

## Dinamica relativa

### 12.1 Le forze apparenti

1. Sappiamo dalla cinematica relativa che l'accelerazione  $\vec{a}$  di un punto  $P$  in un riferimento  $K$  e l'accelerazione  $\vec{a}'$  di  $P$  in un riferimento  $K'$  sono legate l'una all'altra dalla relazione

$$[\text{A}] \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\text{tr}} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

dove  $\vec{a}_{\text{tr}}$  è l'*accelerazione di trascinamento* (l'accelerazione che il punto  $P$  avrebbe rispetto a  $K$  se, essendo rigidamente collegato a  $K'$ , avesse in  $K'$  velocità  $\vec{v}'$  zero e accelerazione  $\vec{a}'$  zero<sup>[1]</sup>), mentre il prodotto  $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$  (nel quale  $\vec{\omega}$  è la velocità con cui  $K'$  ruota rispetto a  $K$ ) rappresenta l'*accelerazione complementare* (o «di Coriolis»).

2. Se il moto di  $K'$  rispetto a  $K$  – e di  $K$  rispetto a  $K'$  – è traslatorio,  $\vec{\omega}$  è zero e quindi è zero l'accelerazione complementare. Se poi il moto di traslazione di  $K'$  è rettilineo e uniforme, qualunque punto immobile in  $K'$  si muove in  $K$  di moto rettilineo uniforme, quindi oltre all'accelerazione complementare è zero anche l'accelerazione di trascinamento: pertanto  $\vec{a} = \vec{a}'$ , cioè l'osservatore  $K$  e l'osservatore  $K'$  attribuiscono al punto  $P$  diversa velocità<sup>[2]</sup> ma uguale accelerazione. Se, più in particolare, uno dei due osservatori è inerziale (ed è quindi autorizzato a calcolare la forza applicata al punto  $P$  come prodotto tra massa e accelerazione, in accordo alla seconda legge di Newton), è inerziale anche l'altro, che alla stessa massa attribuisce la stessa accelerazione.

3. Supponiamo ora che  $K$  sia inerziale, ma che, non essendo il moto di  $K'$  rispetto a  $K$  traslatorio, rettilineo e uniforme,  $K'$  non sia inerziale. Il prodotto  $m\vec{a}$  è in tal caso la forza vera, la forza  $\vec{F}$  che effettivamente agisce su  $P$ , il prodotto  $m\vec{a}'$  è inve-

---

<sup>1</sup> Il fatto che  $P$  sia rigidamente collegato a  $K'$  è una condizione sufficiente, ma non necessaria, perché sia  $\vec{a} = \vec{a}_{\text{tr}}$ . Per la [A], la condizione necessaria è che sia  $\vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 0$ . Ciò si verifica ovviamente anche quando i due addendi hanno modulo uguale e direzione opposta, oppure quando l'accelerazione  $\vec{a}'$  è zero e la velocità  $\vec{v}'$  è parallela a  $\vec{\omega}$  (prodotto vettoriale nullo).

<sup>2</sup> Si ricordi che è  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\text{tr}}$ , cioè la velocità in  $K$  è la somma della velocità in  $K'$  e della velocità di trascinamento, che è la velocità che il punto mobile avrebbe in  $K$  se in  $K'$  avesse velocità zero.

ce la forza  $\vec{F}'$  che  $K'$  ritiene (erroneamente) essere applicata a  $P$ . Dalla [A] discende

$$[B] \quad \vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{tr} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_C.$$

Vale a dire: la forza  $\vec{F}'$  rilevata da  $K'$  è in realtà la somma della forza effettiva  $m\vec{a}$  e di due forze fittizie, inesistenti in quanto non legate a una interazione di  $P$  con altri corpi, ma solo al fatto che  $K'$ , che non è inerziale, applica ciò nonostante – abusivamente – la seconda legge di Newton: tali forze apparenti (denominate a volte «forze d'inerzia»<sup>[3]</sup>) sono la **forza di trascinamento**  $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}$  e la **forza di Coriolis**  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ . Si noti che tali formule definiscono le forze apparenti in modo univoco, per il fatto che tutti gli osservatori inerziali attribuiscono a un riferimento non inerziale la stessa velocità angolare  $\vec{\omega}$  e attribuiscono la stessa accelerazione  $\vec{a}_{tr}$  a un punto immobile in tale riferimento.

4. Dunque, in un riferimento non inerziale l'accelerazione di un punto si può ottenere dividendo per la massa del punto non la forza ad esso effettivamente applicata, ma la somma di tale forza con le forze apparenti. Più in generale: se, per spiegare o prevedere il moto dei corpi, vogliamo applicare le leggi della meccanica nei riferimenti non inerziali – *cosa che a volte permette di arrivare più facilmente alla soluzione di un problema* – dobbiamo mettere in conto, insieme alle forze effettive, anche le forze apparenti.

5. Si noti ancora che, mentre tutti gli osservatori inerziali attribuiscono a uno stesso punto la stessa accelerazione e vedono quindi la stessa forza (la forza vera), nei diversi riferimenti non inerziali (che possono muoversi l'uno rispetto all'altro nei modi più disparati) sono viceversa in generale *diverse* sia l'accelerazione  $\vec{a}'$  di un punto, sia di conseguenza la forza  $m\vec{a}'$  osservata.

6. Primo esempio. Pendolo su carrello che nel riferimento del laboratorio (riferimento che qui consideriamo inerziale) procede di moto rettilineo uniformemente vario con accelerazione  $\vec{a}$ : ciò che si osserva (fig. 1) è che il filo del pendolo tende ad assestarsi in una posizione in cui forma con la verticale un angolo  $\theta$  definito da  $\text{tg}\theta = a/g$ .

