stanza tra le masse puntiformi m_A ed m_B passa dal valore iniziale r_i al valore finale r_f, il lavoro compiuto dalle forze gravitazionali è

[B] $$L = G m_A m_B \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right).$$

Tale relazione vale anche per corpi non puntiformi, *purché abbiano forma sferica e purché la loro massa sia distribuita nello spazio con simmetria sferica*.

Supponiamo ad esempio che m sia la massa di un meteorite che cade verso la Terra, M la massa della Terra, r la distanza del meteorite dal centro della Terra. Dato che nella Terra la massa è sostanzialmente distribuita con simmetria sferica, possiamo ritenere ben verificata la [B], che nel nostro caso diventa

[C] $$L = GmM\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right).$$

2. Applicazione: si debba calcolare il lavoro compiuto dalle forze gravitazionali quando un corpo K di massa m si sposta dalla superficie della Terra fino a una distanza infinitamente grande. Se nella [C] poniamo $r_f = \infty$ (e quindi $1/r_f = 0$) e $r_i = R_T$, otteniamo

[D] $$L_\infty = -GmM/R_T.$$

Si noti che il valore ottenuto *non è infinito*, pur essendo infinito lo spostamento: ciò è dovuto al fatto che al crescere della distanza dalla Terra il valore del peso diminuisce *rapidamente* (il peso è infatti inversamente proporzionale *al quadrato* della distanza dal centro della Terra). Tale lavoro rappresenta l'energia potenziale gravitazionale di K rispetto all'infinito, quando K si trova sulla superficie della Terra.

Il risultato può ovviamente essere generalizzato: a distanza $r \geq R_T$ dal centro della Terra, l'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m rispetto all'infinito è

[E] $$EP_\infty = -GmM/r.$$

3. Consideriamo un satellite della Terra *su orbita circolare*. La sua accelerazione è $v^2/r = g = GM/r^2$, perciò la sua velocità è $v = \sqrt{GM/r}$. Ne consegue che l'energia cinetica del satellite è $EC = GmM/2r = -EP_\infty/2$, e l'energia totale (fig. 6) è

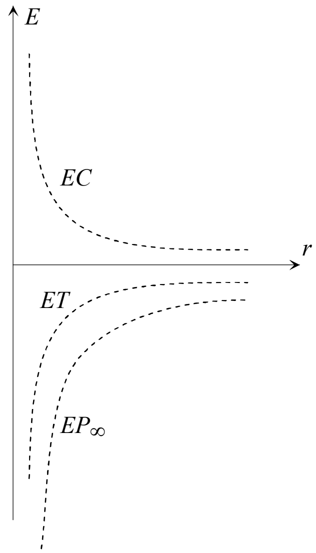

Fig. 6 – *Energia di un satellite su orbita circolare.*

[F] $$ET = EC + EP_\infty = EP_\infty/2 = -EC = -GmM/2r.$$

4. Per una traiettoria ellittica in cui la distanza minima dal Sole è r_P (al perigeo) e la distanza massima r_A (all'apogeo) si trova (esercizio n. 29, pag. 319) che l'energia totale è

[G] $-GmM/(r_A + r_P)$.

La somma $r_A + r_P$ non è altro che la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse: dunque, *su tutte le ellissi aventi lo stesso asse maggiore* (ivi inclusa una circonferenza di diametro $2R$ pari all'asse maggiore delle ellissi) *il valore dell'energia totale è, per una data massa del satellite, lo stesso*.

Osservazione importante. Il lavoro relativo allo spostamento di un sistema di punti in un campo gravitazionale si può calcolare con l'artificio di collocare l'intera massa del sistema nel centro di massa, ma *solo in un campo uniforme,* cioè solo se l'accelerazione di gravità si mantiene, per tutti i punti del sistema, sempre uguale in valore e direzione (vedere avanti negli esercizi il n. 24, pag. 319).

