di esso.

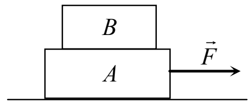

Fig. 8

21 * Un uomo sta salendo su una scala a pioli appoggiata al muro. Supponendo che la scala abbia peso trascurabile e che il coefficiente d'attrito tra scala e parete sia lo stesso che tra scala e pavimento, si determini la massima altezza a cui può giungere l'uomo senza che la scala scivoli.

22 * Una forza orizzontale $\vec{F}$ di valore via via più grande è applicata (fig. 9) al centro O del cerchio che delimita una semisfera omogenea di raggio R appoggiata su una superficie piana orizzontale. Si determini quale valore massimo può assumere - l'angolo θ (la distanza del baricentro da O è $3R/8$).

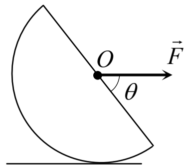

Fig. 9

23 * Un blocchetto K è a contatto di un cuneo C che può scivolare in direzione orizzontale (fig. 10). Considerando sia il caso di assenza di attrito che il caso contrario, si chiarisca come deve muoversi C se vogliamo che K (che è soggetto solo al peso e alla forza proveniente da C) si mantenga immobile rispetto a C.

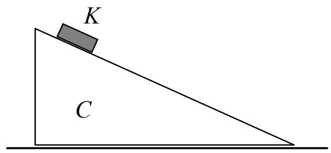

Fig. 10

24 * Si vuole che un blocchetto, appoggiato (fig. 11) sulla superficie interna di un cono di semiapertura θ), risulti immobile rispetto al cono mentre questi ruota attorno al proprio asse geometrico con una data velocità angolare ω. Determinare quali valori può assumere, in assenza e in presenza di attrito, la distanza r del blocchetto dall'asse del cono.

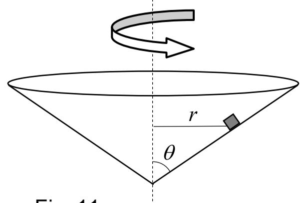

Fig. 11

25 * Cilindro (o sfera) su piano inclinato: determinare la massima pendenza compatibile con un moto di puro rotolamento (con partenza da fermo).

26 * Si consideri un'automobile di massa 1200 kg. Posto che il coefficiente d'attrito radente statico tra ruote e terreno sia $\mu_0 = 1$, che il coefficiente d'attrito volvente

sia $\mu_v = 15$ mm e che il raggio delle ruote sia $R = 30$ cm, si determini quale forza occorrerebbe applicare alla macchina per metterla in movimento:

(*a*) a ruote bloccate, in presenza di attrito radente,
(*b*) a ruote libere, in presenza di attrito volvente ma non di attrito radente,
(*c*) a ruote libere, in presenza di attrito radente ma non di attrito volvente,
(*d*) a ruote libere, in presenza di attrito sia radente che volvente.

27 Si spieghi se è teoricamente possibile che la forza necessaria per trascinare a velocità costante un'automobile a ruote bloccate risulti inferiore alla forza da applicare complessivamente alle ruote per mantenere costante la velocità della macchina a ruote libere.

28 Con riferimento alla fig. 6 di pag. 203 (forza motrice applicata ad altezza *R*), si spieghi se la presenza di attrito volvente aumenta o diminuisce il rischio di slittamento della ruota sul terreno.

29 Si consideri una ruota (ad esempio, la ruota posteriore della bicicletta) a cui viene applicata una coppia motrice di momento τ, e si spieghi se la presenza di attrito volvente aumenta o diminuisce il rischio di slittamento della ruota sul terreno.

SOLUZIONI

1 Falso: quando un corpo rotola c'è sempre attrito volvente (salvo il caso teorico di corpi rigidi o di corpi perfettamente elastici), ma c'è anche attrito radente se questo serve a contrastare lo strisciamento di una superficie sull'altra. Ad esempio, se una pallina viene posta su un piano inclinato e poi abbandonata a sé stessa (fig. 1), in assenza di attrito radente scivolerebbe verso il basso senza ruotare (il peso e la reazione del vincolo, perpendicolare al piano per l'assenza di attrito, avrebbero entrambi momento zero rispetto al centro della sfera): il rotolamento con velocità angolare via via più grande è prodotto dalla forza $\vec{A}$ d'attrito radente (e contrastato dall'eventuale attrito volvente). Altro esempio: se una palla da biliardo viene colpita a mezza altezza, per effetto dell'attrito radente che ne contrasta il moto di scivolamento incomincia a rotolare perdendo velocità. Quando la velocità v di avanzamento è diminuita e la velocità ω di rotazione aumentata fino a che la relazione $\omega = = v/R$ è soddisfatta, non c'è più alcuno strisciamento da contrastare, e l'attrito radente non agisce più.