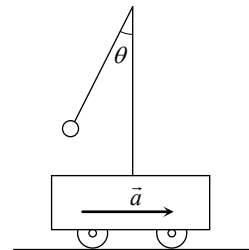


Fig. 1

Dal punto di vista degli osservatori inerziali ciò accade perché in tal modo il componente orizzontale della forza che il filo esercita sulla pallina è  $m\vec{a}$  (il componente verticale è  $-m\vec{g}$ ), il che rende conto dell'accelerazione  $\vec{a}$  che gli osservatori inerziali (tutti) attribuiscono alla pallina. Dal punto di vista invece di un osservatore non inerziale solidale col carrello, la pallina è immobile, e la posizione anomala del

<sup>3</sup> In quanto sempre proporzionali alla massa (o quantità di inerzia) dei corpi su cui agiscono.

filo si spiega col fatto che sulla pallina agiscono non solo il peso e la reazione del vincolo, ma anche una forza apparente di trascinamento  $-m\vec{a}$  (la forza apparente di Coriolis è in questo caso zero sia perché è zero la velocità  $\vec{v}'$  della pallina nel riferimento del carrello, sia perché è zero la velocità angolare del carrello).

7. Secondo esempio: un carrello procede nel riferimento (inerziale) del laboratorio di moto rettilineo con accelerazione  $\vec{a}$  costante *equivversa alla velocità* (la quale quindi aumenta linearmente nel tempo). A un tratto, dalla sommità di un'asta verticale di altezza  $h$  fissata al carrello si stacca una pallina che cade perdendo terreno rispetto al carrello: si osserva che, se la presenza d'aria è ininfluente, il punto di caduta della pallina sul carrello dista  $ha/g$  dalla base dell'asta. Nel riferimento del laboratorio (fig. 2) la circostanza si spiega col fatto che, dal momento in cui la pallina si stacca dall'asta, la sua velocità orizzontale resta costante, mentre la velocità del carrello continua ad aumentare: nel tempo  $T = \sqrt{2h/g}$  necessario alla pallina per arrivare a destinazione, lo spostamento orizzontale della pallina è  $v_0T$ , quello del carrello è  $v_0T + aT^2/2$  (la differenza è  $aT^2/2^2 = [a/2] 2h/g = ha/g$ ).

Nel riferimento invece del carrello (fig. 3) le leggi di Newton (*utilizzate abusivamente, perché il riferimento non è inerziale*) portano a concludere che sulla pallina agisce oltre al peso  $mg$  anche una forza orizzontale  $-m\vec{a}$  equivversa alla velocità che, nel riferimento del carrello, viene attribuita al laboratorio.

8. Terzo esempio (fig. 4): piattaforma che nel riferimento (inerziale) del laboratorio ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno al proprio asse geometrico: un blocchetto di massa  $m$ , appoggiato senza attrito sulla tavola rotante e vincolato con un filo elastico all'asse di rotazione, ruota a sua volta con velocità angolare  $\omega$  su una circonferenza di raggio  $r$ , risultando immobile rispetto alla tavola. Per gli osservatori inerziali, il blocchetto ha un'accelerazione  $\vec{a}$  di valore  $\omega^2 r$  diretta in senso centripeto, e l'unica forza orizzontale ad esso applicata è la forza

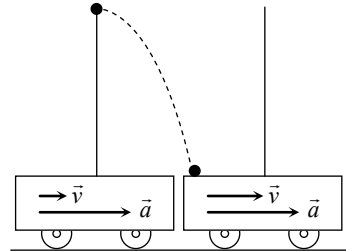


Fig. 2 – Che cosa si osserva nel riferimento del laboratorio.

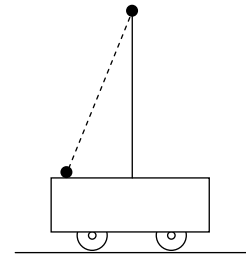


Fig. 3 – Che cosa si osserva nel riferimento del carrello.

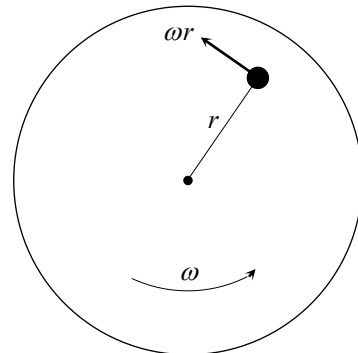


Fig. 4

$m\omega^2 r$  proveniente dall'elastico.

Viceversa, un osservatore posto sulla piattaforma rotante (e in quiete rispetto ad essa) considera il blocchetto immobile, e se applica le leggi di Newton spiega tale immobilità col fatto che la forza proveniente dall'elastico è esattamente compensata da una forza  $-m\vec{a}$  di valore  $m\omega^2 r$  diretta in senso centrifugo. È chiaro allora che nei riferimenti che, rispetto ai riferimenti inerziali, ruotano con velocità angolare costante attorno a un asse fisso – o che trasla con velocità costante – la forza di trascinamento (la forza apparente su un punto immobile nel riferimento rotante) ha il carattere di forza centrifuga.

9. Quarto esempio: dal centro della piattaforma rotante di cui sopra, l'osservatore non inerziale lancia con velocità  $\vec{v}_0$  un blocchetto facendolo scivolare di piatto lungo il diametro  $a$ . Se non c'è attrito, nel riferimento «fisso» del laboratorio (fig. 5) il blocchetto è libero da forze orizzontali e percorre con velocità costante  $\vec{v}_0$  una traiettoria rettilinea mentre la piattaforma gli ruota sotto. Dal punto di vista invece dell'osservatore non inerziale che ha effettuato il lancio (fig. 6) la piattaforma è immobile, mentre il blocchetto percorre con velocità crescente una traiettoria che si incurva o verso destra o verso sinistra (a seconda che, vista dall'alto nel laboratorio, la piattaforma appaia ruotare in senso antiorario oppure orario).