5. Si definisce **potenziale gravitazionale** in un punto P del campo l'energia potenziale gravitazionale per unità di massa: vale a dire, l'energia potenziale gravitazionale che avrebbe in P un corpo K, diviso la massa di K. Nel campo terrestre, ad esempio, in un punto P posto a distanza r dal centro della Terra (con $r \geq R_T$) il potenziale gravitazionale rispetto all'infinito è $-GM/r$. L'unità di misura internazionale è chiaamente il joule/kilogrammo (J/kg).

11.4 Velocità di fuga

1. Se lanciamo un corpo verso l'alto, l'altezza raggiunta dipende ovviamente dalla velocità di lancio (valore e direzione). Ad esempio, per lanci verticali l'altezza raggiunta (in assenza d'aria e per piccoli valori della velocità di lancio v) è $h = v^2/2g$, come si può subito ottenere, ad esempio, col teorema dell'energia cinetica.

Possiamo chiederci: è possibile dare a v un valore tanto grande da ottenere che l'altezza raggiunta sia infinitamente grande, cosicché il corpo che è stato lanciato non torni più indietro? La risposta è sì, proprio perché il lavoro gravitazionale relativo a uno spostamento fino all'infinito ($L_\infty = -GmM/R_T$) ha un valore finito. Il valore minimo della necessaria velocità di lancio si ottiene ancora col teorema dell'energia cinetica, imponendo che l'energia cinetica diventi zero a una distanza infinitamente grande: $0 - mv^2/2 = -GmM/R_T$, da cui

[A] $$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

A conti fatti, $v \approx 11$ km/s (velocità circa 34 volte più grande della velocità del suono). La velocità così calcolata è detta **velocità di fuga**: il suo valore è *il minimo* che occorre dare alla velocità di lancio dalla superficie della Terra se vogliamo che un corpo, soggetto *solo* alla forza gravitazionale di richiamo verso la Terra, si allontani indefinitamente dalla Terra. Se la velocità di lancio avesse valori superiori, l'energia cinetica finale (all'infinito) sarebbe diversa da zero: vale a dire, al tendere della distanza a infinito l'energia cinetica tenderebbe non a zero, ma a un valore superiore.

È ovvio che, rovesciando i termini del problema, il valore della velocità di fuga è anche il valore della velocità con cui giungerebbe sulla superficie terrestre un corpo lasciato cadere sulla Terra (velociutà iniziale zero) da una distanza infinitamente grande (sempre nell'ipotesi che il corpo in questione sia soggetto solo all'attrazione gravitazionale proveniente dalla Terra).

2. Se un corpo K possiede la velocità di fuga, la sua energia cinetica è uguale e contraria al lavoro L_∞ della forza gravitazionale tra il punto di lancio e l'infinito: la somma delle due grandezze è quindi zero. Ma L_∞ non è altro che l'energia potenziale gravitazionale di K rispetto all'infinito, dunque l'energia totale di K – cinetica più potenziale gravitazionale riferita all'infinito – vale zero. Allo stesso risultato si giunge immediatamente considerando che l'energia complessiva di K si mantiene costante lungo la traiettoria, e che a distanza infinita è zero sia l'energia cinetica (per la definizione stessa di velocità di fuga) sia l'energia potenziale rispetto all'infinito.

Se K avesse inizialmente una velocità *inferiore* a quella di fuga, anche la sua energia cinetica sarebbe inferiore, e quindi l'energia totale risulterebbe non nulla ma negativa. Se invece la velocità iniziale fosse *superiore* a quella di fuga, l'energia totale sarebbe positiva.

3. Applicazione. Supponiamo che dalla Terra venga lanciato un satellite. Dopo aver raggiunto una certa altezza (posizione A in fig. 7), esso riceve un impulso finale che gli conferisce una certa velocità $\vec{v}_0$ in direzione trasversale (perpendicolare cioè alla direzione radiale), dopodiché viene abbandonato alle forze del campo gravitazionale.

È interessante considerare ciò che avviene al variare del valore di $\vec{v}_0$. Già sappiamo che se $v_0 = \sqrt{GM/r}$ il satellite percorre un'orbita circolare di raggio r (in fig. 7 la n.3) e possiede energia totale negativa.