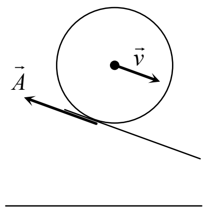

Fig. 1

2 Il rotolamento è prodotto dall'attrito radente, e dato che non si verificano strisciamenti *si tratta di attrito statico*: la forza d'attrito è applicata a punti che hanno velocità zero.

3 (*a*) Zero: non c'è alcun moto di scivolamento da contrastare.
(*b*) È uguale al massimo valore della forza d'attrito radente statico: $A_{0/\max} = = \mu_0 N = (0{,}4\times 20)\ \text{kg} = 8\ \text{kg}$.

(c) 5 kg.

4 Vero, nel limite di resistenza meccanica delle superfici e nel limite di validità delle leggi empiriche dell'attrito. Basta aumentare convenientemente il valore della forza con cui le due superfici premono l'una sull'altra.

5 (a) Velocità costante: la forza N con cui le due superfici premono una sull'altra è uguale al peso P del blocco, 60 kg. Ne consegue che è $A_{0/\max} = \mu_0 N = 0{,}5 \times \times\ 60$ kg $=$ 30 kg.

(b) Accelerazione verso l'alto: la spinta del pavimento dell'ascensore sul blocco è $(6/5)P$, per cui $A_{0/\max} = \mu_0\,(6/5)P = 0{,}5\times(6/5)\times 60$ kg $=$ 36 kg. Accelerazione verso il basso: la spinta del pavimento sul blocco è $(4/5)P$, e quindi $A_{0/\max} =$ $= \mu_0(4/5)P = 0{,}5\times(4/5)\times 60$ kg $=$ 24 kg.

6 Se il blocco è in equilibrio, la forza d'attrito è uguale in valore (e opposta in direzione) al componente tangenziale del peso: $A_0 = P\,\mathrm{sen}\theta$. Se poi il blocco è al limite dell'equilibrio, la forza d'attrito ha il massimo valore possibile per quella data inclinazione: $A_0 = A_{0/\max} = \mu_0 P\cos\theta$. Facendo sistema delle due relazioni scritte si ottiene $\mu_0 = \mathrm{tg}\theta$, e nel nostro caso $\mu_0 =$ tg 34° $=$ 0,67.

7 Trovando per tentativi l'inclinazione θ che permette al blocco di scivolare verso il basso con velocità costante. In tali condizioni $A = P\,\mathrm{sen}\theta$, ed essendo anche $A = \mu N = \mu P\cos\theta$, si ottiene $\mu = \mathrm{tg}\theta$. Si noti che, essendo in generale $\mu < \mu_0$, l'inclinazione che permette una velocità di scivolamento costante è inferiore a quella per la quale il blocco è al limite dell'equilibrio.

8 (a) In assenza di attrito sul terreno, le ruote motrici (collegate al motore) girerebbero a vuoto, mentre le ruote d'appoggio resterebbero immobili. L'attrito contrasta lo strisciamento delle ruote motrici agendo in avanti (di qui l'accelerazione in avanti della macchina), e lo strisciamento delle ruote d'appoggio agendo su di esse all'indietro (il che ne determina il rotolamento).

(b) Quando l'automobilista toglie gas la macchina rallenta: in assenza di attrito le ruote d'appoggio tenderebbero a conservare la propria velocità di rotazione, mentre la velocità di rotazione delle ruote motrici diminuirebbe bruscamente insieme alla velocità di rotazione del motore. Le une e le altre quindi striscerebbero sul terreno: la forza d'attrito agisce in avanti sulle ruote d'appoggio costringendole a girare meno rapidamente, e all'indietro sulle ruote motrici costringendole a girare più rapidamente.

(c) In assenza di attrito tra gomme e terreno, i freni bloccherebbero le quattro ruote azzerandone bruscamente il moto di rotazione, e la macchina scivolerebbe senza venire in alcun modo rallentata. Le forze d'attrito tra gomme e terreno contrastano tale scivolamento, agendo in direzione opposta alla direzione di marcia: tendono cioè a far girare le ruote in avanti mantenendone il moto di rotazione.