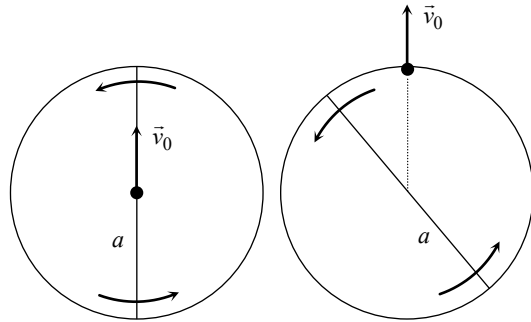


Fig. 5 – Il punto di vista dell'osservatore fisso

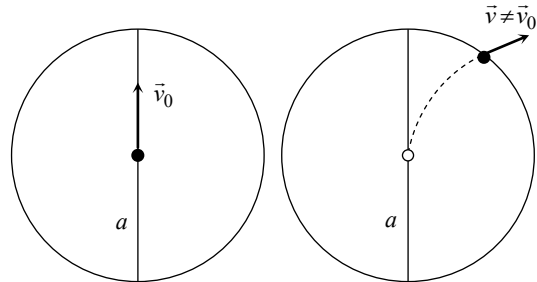


Fig. 6 – Il punto di vista dell'osservatore rotante

Se vuole spiegare il moto del blocchetto sulla base delle leggi di Newton, l'osservatore non inerziale deve mettere in conto una forza  $m\omega^2 r$  diretta radialmente verso il bordo della piattaforma (forza centrifuga di trascinamento), e una forza (di Coriolis) di valore  $2m\omega v'$  (dove  $v'$  è il modulo del vettore  $\vec{v}' = \vec{v}_0 - \vec{v}_{tr}$ ) diretta perpendicolarmente alla traiettoria (in quanto perpendicolare a  $\vec{v}'$ ) verso l'interno della curva.

10. Osservazione. Il teorema dell'energia cinetica vale nei riferimenti non inerziali *solo se si tiene conto del lavoro della forza apparente di trascinamento* (la forza di Coriolis non compie lavoro essendo sempre perpendicolare alla velocità relativa  $\vec{v}'$ ). Si ricordi a questo proposito che il lavoro delle forze e l'incremento dell'energia cinetica sono in generale *diversi* nei diversi riferimenti (nei diversi riferimenti inerziali, ad esempio, sono uguali le forze applicate a un punto  $P$  ma risultano ovviamente diversi gli spostamenti subiti da  $P$ ). Nel caso sopra esaminato, la forza di trascinamento ha direzione centrifuga: dato che, rispetto alla piattaforma, la velocità del blocchetto ha un componente radiale diretto anch'esso in senso centrifugo, il lavoro della forza di trascinamento è positivo, il che giustifica l'aumento della velocità.

## 12.2 Il riferimento Terra

1. Dal punto di vista degli osservatori inerziali (tutti), il movimento della Terra può essere schematizzato come una rotazione con velocità angolare costante

$$\omega = (2\pi \text{ rad}) / (86400 \text{ s}) = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s} = 15^\circ / \text{h}$$

attorno a un asse (l'asse polare) che in un anno percorre una circonferenza attorno al Sole mantenendo una direzione fissa<sup>[4]</sup>.

Perciò, l'osservatore terrestre (l'osservatore rispetto al quale la Terra è immobile) *non è inerziale*: e in molti casi non può spiegare ciò che osserva – o prevedere ciò che osserverà – se nelle leggi della meccanica non introduce, accanto alle forze effettive, le opportune forze apparenti.

2. Supponiamo dapprima che un corpo  $C$ , posto in prossimità della superficie della Terra, sia soggetto solo all'attrazione gravitazionale proveniente dalla Terra (cfr. nota 8, pag. 230). La sua accelerazione nei riferimenti inerziali è  $\vec{g}$ , diretta verso il centro della Terra (che schematizziamo come una sfera). La sua accelerazione nel riferimento Terra è invece

$$[A] \quad \vec{g}' = \vec{g} + \omega^2 R \cos \lambda \vec{u}_x - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare della Terra,  $R$  il raggio della Terra,  $\lambda$  la latitudine a cui  $C$  si trova,  $\vec{u}_x$  il versore di un asse  $x$  che esce a  $90^\circ$  dall'asse terrestre e passa da  $C$  (fig. 7),  $\vec{v}'$  la velocità relativa (la velocità rispetto alla Terra) di  $C$ .

Dunque, dal punto di vista dell'osservatore terrestre tutto va come se su  $C$  agissero, oltre al peso,  $a$ ) una forza di trascinamento di valore  $m\omega^2 R \cos \lambda$  diretta, rispetto

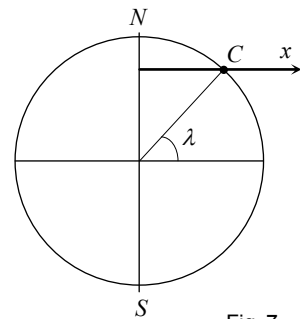


Fig. 7

<sup>4</sup> Il moto *vero* della Terra è naturalmente più complicato: ad esempio, la traiettoria della Terra non è una circonferenza ma un'ellisse, e la direzione dell'asse polare non è costante.

all'asse terrestre, radialmente in senso centrifugo; *b*) una forza di Coriolis sempre perpendicolare all'asse terrestre (componente zero su tale asse) oltre che alla velocità relativa  $\vec{v}'$ , proporzionale al valore di  $\vec{v}'$  e al seno dell'angolo tra  $\vec{v}'$  e l'asse terrestre, nulla se la velocità relativa è zero oppure è parallela all'asse terrestre. Chiameremo **peso apparente** la forza che produce l'accelerazione  $\vec{g}'$  data dalla [A]: la somma quindi del peso effettivo, della forza apparente di trascinamento e della forza apparente di Coriolis.

3. Consideriamo ad esempio un filo a piombo (fig. 8). Essendo il sistema immobile nel riferimento Terra ( $v' = 0$ ), la forza di Coriolis sul corpo sospeso è zero: il suo peso apparente è quindi la somma del peso effettivo e della forza centrifuga di trascinamento (orizzontale verso destra nella figura), e differisce dal peso effettivo sia in valore che in direzione. La differenza di direzione è legata al componente orizzontale della forza centrifuga (modulo  $m\omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda$ , direzione lungo il meridiano verso l'equatore), ed è quindi massima a  $45^\circ$  di latitudine (dove è massimo il prodotto  $\cos\lambda \sin\lambda$ <sup>[5]</sup>) e nulla ai poli e all'equatore: nell'emisfero Nord (Sud) il peso apparente è diretto non verso il centro della Terra ma verso un punto dell'asse terrestre posto leggermente al di sotto (al di sopra).