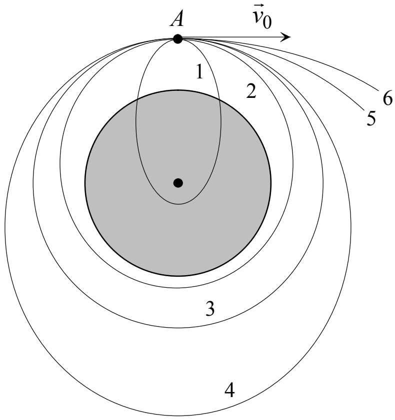

Fig. 7

Se è $v_0 < \sqrt{GM/r}$ la traiettoria è un'ellisse (orbita 2 della figura) il cui asse maggiore passa per il punto di lancio A e per il centro della Terra, che viene a trovarsi nel fuoco dell'ellisse *più lontano* dal punto di lancio. Al diminuire di v_0 l'ellisse si accorcia sempre più, fino a intersecare la superficie della Terra (caduta del satellite, orbita 1 in figura).

Se invece il valore di v_0 è $> \sqrt{GM/r}$ la traiettoria è un'ellisse in cui il centro della Terra è il fuoco *più vicino* al punto di lancio A (orbita 4 della figura). Più diventa grande v_0, più l'ellisse si allunga dalla parte opposta ad A. In ogni caso, fino a che è $v_0 < v_F$ (velocità di fuga, $\sqrt{2GM/r}$) l'energia totale del satellite mantiene valori negativi.

Se la velocità conferita al satellite in A raggiunge il valore di fuga l'energia totale del satellite diventa zero, e l'energia cinetica è abbastanza grande da permettere al satellite di allontanarsi indefinitamente: l'orbita ellittica degenera allora in una parabola (traiettoria 5 della figura) il cui fuoco è il centro della Terra. Si noti che anche in questo caso la velocità areale del satellite è costante lungo la traiettoria.

Se infine v_0 supera la velocità di fuga l'energia totale del satellite diventa positiva, e la traiettoria diventa un ramo di iperbole (traiettoria 6 in fig. 7): il centro della Terra è il fuoco di tale ramo di iperbole, e la velocità areale lungo la traiettoria è costante.

→ *Sul moto di un corpo nel campo gravitazionale terrestre si veda anche il paragrafo 13.2 («Energia potenziale centrifuga ed efficace») a pag. 357.*

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Le masse puntiformi A, B e C sono allineate nell'ordine, la seconda a distanza d dalla prima e $2d$ dalla terza. Tenuto conto che l'attrazione gravitazionale esercitata dalla seconda sulla prima è 72×10^{-6} N, e che $m_C = 4\, m_B$, si determini l'attrazione della prima sulla terza.

2 Due oggetti A e B identici si trovano il primo sulla superficie della Terra, il secondo sulla verticale del primo a un'altezza pari al raggio terrestre R_T. Quanto distano il baricentro del sistema $A+B$ e il centro di massa?

3 L'attrazione gravitazionale tra due corpi può essere sempre calcolata con l'artificio di collocare le due masse nei rispettivi centri di massa (*vero*/*falso*).

4 Se un satellite in orbita viene colpito da un meteorite che sta cadendo verso la Terra, possiamo affermare che immediatamente prima dell'urto i due corpi avevano esattamente la stessa accelerazione (*vero*/*falso*).

5 Se la Terra si espandesse fino ad avere un diametro doppio, che valore assumerebbe in superficie l'accelerazione di gravità?

6 Che differenza c'è tra accelerazione gravitazionale *della* Luna e accelerazione gravitazionale *sulla* Luna?

7 Nel moto attorno alla Terra, l'accelerazione della Luna (distante dalla Terra circa 384 000 km) è 2,73 mm/s^2. Nel moto attorno al Sole, l'accelerazione della Luna (distante dal Sole circa 150 milioni di km) è circa 6 mm/s^2. In che rapporto stanno le forze esercitate sulla Luna dal Sole e dalla Terra?