(d) Se la frenata non è troppo violenta in rapporto alle condizioni delle gomme e del terreno, le forze d'attrito sono abbastanza grandi da impedire del tutto lo scivolamento, costringendo le ruote a girare con la velocità angolare ($\omega = v/R$, dove v è la velocità della macchina) di un moto di puro rotolamento: in tal caso la macchina è rallentata dalle forze d'attrito statico che, al limite, possono raggiungere il proprio valore massimo $\mu_0 N$. Se però la frenata è troppo brusca, le forze d'attrito non sono abbastanza grandi da riuscire a impedire del tutto lo scivolamento: le ruote quindi girano ma insieme scivolano (e al limite si bloccano e scivolano senza più girare), cosicché in questo caso sono le forze d'attrito dinamico – di valore inferiore al valore massimo delle forze d'attrito statico – a decelerare la macchina.

9 Per la mancanza di attrito, la forza proveniente dal piano d'appoggio sarebbe verticale come il peso della sfera (fig. 2): essendo perciò verticale la forza risultante sulla sfera, il baricentro G cadrebbe verso il basso lungo una retta verticale e la sfera ruoterebbe attorno a G scivolando fino ad avere il punto d'appoggio al di sotto del baricentro (possibile posizione di equilibrio stabile). Il moto proseguirebbe poi per inerzia – come quello di un pendolo – verso la posizione simmetrica di quella iniziale, e in definitiva il baricentro oscillerebbe su e giù sulla verticale condotta per la sua posizione iniziale.

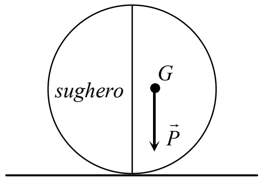

Fig. 2

10 Il coefficiente d'attrito deve essere moltiplicato non per la forza P_n, ma per la forza con cui le due superfici a contatto premono l'una sull'altra. Tale forza è in questo caso uguale a $P_n + mv^2/R$, dove m è la massa del blocchetto, v la sua velocità, R il raggio di curvatura della superficie d'appoggio nel punto in cui si trova il blocchetto.

11 Falso: le forze d'attrito radente *contrastano sempre* il moto relativo di scivolamento di una superficie sull'altra, e proprio per questo possono anche compiere lavoro positivo. Se, ad esempio, solleviamo dal tavolo una bottiglia, la forza d'attrito esercitata verso l'alto dalla mano sul vetro è applicata a punti che si spostano verso l'alto, e compie pertanto un lavoro positivo.

12 Vero. Per la mancanza di curvatura nella traiettoria del corpo K (forza trasversale su K uguale a zero), la forza con cui le due superfici a contatto premono una sull'altra è uguale al componente trasversale del peso del blocco. Perciò la forza d'attrito è $\mu P \cos\varphi$ e il relativo lavoro, calcolato sullo spostamento del centro di massa tra A e B (fig. 3), è $W = (\mu P \cos\varphi)L = \mu P d$. Il ragionamento *non potrebbe essere applicato* nel caso di traiettoria non rettilinea.

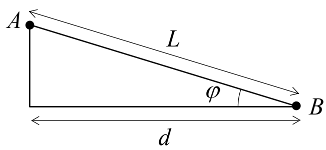

Fig. 3

13 (*a*) Rispetto al punto di contatto sul terreno, il momento della forza applicata deve essere superiore al momento massimo τ_{max} della coppia d'attrito volvente:
$FR > \tau_{max} = \mu_v N$.
Tenuto conto che $R = 20$ cm, $\mu_v = 6$ mm e $N = 50$ kg, si ottiene
$F > 1{,}5$ kg.
(*b*) Dovendo essere $FR > \mu_v N$, se il diametro della ruota venisse dimezzato il valore della forza minima risulterebbe doppio.

(c) Se la ruota non potesse girare la forza da applicare sarebbe $F > \mu_0 N = 0{,}7 \times 50\ \text{kg} = 35\ \text{kg}$.

14 (a) Al limite dell'equilibrio (fig. 4), risulta $F\cos 30° = A_{0/\max} = \mu_0(F\,\text{sen}30° + P)$, da cui, essendo $\mu_0 = 0{,}4$, deriva $F \leq 0{,}601\,P$.