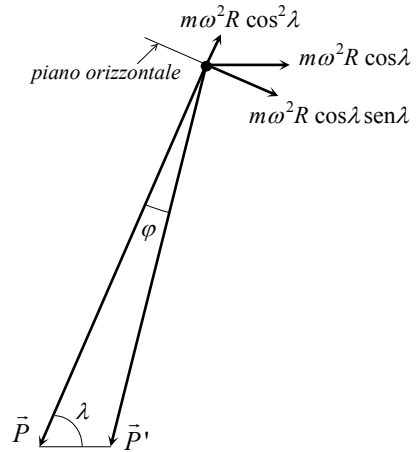


Fig. 8

L'angolo  $\varphi$  tra la direzione del peso effettivo (direzione «radiale») e la direzione del peso apparente (perpendicolare alla superficie dei liquidi in quiete) è comunque assai piccolo, cosicché la differenza di valore tra peso apparente e peso effettivo può sostanzialmente essere imputata al solo componente radiale ( $m\omega^2 R \cos^2\lambda$ ) della forza centrifuga:

$$[B] \quad P' \approx P - m\omega^2 R \cos^2\lambda.$$

Tranne che ai poli, il peso apparente di un corpo in quiete (il peso indicato dalla bilancia) è quindi inferiore al peso effettivo: la differenza aumenta man mano che dai poli ci si avvicina all'equatore.<sup>[6]</sup>

<sup>5</sup> Pro memoria:  $\sin\lambda \cos\lambda = \frac{1}{2} \sin 2\lambda$ .

<sup>6</sup> All'equatore la differenza è dello 0,3 %.

4. Chiaramente, anche gli osservatori inerziali vedono che il filo a piombo è spostato angularmente rispetto alla direzione radiale, e vedono che le bilance segnano un peso un po' inferiore al peso effettivo. Ma essi spiegano il tutto con le leggi di Newton, senza dover introdurre forze apparenti. In intervalli di tempo sufficientemente brevi, esiste sempre un riferimento inerziale in cui il moto della Terra può essere schematizzato come una rotazione attorno a un asse fisso: in tale riferimento (che qui di seguito chiameremo semplicemente *il riferimento inerziale*), un corpo di massa  $m$  posto sulla superficie della Terra (e fermo rispetto ad essa) si sposta con velocità angolare  $\omega$  costante lungo una circonferenza di raggio  $R \cos \lambda$ , per cui possiede, in tale riferimento e in tutti i riferimenti inerziali, un'accelerazione  $\omega^2 R \cos \lambda$  diretta verso il centro della circonferenza (orizzontalmente verso sinistra in figura), prodotta da una forza  $m\omega^2 R \cos \lambda$  avente la stessa direzione. Tale forza è la somma del peso  $\vec{P}$  e della reazione  $\vec{V}$  esercitata sul corpo in questione dal vincolo (il filo, o la bilancia): ciò spiega (fig. 9) valore e direzione della forza  $\vec{V}$ , forza che l'osservatore terrestre considera – erroneamente – uguale e contraria al peso del corpo, visto che, dal suo punto di vista, ne garantisce l'equilibrio.

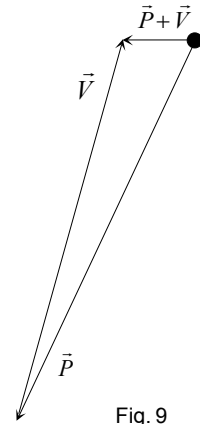
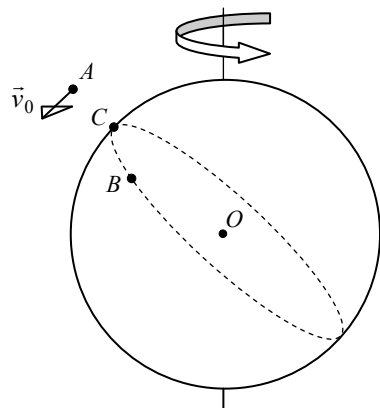


Fig. 9

5. Consideriamo ora la caduta di un corpo da fermo (supponendo che la presenza di aria risulti ininfluyente). Si osserva che la traiettoria non segue la direzione del peso (la direzione radiale), ma risulta leggermente deviata verso il piano equatoriale (effetto massimo a  $45^\circ$  di latitudine Nord e Sud, nullo ai poli e all'equatore) e verso Est (effetto massimo all'equatore, nullo ai poli). L'osservatore terrestre imputa la deviazione verso il piano equatoriale al componente orizzontale della forza centrifuga di trascinamento, e la deviazione verso Est (cfr. successivo paragrafo 12.3) alla forza apparente di Coriolis.

6. La spiegazione (qualitativa) dell'osservatore inerziale è invece la seguente.

(a) Deviazione verso il piano equatoriale. Il corpo che, nel giudizio dell'osservatore terrestre, cade «da fermo», possiede in realtà inizialmente (quando è ancora vincolato) una velocità di rotazione  $\vec{v}_0$  (fig. 10) attorno all'asse terrestre. Quando poi – nella posizione  $A$  – viene abbandonato al peso, non può più uscire (legge di inerzia) dal piano contenente il centro  $O$  della Terra e la velocità iniziale

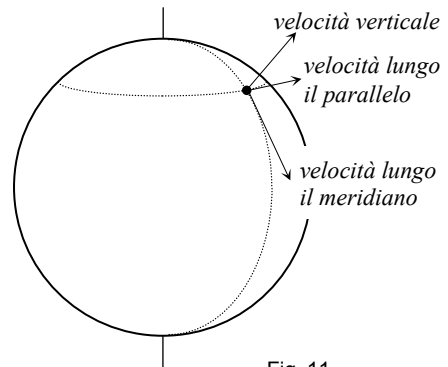
Fig. 10 – La velocità  $\vec{v}_0$  è perpendicolare al piano della pagina.

$\vec{v}_0$  (non c'è mai forza perpendicolarmente a tale piano). Il punto di impatto al suolo si troverà pertanto in corrispondenza dell'intersezione (tratteggiata in figura) di tale piano con la superficie terrestre: se la velocità iniziale fosse zero, la caduta avverrebbe in  $C$ , intersezione della superficie terrestre con la retta  $AO$ ; in caso contrario, in un punto  $B$  necessariamente più vicino (come la figura suggerisce) al piano equatoriale.