8 In che rapporto stanno, a parità di altezza, i tempi di caduta sulla Terra e sulla Luna? La massa della Luna è 1,2 centesimi della massa della Terra, il raggio della Luna è 27 centesimi di quello della Terra.

9 In che rapporto stanno, a parità di velocità iniziale, le altezze raggiunte sulla Terra e sulla Luna con un lancio verticale?

10 Quanto tempo impiega a fare il giro della Terra un satellite distante 300 km dalla superficie terrestre?

11 A che altezza sulla superficie terrestre si trova un satellite «geostazionario» (un satellite cioè immobile rispetto alla Terra)?

12 Un satellite geostazionario si mantiene necessariamente nel piano equatoriale (*vero*/*falso*).

13 Quanto dura un anno su Marte? E su Giove? E su Plutone? Si tenga presente che, rispetto alla Terra, la distanza media dal Sole è 1,524 volte più grande per Marte, 5,203 volte più grande per Giove, 39,44 volte più grande per Plutone.

14 I satelliti della Terra hanno tutti, per la seconda legge di Keplero, la stessa velocità areale (*vero*/*falso*).

15 Si determini la velocità areale di un pianeta facendo l'ipotesi che l'orbita sia circolare con raggio R.

16 Se, per qualche ragione, la massa della Luna andasse via via diminuendo, che cosa accadrebbe del suo periodo di rivoluzione attorno alla Terra?

17 Con riferimento a pianeti su orbite circolari, si dimostri che il rapporto T^2/R^3 tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del raggio della circonferenza percorsa è necessariamente costante al variare di R.

18 Nel campo gravitazionale di un elettrone, si valuti l'ordine di grandezza dell'accelerazione di gravità sulla superficie dell'elettrone, schematizzato come una sferetta omogenea di massa $m = 9 \times 10^{-31}$ kg e raggio $R = 10^{-17}$ m.

19 Che cosa si ottiene moltiplicando il peso di un satellite per la sua distanza dal centro della Terra?

20 Campo gravitazionale prodotto da un guscio semisferico omogeneo disposto come in fig. 8: si dimostri che in tutti i punti del cerchio orizzontale che chiude superiormente la cavità il campo $\vec{g}$ è verticale.

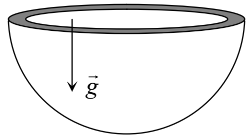

Fig. 8

21 Si determini l'andamento dell'accelerazione di gravità nel campo prodotto da una massa M distribuita in modo uniforme entro un volume sferico.

22 Si dimostri che un corpo K, lasciato cadere dentro un pozzo rettilineo che attraversa tutta la Terra da un qualsiasi punto A a un qualsiasi altro punto B, oscillerebbe all'infinito, in assenza di attriti, tra A e B; e che, se la Terra fosse una sfera omoge-

nea, il moto sarebbe armonico con un periodo uguale a quello che avrebbe un satellite su orbita bassa in assenza di atmosfera.

23 Una tipica stella di neutroni ruota su sé stessa in un tempo dell'ordine di 1 s. Data l'assenza di interazione elettromagnetica tra le particelle costitutive (i neutroni sono privi di carica elettrica) la stella è «tenuta assieme» solo dall'attrazione gravitazionale. Si faccia l'ipotesi semplificativa che la stella sia un corpo omogeneo (in realtà, il valore della densità aumenta rapidamente verso l'interno): quale valore minimo sarebbe in tal caso necessario per la densità?

24 Un oggetto A di massa m subisce un breve spostamento verticale h in prossimità della superficie terrestre. Un oggetto B di massa uguale, posto sulla verticale per A e distante da A un raggio terrestre, subisce a sua volta lo stesso spostamento verticale. È possibile calcolare il lavoro complessivo delle forze gravitazionali concentrando la massa del sistema $A+B$ nel centro di massa? È possibile calcolarlo concentrando la massa nel baricentro?

25 Si calcoli la velocità areale di un pianeta in funzione della massa del Sole e della distanza minima e massima dal Sole stesso.