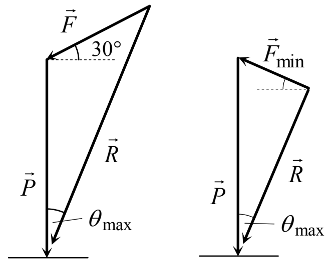

Fig. 4 Fig. 5

(b) Il limite che deve essere superato è dato dalla più piccola tra tutte le forze che sommate al peso $\vec{P}$ del blocco danno una forza risultante inclinata di $\theta_{\max} = \text{arctg}\,\mu_0 = 21{,}8°$ sulla normale. Come la fig. 5 chiarisce, tale forza limite è a sua volta inclinata verso l'alto di $\theta_{\max} = 21{,}8°$, e il suo valore è quindi
$P\,\text{sen}\theta_{\max} = 20\,\text{kg} \times \text{sen}\,21{,}8° = 7{,}43\ \text{kg}$.[11]

15 La forza d'attrito dinamico è $\mu m g$, costante, controversa alla velocità: l'accelerazione scalare del blocco è quindi $a = -\mu g < 0$. Nel tempo $T = 0{,}8$ s la velocità diminuisce linearmente fino a zero: $0 = v_0 + aT$, da cui $v_0 = -aT$ (valore positivo, essendo a negativa). La distanza percorsa è $d = v_0 T + \dfrac{a}{2}T^2 = = (-aT)T + \dfrac{a}{2}T^2 = -\dfrac{a}{2}T^2$. Pertanto $a = -2d/T^2$, da cui, essendo $a = -\mu g$, si trae $\mu = 2d/(gT^2) = (2 \times 2{,}40)/(9{,}81 \times 1^2) = 0{,}49$.

16 (a) Se K non scivola lungo la parete del cilindro è perché il suo peso è neutralizzato dalla forza $\vec{A}_0$ di attrito radente statico, che agisce su K per il fatto che il cilindro preme su K esercitando su di esso la forza centripeta $m\omega^2 R$.
(b) Per l'equilibrio di K occorre che il peso P non superi la massima forza d'attrito statico. Tenuto conto che la forza premente è $N = m\omega^2 R$, deve essere
$P = mg \leq A_{0/\max} = \mu_0 m\omega^2 R$, vale a dire

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_0 R}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{0{,}20 \times 0{,}30\,\text{m}}} = 12{,}8\ \text{rad/s} = 122\ \text{giri/min}.$$

17 La forza premente è uguale al componente del peso sulla normale al piano d'appoggio: $N = P\cos 30° = P\sqrt{3}/2$. La forza d'attrito statico massima è quindi $A_{0/\max} = \mu_0 P\sqrt{3}/2 = 0{,}64 \times 12\ \text{kg} \times \sqrt{3}/2 = 6{,}65\ \text{kg}$. Tenuto conto che il componente $\vec{P}_{\text{tg}}$ del peso sul piano d'appoggio vale $P\,\text{sen}30° = 12\ \text{kg} \times \times 0{,}5 = 6\ \text{kg}$, si desume che la forza applicata deve rispettivamente essere:

[11] Si poteva anche procedere per via matematica, tenendo presente che al limite dell'equilibrio è $F\cos\theta = A_{0/\max} = \mu_0(P + F\,\text{sen}\theta)$, annullando la derivata prima di F rispetto a θ e verificando che per $\text{tg}\theta = -\mu_0$ la derivata seconda di F è positiva.

(a) $F > A_{0/\max} - P_{tg} = (6{,}65 - 6)\ \text{kg} = 0{,}65\ \text{kg}$.
(b) $F > A_{0/\max} + P_{tg} = (6{,}65 + 6)\ \text{kg} = 12{,}65\ \text{kg}$.
(c) $F > \sqrt{P_{tg}^2 + A_{0/\max}^2} = \sqrt{6^2 + 6{,}65^2}\ \text{kg} =$
$= 8{,}96\ \text{kg}$. La forza $\vec{R}$ che complessivamente agisce sul blocco deve infatti avere direzione orizzontale (fig. 6) e valore $> A_{0/\max} = 6{,}65$ kg, perciò la forza $\vec{F}$ da applicare ha un componente parallelo al piano uguale e contrario a $\vec{P}_{tg}$ e un componente orizzontale di valore superiore ad $A_{0/\max}$.