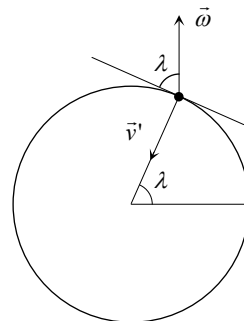
(b) Deviazione verso Est. All'istante in cui inizia la caduta, la velocità  $\vec{v}_0$  con cui il corpo sta ruotando attorno all'asse terrestre è più grande di quella del punto  $C$ , perché  $A$  è più lontano dall'asse di rotazione. Perciò, durante la caduta, lo spostamento del corpo nella direzione di  $\vec{v}_0$  (direzione Est) è più grande dello spostamento di  $C$ . La trattazione *quantitativa* del fenomeno nel riferimento inerziale è invece decisamente complessa.<sup>[7]</sup>

### 12.3 La forza di Coriolis nel riferimento Terra

1. La velocità relativa  $\vec{v}'$  di un corpo che si muove in prossimità della superficie terrestre può essere scomposta (fig. 11) in tre velocità componenti mutuamente ortogonali: una velocità verticale (diretta radialmente rispetto al centro della Terra), una velocità orizzontale tangente al meridiano e una velocità orizzontale tangente al parallelo. Conviene studiare l'effetto della forza di Coriolis su ognuna di tali velocità componenti separatamente.



(a) MOTO VERTICALE. Come è immediato verificare, in un moto verticale verso il basso (fig. 12) la forza di Coriolis ( $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ ) agisce in entrambi gli emisferi in direzione Est, con modulo  $2m\omega v' \cos\lambda$ . In un moto verticale verso l'alto la forza di Coriolis avrebbe uguale modulo ma agirebbe in direzione Ovest.



<sup>7</sup> Come si vedrà negli esercizi, un calcolo semplificato della deviazione porta a un risultato del 50% superiore a quello (più preciso) ottenuto ponendosi nel riferimento Terra.

(b) MOTO ORIZZONTALE LUNGO IL PARALLELO, DIREZIONE EST (fig. 13). La forza di Coriolis, diretta in senso centrifugo rispetto all'asse terrestre con valore  $2m\omega v'$ , ha un componente verticale (modulo  $2m\omega v' \cos\lambda$ , massimo all'equatore<sup>[8]</sup>, nullo ai poli) diretto verso l'alto e un componente orizzontale (modulo  $2m\omega v' \sin\lambda$ , massimo ai poli, nullo all'equatore) che agisce lungo il meridiano verso l'equatore (diretto quindi verso destra – per chi guarda nella direzione del moto – nell'emisfero Nord, e verso sinistra nell'emisfero Sud).

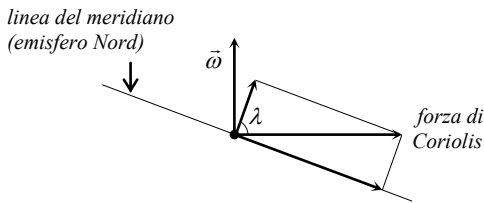


Fig. 13 – La velocità è diretta dal lettore alla pagina.

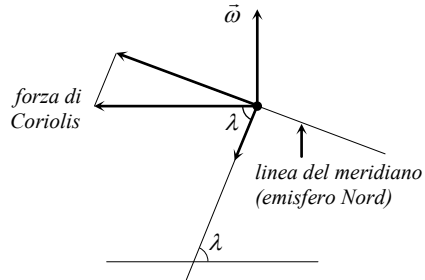


Fig. 14 – La velocità è diretta dalla pagina al lettore.

(c) MOTO ORIZZONTALE LUNGO IL PARALLELO, DIREZIONE OVEST (fig. 14). La forza di Coriolis è questa volta diretta in senso centripeto rispetto all'asse terrestre: il componente verticale è diretto come il peso, il componente orizzontale agisce lungo il meridiano in allontanamento dall'equatore (con effetto di deviazione verso destra nell'emisfero Nord e verso sinistra nell'emisfero Sud).

(d) MOTO ORIZZONTALE LUNGO IL MERIDIANO, DIREZIONE NORD (fig. 15). La forza di Coriolis (modulo  $2m\omega v' \sin\lambda$ , massimo ai poli, nullo all'equatore) è diretta lungo il parallelo (componente verticale zero): verso Est (a destra di chi guarda nella direzione del moto) nell'emisfero Nord, verso Ovest nell'emisfero Sud.

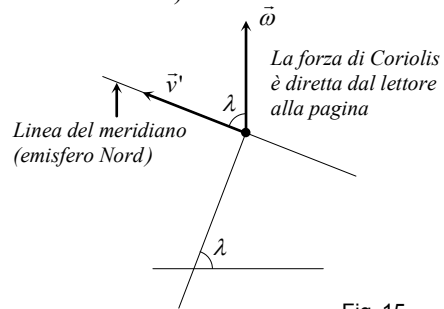


Fig. 15

<sup>8</sup> All'equatore dunque la forza di gravità è  $mg$ , la forza centrifuga di trascinamento (controverta al peso) è  $m\omega^2 R \approx mg/300$ , la forza di Coriolis su un corpo che si sposta con velocità relativa  $v'$  lungo il parallelo è  $2m\omega v'$ , diretta in senso centrifugo o centripeto a seconda che il moto relativo abbia direzione Est oppure Ovest: perché la forza di Coriolis assuma valori confrontabili con la forza centrifuga occorre che  $2\omega v'$  sia confrontabile con  $\omega^2 R$ , e quindi che  $v'$  sia dell'ordine di grandezza di  $\omega R/2 = (7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s})(6,37 \times 10^6 \text{ m})/2 = 232 \text{ m/s} = 835 \text{ km/h}$ .

(e) MOTO ORIZZONTALE LUNGO IL MERIDIANO, DIREZIONE SUD. La forza di Coriolis agisce verso Ovest (a destra di chi guarda nella direzione del moto) nell'emisfero Nord, verso Est nell'emisfero Sud.

In sintesi: *in un moto verticale*, la forza di Coriolis agisce sempre orizzontalmente verso Est nel caso di caduta, verso Ovest nel caso di salita; *in un moto orizzontale* (comunque diretto), l'effetto orizzontale della forza di Coriolis è una deviazione verso destra (di chi guarda nella direzione del moto) nell'emisfero Nord, verso sinistra nell'emisfero Sud.