26 Si calcoli il valore del rapporto T^2/R^3 tra il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e il cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

27 Si calcoli da quale altezza bisognerebbe far cadere un sasso sulla Terra per farlo arrivare al suolo, sotto l'azione delle sole forze gravitazionali provenienti dalla Terra, con una velocità uguale alla metà della velocità con cui arriverebbe sulla Terra da una distanza infinita.

28 Si consideri il sistema isolato costituito da due stelle che ruotano assieme attorno al centro di massa del sistema: fatta l'ipotesi che la distanza tra le due stelle si mantenga costante, si determini il comune periodo di rotazione.

29 Si calcoli l'energia totale di un satellite della Terra, sapendo che la distanza minima dal centro della Terra è r_P e che la distanza massima è r_A.

30 Si determini il lavoro che occorre compiere per spostare un satellite da un'orbita circolare di raggio R_1 a un'orbita circolare di raggio R_2.

31 Si determini quanta energia è strettamente necessario spendere per porre in orbita un satellite di massa m lungo una traiettoria avente distanza minima dalla Terra $r_P = R_0$ e distanza massima $r_A = 5R_0$ (dove R_0 è il raggio terrestre).

32 Una capsula spaziale di massa $m = 10^4$ kg, che percorre un'orbita circolare mantenendosi 500 km al di sopra della superficie terrestre, deve essere spostata su un'orbita circolare più ampia, in modo che si mantenga a 1500 km dalla superficie terrestre. Il risultato viene ottenuto accendendo brevemente i motori, che producono una spinta costante di $1{,}25\times10^5$ N parallelamente alla direzione del moto, una prima volta per immettere la capsula su un'orbita ellittica di trasferimento, una seconda volta, raggiunta la distanza di 1500 km, per immetterla nell'orbita circolare finale. Assumendo che la Terra sia una sfera di raggio $R_T = 6370$ km e massa $M = 5{,}983\times10^{24}$ kg,

(a) calcolare l'energia cinetica della capsula nelle due orbite circolari;

(*b*) descrivere le caratteristiche geometriche dell'orbita di trasferimento;

(*c*) calcolare quale valore di energia cinetica deve essere raggiunto con la prima accensione se vogliamo che la capsula si sposti poi fino a una distanza massima di 1500 km;

(*d*) determinare quanto deve durare la prima accensione;

(*e*) chiarire la direzione di spinta dei motori in corrispondenza della seconda accensione, e determinare quanto deve durare la seconda accensione;

(*f*) calcolare il tempo impiegato dalla capsula a percorrere l'orbita di trasferimento[5].

33 (*a*) Si vuole che la velocità di un corpo tenda alla velocità di fuga quando la distanza dalla Terra tende a infinito. Con quale velocità occorrerebbe lanciarlo in assenza di atmosfera?

(*b*) Con quale velocità «giunge all'infinito» un corpo lanciato con velocità doppia rispetto a quella di fuga?

(*c*) A quale distanza dal centro della Terra la velocità è uguale alla metà della velocità di fuga, quando la velocità di lancio è uguale alla velocità di fuga?

34 La velocità di fuga è uguale per qualsiasi direzione di lancio (*vero*/*falso*).

35 Si consideri un sistema isolato costituito da due stelle che orbitano attorno al centro di massa (CM) del sistema, e ci si ponga in un riferimento inerziale in cui il punto CM è immobile.

a) La situazione può essere schematizzata come in fig. 9 (*vero* / *falso*).

b) La situazione può essere schematizzata come in fig. 10 (*vero* / *falso*).

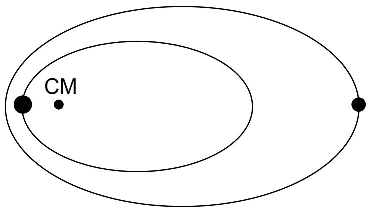

Fig. 9

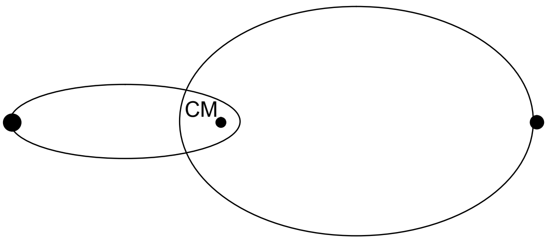

Fig. 10

[5] Problema proposto alla gara nazionale studentesca del 1993 per le Olimpiadi di Fisica.