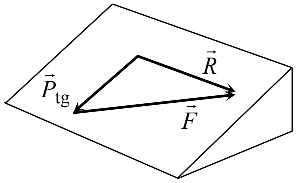

Fig. 6

(d) $F > \sqrt{6{,}65^2 - 6^2} = 2{,}87\ \text{kg}$. In tal modo la somma $\vec{R}$ di tale forza e di $\vec{P}_{tg}$ (fig. 7) è maggiore di $A_{0/\max} = 66{,}5$ kg.

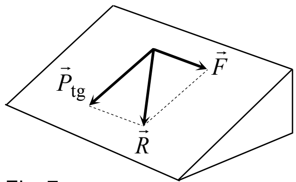

Fig. 7

18 L'equilibrio è al limite quando il piano inclinato forma col piano orizzontale un angolo $\varphi = \text{arctg}\,\mu_0$, dipendente solo da μ_0 e quindi uguale per tutti i blocchi (vedi domanda 6, pag.205). La velocità di scivolamento è costante quando l'angolo è $\theta = \text{arctg}\,\mu$, dipendente solo da μ e quindi uguale per tutti i blocchi (vedi domanda 7).

19 In assenza di attrito la velocità angolare non può cambiare (le forze applicate, peso e reazione del vincolo, hanno momento zero rispetto al centro di massa): perciò durante la risalita il lavoro resistente del peso deve azzerare solo l'energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2}Mv^2$. In presenza invece di sufficiente attrito (puro rotolamento) viene annullata *tutta* l'energia cinetica, pari a $0{,}75\,Mv^2$ (vedi risp. 30 a pag. 386). Durante la risalita il peso compie quindi un lavoro resistente del 50 % superiore a prima, il che significa che in presenza di attrito l'altezza raggiunta dalla pallina è del 50% superiore.

20 La forza di attrito statico massima tra i due blocchi è $\mu m_B g$, quindi la massima accelerazione per il blocco B è μg. Perché tutto il sistema abbia tale accelerazione deve essere $F = (m_A + m_B)\mu g = (30\ \text{kg} + 10\ \text{kg}) \times 0{,}2 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 78{,}5\ \text{N}$. Per valori superiori della forza applicata, il centro di massa del sistema ha un'accelerazione superiore a quella del blocco B, il che significa che B resta indietro rispetto ad A.

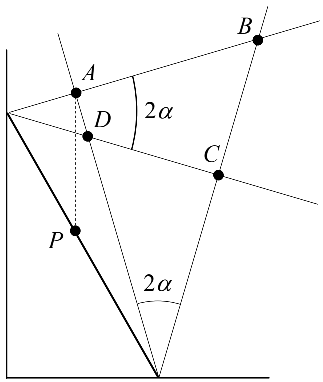

Fig. 8

21 Schematicamente, la scala (fig. 8) è soggetta a tre forze: quella proveniente dal pavimento, quella proveniente dalla parete e quella prove-

niente dall'uomo (uguale, finché c'è equilibrio, al peso dell'uomo[12]). Delle prime due sappiamo che possono avere una certa inclinazione massima α (con tgα uguale al coefficiente d'attrito statico μ_0) rispetto alla normale alla superficie, e che quindi agiscono lungo una retta compresa entro un angolo 2α. Perciò le rette d'azione di tali forze si incontreranno in un punto posto entro l'area $ABCD$. L'equilibrio della scala richiede che per tale punto passi anche la retta d'azione della terza forza, e quindi del peso dell'uomo[13]: pertanto, la posizione limite per l'uomo sulla scala è la posizione P posta al di sotto del punto A. Se la scala è tangente al cono d'attrito uscente dal punto d'appoggio inferiore, l'uomo può salire fino in cima (e a maggior ragione questo è possibile se l'inclinazione della scala sulla verticale è inferiore). Nota: se l'uomo si ferma in una posizione K che precede la posizione limite, qualunque punto posto all'interno del trapezio $ABCD$ sulla verticale per K può essere il punto di convergenza delle due reazioni vincolari, le quali restano pertanto indeterminate in direzione e valore: il problema non può essere risolto con la statica del corpo rigido.