2. La deviazione di un moto orizzontale è ben visibile nella *rotazione del piano di oscillazione del pendolo*: in senso orario nell'emisfero Nord, in senso antiorario nell'emisfero Sud. Il periodo è  $T_0 = 24$  h ai poli,  $T_0/\text{sen}\lambda$  a latitudine  $\lambda$ .

Quest'ultima circostanza viene spiegata dall'osservatore inerziale in questi termini: la velocità angolare  $\vec{\omega}$  della Terra può essere scomposta (fig. 16) in una velocità angolare  $\vec{\omega}'$  (di modulo  $\omega \text{sen}\lambda$ ) attorno a un asse passante dal punto  $P$  in cui è posto il pendolo in oscillazione, e in una velocità angolare  $\vec{\omega}''$  (di modulo  $\omega \text{cos}\lambda$ ) attorno a un asse ortogonale al precedente. Per effetto della prima delle due rotazioni componenti, rispetto alla quale è come se il pendolo si trovasse ai poli, la Terra gira sotto il punto di sospensione del pendolo con periodo  $T_0/\text{sen}\lambda$ , mentre ovviamente la seconda delle due rotazioni componenti, rispetto alla quale il pendolo si trova all'equatore, non produce alcun effetto del genere.

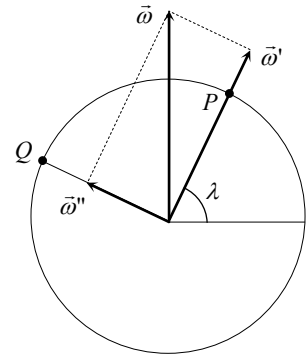


Fig. 16

Esempio. A  $45^\circ$  di latitudine (Milano), il piano di oscillazione del pendolo ruota con velocità angolare  $\omega' = \omega \text{sen } 45^\circ = (15^\circ/\text{h}) \times 0,707 = 10,6^\circ/\text{h}$ . Un giro completo viene dunque compiuto in  $360^\circ / (10,6^\circ/\text{h}) = 44$  h.

3. Gli effetti della forza di Coriolis in un punto come  $P$  (fig. 16) si possono anche ricollegare alla circostanza che  $P$  si trova al polo Nord in rapporto a  $\vec{\omega}'$ , e all'equatore in rapporto a  $\vec{\omega}''$ . Un punto come  $Q$  si trova invece al polo Nord in rapporto a  $\vec{\omega}''$ , e all'equatore in rapporto a  $\vec{\omega}'$ . Se gli effetti della forza di Coriolis sono noti ai poli e all'equatore, sono implicitamente noti in qualsiasi altro punto della superficie terrestre.

## QUESITI ESEMPLIFICATIVI E DI CONTROLLO

- 1 (a) Si spieghi quale peso viene attribuito da una bilancia, internamente a un montacarichi che viaggia verso il basso con velocità costante  $3 \text{ m/s}$ , a un blocco di massa  $72 \text{ kg}$ .
- (b) Che cosa segnerebbe la bilancia se il montacarichi avesse accelerazione  $(9,81/8) \text{ m/s}^2$  verso l'alto?
- (c) E se l'accelerazione avesse lo stesso valore ma fosse diretta verso il basso?
- (d) In quale eventualità la bilancia segnerebbe  $96 \text{ kg}$ ?
- (e) In quale eventualità la bilancia segnerebbe zero?
- (f) Come si comporterebbe in quest'ultimo caso la pallina di un pendolo?
- (g) È teoricamente possibile che nel riferimento del montacarichi il peso risulti diretto verso l'alto?

- 2 Una capsula spaziale è in orbita attorno alla Terra su una circonferenza di raggio doppio rispetto al raggio terrestre. Che cosa legge un astronauta sulla bilancia, se decide di controllare il suo peso?

- 3 \* La fig. 17 vuole rappresentare una vaschetta piena d'acqua che scivola senza incontrare attrito lungo un piano inclinato. Si chiarisca se, per quanto riguarda la superficie libera del liquido, la situazione è stata rappresentata in modo corretto.

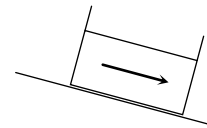


Fig. 17

- 4 Supponiamo che la velocità di rotazione della Terra sia tale per cui il peso apparente di un corpo situato all'equatore, immobile rispetto alla superficie terrestre, risulti zero. In quanto tempo la Terra girerebbe su se stessa in tal caso? Che cosa segnerebbe una bilancia posta a latitudine  $\lambda$ ?

- 5 Un treno percorre una curva di raggio  $R = 1000 \text{ m}$  alla velocità di  $120 \text{ km/h}$ . Determinare quali forze apparenti agiscono su un viaggiatore di peso  $78 \text{ kg}$  che si sposta lungo un corridoio con velocità relativa  $1 \text{ m/s}$ .

- 6 \* In un laboratorio, una piattaforma gira su sé stessa con velocità angolare  $\bar{\omega}$  costante diretta verso l'alto: un osservatore posto sulla piattaforma osserva una pallina di massa  $m$ , immobile rispetto al laboratorio, sospesa ad un filo fissato al soffitto e distante  $d$  dall'asse  $z$  di rotazione della piattaforma. Posto che rispetto al laboratorio la pallina sia immobile, come viene valutato il suo stato di moto nel riferimento della piattaforma? Come viene spiegato, sulla base delle leggi della dinamica, il fatto che il filo si mantenga verticale?

- 7 \* Il blocchetto  $K$ , di massa  $m$ , appoggia senza attrito sul cuneo  $C$  (fig. 18). Sapendo che  $C$  è animato da moto rettilineo uniformemente vario in direzione orizzontale, si descriva il moto di  $K$ , e si chiarisca se la forza orizzontale  $\vec{F}$  applicata al cuneo  $C$  è costante.