SOLUZIONI

1 Rispetto all'interazione tra la prima e la seconda, nell'interazione tra la prima e la terza il prodotto delle masse è quadruplicato, mentre la distanza è triplicata (fig. 11). Dunque, per la legge di Newton, la forza di interazione tra A e C è i $4/9$ della forza di interazione tra A e B, e vale quindi 32×10^{-6} N.

Fig. 11

2 L'oggetto più lontano pesa un quarto dell'altro: il baricentro si trova quindi a un'altezza $R_T/5$ sulla superficie terrestre. L'altezza del centro di massa è $R_T/2$. La distanza tra i due oggetti è $d = R_T/2 - R_T/5 = 0{,}3\, R_T$ (circa 1900 km).

3 Falso: ciò è possibile esclusivamente per corpi di forma sferica, e solo se la massa è distribuita con simmetria sferica (se cioè la densità ha lo stesso valore in tutti i punti equidistanti dal centro della sfera): *ma solo agli effetti esterni*. Ad esempio, il campo gravitazionale generato da un guscio sferico omogeneo, di spessore costante, nella cavità interna è ovunque nullo.

4 Vero: quali che fossero le diverse condizioni di velocità (valore e direzione), essendo i due corpi soggetti esclusivamente alle forze del campo gravitazionale l'accelerazione era per entrambi l'accelerazione locale di gravità.

5 Nella relazione $g = P/m$ (peso diviso massa) $= GM/R^2$ risulterebbe quadruplicato il denominatore, quindi sarebbe $g = (9{,}81/4)\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$.

6 L'accelerazione *della* Luna è quella che compete al moto della Luna in un riferimento inerziale, e dipende dalla forza gravitazionale a cui la Luna è soggetta per effetto del Sole e della Terra. L'accelerazione *sulla* Luna è quella di un corpo che cade sulla Luna, ed è essenzialmente prodotta dalla forza attrattiva esercitata sul corpo in questione dalla Luna.

7 Nel rapporto tra le accelerazioni prodotte: la forza esercitata sulla Luna dal Sole è perciò *più che doppia* rispetto alla forza esercitata dalla Terra[6].

8 L'accelerazione di gravità sulla Luna è $g_L = GM_L/R_L^2$. Posto $M_L = 0{,}012\, M_T$ e $R_L = 0{,}27\, R_T$ si ottiene $g_L = 0{,}16\, GM_T/R_T^2 = 0{,}16\, g_T = 0{,}16 \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 1{,}6\ \mathrm{m/s^2}$. Il tempo di caduta da un'altezza H è $t = \sqrt{2H/g}$. Essendo $g_L = 0{,}16\, g_T$, si ottiene $t_L = 2{,}5\, t_T$.

9 L'altezza raggiunta è $H = v^2/2g$, inversamente proporzionale a g. Sulla Luna viene raggiunta un'altezza $1/0{,}16 = 6{,}25$ volte più grande che sulla Terra. Il record di salto in alto, ad esempio, sarebbe $2{,}45\ \mathrm{m} \times 6{,}25 = 15{,}31$ m.

[6] Occupando praticamente la stessa posizione nel campo gravitazionale del Sole, la Terra e la Luna (schematizzate come puntiformi) avrebbero, nei riferimenti inerziali, la stessa accelerazione se non interagissero tra loro. Ciò significa che la differenza di accelerazione, e cioè l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra (più precisamente, rispetto a un riferimento che rispetto agli osservatori inerziali si muove di moto traslatorio e nel quale il centro di massa della Terra è immobile) proviene essenzialmente dalla forza con cui la Luna è attratta dalla Terra.