22 Rappresentiamo il peso, come è sempre legittimo nei problemi di statica del corpo rigido, come una forza $\vec{P}$ applicata nel baricentro G (fig. 9). Per l'equilibrio rispetto alla direzione orizzontale, la forza $\vec{F}$ ha lo stesso valore della forza d'attrito A_0. Per l'equilibrio alla rotazione attorno al punto d'appoggio C, è $Pd\,\mathrm{sen}\theta = FR = A_0R$. Se siamo al limite dell'equilibrio, $A_0 = A_{0/\max} = \mu_0 P$, e quindi $Pd\,\mathrm{sen}\theta = \mu_0 PR$. In tal caso dunque $\mathrm{sen}\theta = = \mu_0 R/d = 8\mu_0/3$, indipendentemente dal raggio della semisfera e dal suo peso. Essendo $\mathrm{sen}\theta \le 1$, questo risultato è valido solo per $8\mu_0/3 \le 1$, cioè per $\mu_0 \le 3/8$. Se $\mu_0 = 3/8$ il valore limite per θ è 90° (in tal caso $F = A_{0/\max} = 3P/8$). Naturalmente $\theta = 90°$ è una possibile posizione di equilibrio anche se $\mu_0 > 3/8$, con la differenza che in tale eventualità la forza d'attrito statico non raggiunge il suo valore massimo. L'equilibrio è possibile anche per $\theta > 90°$, con valori di F inferiori a $3P/8$. Il massimo valore che θ può assumere in condizioni di equilibrio è quello in corrispondenza del quale la verticale condotta per il baricentro passa dal punto d'appoggio C: nel qual caso l'equilibrio richiede che sia $F = 0$.

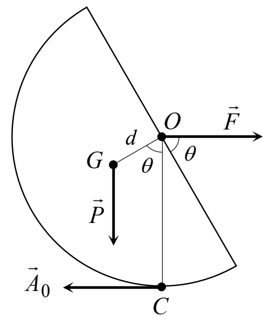

Fig. 9

[12] Se l'uomo è in equilibrio (*e solo in tal caso*), la forza della scala sull'uomo (uguale in modulo alla forza dell'uomo sulla scala) è uguale e contraria all'altra forza agente sull'uomo, il suo peso.

[13] La somma dei momenti delle tre forze rispetto a un punto qualsiasi (in particolare, rispetto al punto d'intersezione delle due reazioni vincolari) deve infatti essere zero.

23 (a) Assenza di attrito. Su K agisce una forza verticale (il peso $\vec{P}$) e una forza (la reazione del vincolo $\vec{V}$) ortogonale alla superficie d'appoggio (fig. 10). Avendo le due forze direzione diversa, la risultante è sicuramente diversa da zero, il che significa che il moto rettilineo orizzontale che vogliamo osservare per K non può essere uniforme. D'altra parte, se K si mantiene immobile rispetto a C la sua velocità verticale è costantemente zero, quindi è zero il componente verticale della forza risultante, cioè $V\cos\varphi = mg$. Ma allora la forza orizzontale è $V\text{sen}\varphi = = (mg/\cos\varphi)\text{sen}\,\varphi = mg\,\text{tg}\,\varphi$ (con direzione verso destra) e quindi K ha (come il cuneo, rispetto al quale è immobile) accelerazione orizzontale $\vec{a}$ diretta verso destra di valore $g\,\text{tg}\varphi$. La velocità del cuneo potrebbe essere diretta sia verso destra, con valori in aumento, che verso sinistra, con valori in diminuzione. Chiaramente, nella condizioni di accelerazione ora precisate la velocità verticale di K potrebbe anche mantenere un valore costante *diverso* da zero: rispetto al cuneo il blocco potrebbe cioè muoversi di moto uniforme, nel senso della salita come nel senso della discesa (si veda anche il problema 7 a pag. 232).

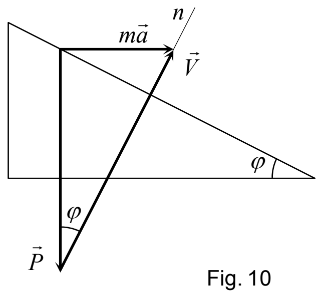

Fig. 10

(b) Presenza di attrito. La reazione $\vec{V}$ del vincolo può formare con la normale al piano inclinato un angolo massimo θ_{max} definito da $\text{tg}\,\theta_{max} = \mu_0$. Come sopra, se la velocità verticale di K è zero la forza risultante sul blocco $m\vec{a} = \vec{P}+\vec{V}$ è orizzontale. La fig. 11 chiarisce che l'accelerazione dei due corpi a contatto può variare da

$a_{min} = g\,\text{tg}(\varphi - \theta_{max})$ fino a

$a_{max} = g\,\text{tg}(\varphi + \theta_{max})$.