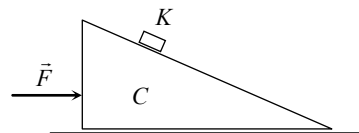


Fig. 18

- 8 \* Come sopra, ma si supponga questa volta che il cuneo  $C$ , di massa  $M$ , possa scivolare senza attrito sul piano orizzontale, e che le uniche forze esterne applicate al sistema cuneo + blocchetto siano le forze gravitazionali e la reazione del piano d'appoggio. Posto che entrambi i corpi abbiano inizialmente velocità zero, determinare la velocità del cuneo in funzione dello spostamento verticale del blocchetto.
- 9 \* Su un carrello, che procede in linea retta con accelerazione costante in direzione orizzontale, il signor  $A$  decide di riportare la pallina di un pendolo (fissato al carrello) al di sotto del punto di sospensione. Come verrà valutato nel riferimento fisso e nel riferimento del carrello il lavoro compiuto da  $A$ ?
- 10 Su un carrello che procede di moto rettilineo uniformemente vario è posto un recipiente cilindrico di altezza  $H$  e raggio  $R$  contenente acqua fino a un livello  $h$ . Posto che l'accelerazione del carrello aumenti in modo così graduale da poter escludere moti pendolari di assestamento del liquido (il quale quindi risulta in ogni istante immobile rispetto al recipiente), si determini il valore di accelerazione che il carrello può raggiungere senza che il liquido trabocchi.
- 11 Due corpi di massa identica vengono sottoposti a pesatura. Il primo è in un laboratorio al Polo Nord, l'altro è posto su un treno che rispetto alla Terra viaggia a velocità costante  $v$  da Ovest verso Est lungo l'equatore. Si confrontino i risultati delle due misure e si spieghi come tali risultati vengono giustificati nei riferimenti inerziali, nel riferimento Terra e nel riferimento del treno. Si assuma che, agli effetti dell'indicazione della bilancia, nei riferimenti inerziali il moto dell'asse terrestre possa considerarsi traslatorio, rettilineo, uniforme.
- 12 \* Un contenitore cilindrico di altezza  $H$  e raggio  $R$  contiene acqua fino al livello  $h$ . Posto che il cilindro entri in rotazione attorno al proprio asse geometrico, e che la velocità angolare aumenti in modo così graduale da poter ritenere che il liquido rimanga sempre immobile rispetto al cilindro, determinare quale valore della velocità angolare può essere raggiunto senza che il liquido trabocchi.

## SOLUZIONI

- 1 (a) 72 kg. Le forze apparenti sono entrambe zero, il peso indicato dalla bilancia coincide col peso effettivo. Dal punto di vista dell'osservatore fisso (inerziale) la somma delle forze sul blocco deve essere zero: 72 kg verso il basso (il peso), 72 kg verso l'alto (la reazione proveniente dalla bilancia).
- (b) La forza apparente di trascinamento ( $-m\vec{a}$ ) sarebbe  $(72/8)$  kg = 9 kg verso il basso, il peso apparente sarebbe  $(72+9)$  kg = 81 kg. Dal punto di vista dell'osservatore fisso, 81 kg verso l'alto sono la forza che occorre venga esercitata sul blocco dalla bilancia affinché il blocco sia complessivamente soggetto a una forza pari a  $1/8$  del peso, diretta verso l'alto.
- (c) La somma del peso effettivo e della forza apparente di trascinamento (9 kg verso l'alto) dà 63 kg: è l'indicazione della bilancia (peso apparente).

(d) Quando la forza apparente di trascinamento fosse 24 kg (un terzo del peso) verso il basso, e cioè l'accelerazione del montacarichi (e del blocco) fosse  $g/3$  verso l'alto. Sul blocco agirebbe in tal caso una forza complessiva pari a un terzo del peso (24 kg) verso l'alto.

(e) Quando la forza di trascinamento fosse uguale e contraria al peso, quando cioè il montacarichi avesse accelerazione  $g$  verso il basso (caduta libera).

(f) Come se la gravità fosse annullata: resterebbe solo la forza proveniente dal filo, perpendicolare alla velocità della pallina. La velocità della pallina manterrebbe sempre lo stesso valore, e la pallina si muoverebbe nel piano originario di oscillazione mantenendosi sempre alla stessa distanza dal punto di sospensione: moto circolare uniforme.

(g) Il peso apparente è diretto verso l'alto quando la forza di trascinamento è diretta verso l'alto ed è più grande del peso: questo accade se l'accelerazione del montacarichi è diretta verso il basso con valore superiore a  $g$ .

- 2 Se assumiamo che nei riferimenti inerziali il moto della capsula sia sostanzialmente traslatorio (con accelerazione pari all'accelerazione di gravità, dato che per ipotesi l'unica forza applicata è quella gravitazionale), la forza apparente di trascinamento  $-m\vec{a}$  è uguale e contraria al peso (come sul montacarichi in caduta libera): la bilancia segna zero.

- 3 Sì, la figura è corretta. La vaschetta scivola con accelerazione  $g \sin \varphi$  diretta parallelamente al piano d'appoggio verso il basso. La superficie libera del liquido (che ha massa  $m$ ) si dispone perpendicolarmente al peso apparente  $m\vec{g}' = m\vec{g} - m\vec{a}$ , dove  $\vec{a}$  (accelerazione di trascinamento) è l'accelerazione della vaschetta. Il fatto che sia  $a = g \sin \varphi$  significa (fig. 1) che il peso apparente  $m\vec{g}'$  è perpendicolare al piano inclinato: il quale risulta dunque parallelo alla superficie del liquido.

Se ci fosse attrito, l'accelerazione della vaschetta sarebbe  $a' < g \sin \varphi$ , l'accelerazione  $\vec{g}'$  formerebbe col piano inclinato un angolo minore di  $90^\circ$ , la superficie libera del liquido non risulterebbe più parallela al piano inclinato (fig. 2).

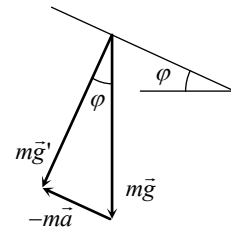


Fig. 1

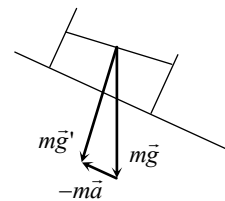


Fig. 2

- 4 La forza apparente di trascinamento (la forza centrifuga  $m\omega^2 R$ ) dovrebbe avere valore identico al peso  $mg$ . Dovrebbe cioè risultare  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{6,37 \times 10^6 \text{ m}}} = 1,24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ . Per fare un giro completo su se stessa la Terra impiegherebbe in tal caso  $(2\pi \text{ rad}) / (1,24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}) = 5,067 \times 10^3 \text{ s} \approx 1^{\text{h}} 24^{\text{min}}$ .