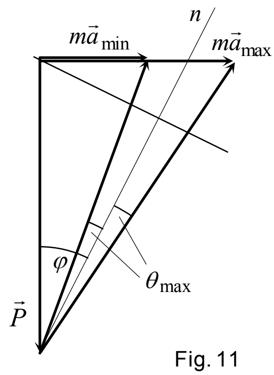

Fig. 11

24 Se vogliamo che il blocchetto percorra una circonferenza di raggio r con velocità angolare ω, il peso $\vec{P}$ e la reazione $\vec{V}$ del vincolo devono avere come somma una forza di valore $m\omega^2 r$ diretta orizzontalmente verso il centro della circonferenza. La forza $\vec{V}$ è perpendicolare alla superficie del cono se non c'è attrito, mentre in presenza di attrito può formare con tale direzione un angolo non più grande di $\varphi_{max} = = \text{arctg}\,\mu_0$. In assenza di attrito la situazione si presenta quindi come in fig. 12: si vede che risulta $\text{tg}\theta = g/(\omega^2 r)$, per cui è $r = g/(\omega^2\,\text{tg}\,\theta)$.

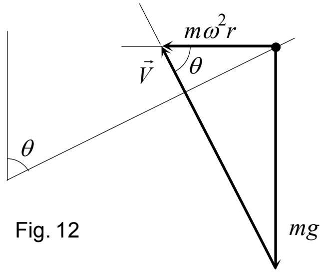

Fig. 12

In presenza di attrito la situazione si presenta invece come in fig. 13: risulta
$\mathrm{tg}(\theta+\varphi_{\max}) = g/(\omega^2 r_{\min})$
$\mathrm{tg}(\theta-\varphi_{\max}) = g/(\omega^2 r_{\max})$.
Il valore di r può pertanto variare tra
$r_{\min} = g/\omega^2\,\mathrm{tg}(\theta+\varphi_{\max})$ e
$r_{\max} = g/\omega^2\,\mathrm{tg}(\theta-\varphi_{\max})$.

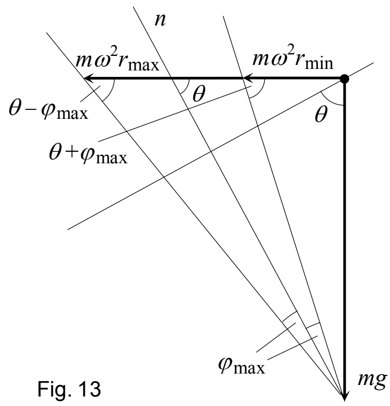

Fig. 13

25 Sia φ l'angolo tra piano inclinato e piano orizzontale. In precedenza (risp. 33 del cap. 9) si è trovato che per un cilindro omogeneo la forza d'attrito radente necessaria per un moto di puro rotolamento è $(1/3)P\,\mathrm{sen}\varphi$, tanto più grande quanto maggiore è la pendenza. D'altra parte, la forza d'attrito può tutt'al più raggiungere il valore $\mu_0 P\cos\varphi$, tanto più piccolo quanto maggiore è la pendenza. Chiaramente, il moto di rotolamento è possibile se la forza d'attrito necessaria non supera il massimo valore della forza d'attrito disponibile: $(P/3)\,\mathrm{sen}\varphi \le \mu_0 P\cos\varphi$, il che significa $\varphi_{\max} = \mathrm{arctg}\,3\mu_0$.

Per una sfera la forza d'attrito necessaria a un moto di puro rotolamento risultava (risp. 34, pag. 387) un po' minore: $(2/7)P\,\mathrm{sen}\varphi$. Dovendo evidentemente essere $(2/7)P\,\mathrm{sen}\varphi \le \mu_0 P\cos\varphi$, si deduce che è $\varphi_{\max} = \mathrm{arctg}\,3{,}5\mu_0$.

Supponiamo ad esempio che sia $\mu_0 = 1$ (gomma su asfalto asciutto). In tale specifico caso: (*a*) per evitare un moto traslatorio di scivolamento (si pensi a un'automobile a ruote bloccate) su un piano avente inclinazione φ occorre che sia $\mathrm{tg}\varphi \le \mu_0 = 1$ ($\varphi \le 45°$); (*b*) per evitare che un cilindro scivoli mentre rotola occorre che sia $\mathrm{tg}\,\varphi \le 3\mu_0 = 3$ ($\varphi \le 71{,}6°$); (*c*) per evitare che una sfera scivoli mentre rotola occorre che sia $\mathrm{tg}\,\varphi \le 3{,}5\mu_0 = 3{,}5$ ($\varphi \le 74{,}1°$).

26 (*a*) Una forza superiore alla massima possibile forza di attrito radente statico $A_{0/\max} = \mu_0 P = 1\times 1200$ kg $= 1200$ kg.

(*b*) Qualsiasi forza: le ruote traslerebbero senza incontrare alcuna resistenza. L'attrito volvente non avrebbe modo di manifestarsi.

(*c*) Qualsiasi forza: il rotolamento delle ruote (determinato dal fatto che l'attrito radente impedisce lo strisciamento delle gomme sul terreno) non incontrerebbe alcuna resistenza.

(*d*) Supponiamo, per semplicità, che il peso P e la forza F si ripartiscano equamente sulle quattro ruote. In tal caso la risposta è: qualsiasi forza F per cui risulti $(F/4)R > \mu_v(P/4)$, vale a dire
$F > \mu_v P/R = (15\times 10^{-3}\ \mathrm{m})\times(1200\ \mathrm{kg})/(30\times 10^{-2}\ \mathrm{m}) = 60\ \mathrm{kg}$.
Si noti che il valore limite così ottenuto è 20 volte inferiore a quello ottenuto alla risposta (*a*): il vantaggio che può essere offerto dalla ruota è palese.

27 Sì, basta che nel caso della macchina a ruote libere la spinta venga esercitata sulle ruote – mediante un opportuno dispositivo – non all'altezza dei perni, ma a un'altezza h inferiore e sufficientemente piccola. A ruote bloccate, la spinta che mantie-

ne costante la velocità della macchina è uguale alla forza d'attrito dinamico μP (dove P il peso della macchina). A ruote libere, la velocità costante richiede che siano uguali il momento resistente $\mu_v P$ dovuto all'attrito volvente e il momento motore complessivo Fh dovuto alla spinta F applicata (nel qual caso $F = \mu_v P/h$, e mancando ogni tendenza allo strisciamento l'attrito radente non entra in gioco). Dunque, se h è tale per cui $\mu P = \mu_v P/h$ (se cioè $h = \mu_v/\mu$) la forza da applicare è uguale nei due casi. Se h è inferiore, la forza da applicare è maggiore nel caso di spinta a ruote libere. Ad esempio, con $\mu = 0{,}8$ e $\mu_v = 64$ mm il valore di h per cui le forza da applicare è uguale nei due casi è $64/0{,}8 = 80$ mm. Per altezza inferiori, conviene trascinare la macchina a ruote bloccate.

28 La condizione di puro rotolamento implica che l'accelerazione a dell'asse geometrico della ruota e l'accelerazione angolare α della ruota siano collegate dalla relazione $a = \alpha R$. Se M è la massa della ruota, risulta $a = (F - A_0)/M$, e, con riferimento all'asse di istantanea rotazione, $\alpha = (FR - \tau_v)/(3MR^2/2)$. Imponendo che sia $a = \alpha R$ si ottiene $A_0 = \dfrac{F}{3} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\tau_v}{R}$. Essendo più grande la forza d'attrito radente richiesta per un moto di puro rotolamento, il rischio che tale forza superi il massimo valore disponibile ($A_{0/\max} = \mu_0 P$) aumenta.

29 In questo caso la forza d'attrito radente statico è diretta nel senso di marcia (che è quanto occorre per contrastare lo strisciamento della ruota sul terreno). Allora l'accelerazione del centro della ruota è $a = A_0/M$, e l'accelerazione angolare della ruota è data dal momento complessivo delle coppie applicate diviso il momento d'inerzia della ruota rispetto alla linea teorica di contatto sul terreno: se schematizziamo la ruota come un disco omogeneo otteniamo
$\alpha = (\tau - \tau_v)/(3MR^2/2)$. Dalla condizione $a = \alpha R$ del puro rotolamento si ottiene in tal modo $A_0 = 2(\tau - \tau_v)/3R$. La presenza di attrito volvente riduce il valore della forza di attrito radente necessaria, con ciò diminuendo il rischio di slittamento.