A latitudine  $\lambda$  la situazione si presenta come in fig. 3. Essendo immobile nel riferimento Terra il corpo sottoposto a pesatura ( $v' = 0$ ), la forza di Coriolis su di esso è zero: il peso apparente è quindi la somma del peso effettivo e della forza centrifuga di trascinamento (orizzontale verso destra in figura), e differisce dal peso effettivo sia in valore che in direzione. La differenza di direzione è legata al componente orizzontale (parallelo cioè al piano orizzontale del luogo) della forza centrifuga (modulo  $m\omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda$ , valore massimo per  $\lambda = 45^\circ$ , direzione lungo il meridiano verso l'equatore): nell'emisfero Nord (Sud) il peso apparente è quindi diretto non verso il centro della Terra ma verso un punto dell'asse terrestre posto leggermente al di sotto (al di sopra). L'angolo  $\varphi$  tra direzione del peso effettivo (direzione «radiale») e direzione del peso apparente (perpendicolare alla superficie dei liquidi in quiete) è in realtà assai piccolo, cosicché la differenza di valore tra peso apparente  $P'$  e peso effettivo  $P$  può essere imputata al solo componente radiale della forza centrifuga. La bilancia segnerebbe un peso  $P' = mg - m\omega^2 R \cos^2\lambda$ , e quindi nel caso specifico da noi considerato ( $mg = m\omega^2 R$ ) segnerebbe  $P' = mg(1 - \cos^2\lambda) = mg \sin^2\lambda$ .

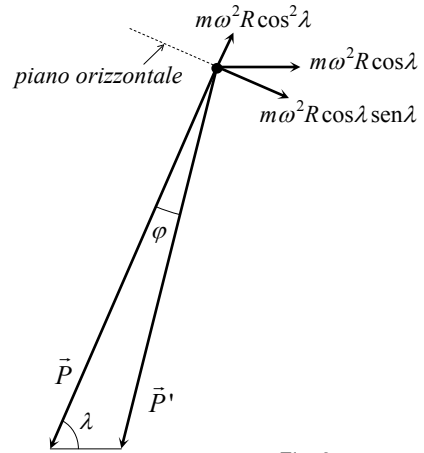


Fig. 3

- 5 Il valore dell'accelerazione di trascinamento è  $v^2/R = (120 \text{ km/h})^2 / (1000 \text{ m}) = [(120 \times 1000 \text{ m}) / (3600 \text{ s})]^2 / 1000 \text{ m} = 1,11 \text{ m/s}^2$ , in direzione centripeta. La forza apparente di trascinamento ( $-m\vec{a}_{tr}$ ) è più debole del peso (78 kg) nella misura stessa in cui l'accelerazione di trascinamento è più debole dell'accelerazione di gravità, vale quindi  $78 \times (1,11 / 9,81) \text{ kg} = 8,83 \text{ kg}$ , con direzione centrifuga. Se il viaggiatore si sposta nella direzione di marcia del treno, l'accelerazione di Coriolis ( $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ ) ha anch'essa direzione centripeta, il suo valore è  $2\omega v' = 2(v/R)v' = 2[(120 \times 1000 \text{ m} / 3600 \text{ s}) / 1000 \text{ m}](1 \text{ m/s}) = 0,0667 \text{ m/s}^2$ . La forza di Coriolis è diretta in senso centrifugo, il suo valore ( $78 \text{ kg} \times 0,0667 / 9,81 = 0,530 \text{ kg}$ ) si somma a quello della forza di trascinamento.

Se invece il viaggiatore si sposta in senso opposto al senso di marcia del treno, la forza di Coriolis è diretta in senso centripeto, e quindi il suo valore si sottrae a quello della forza centrifuga di trascinamento.

- 6 Nel riferimento della piattaforma la pallina gira attorno all'asse  $z$  lungo una circonferenza di raggio  $d$  con velocità angolare  $-\bar{\omega}$ . Possiede pertanto un'accelerazione radiale  $-\omega^2 d \bar{u}_r$  (fig. 4) e un'accelerazione tangenziale  $-\alpha d (\bar{u}_z \wedge \bar{u}_r)$ . Essendo il filo verticale, dal filo proviene solo la forza verticale che neutralizza il peso. L'accelerazione della pallina proviene dalle forze apparenti: la forza di trascinamento  $-m\bar{a}_{tr} = m\omega^2 d \bar{u}_r$  -

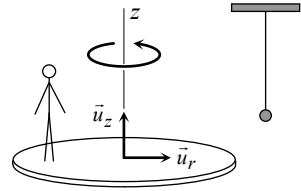


Fig. 4

- $m\alpha d (\bar{u}_z \wedge \bar{u}_r)$  e la forza di Coriolis  $-2m\bar{\omega} \wedge \bar{v}' = -2\omega^2 d \bar{u}_r$ . Il risultante della forza di Coriolis e del componente radiale della forza di trascinamento, diretto verso  $z$  con modulo  $m\omega^2 d \bar{u}_r$ , produce l'accelerazione centripeta; il componente tangenziale della forza di trascinamento produce l'accelerazione tangenziale.

- 7 Le forze agenti su  $K$  sono il peso  $\bar{P}$  e la reazione del vincolo  $\bar{V}$ , della quale sappiamo a priori che, per l'assenza di attrito, è perpendicolare al piano inclinato. L'accelerazione di  $K$  nel riferimento fisso è allora

$$[A] \quad \bar{a} = \frac{\bar{P} + \bar{V}}{m} = \bar{g} + \frac{\bar{V}}{m}. \text{ Sappiamo però}$$

anche che, se  $\bar{A}$  è l'accelerazione del cuneo (accelerazione di trascinamento) e  $\bar{a}'$  l'accelerazione di  $K$  rispetto al cuneo, è

$$[B] \quad \bar{a} = \bar{A} + \bar{a}', \text{ dove di } \bar{a}' \text{ si sa a priori che è parallela al piano inclinato. Come la fig. 5 chiarisce, l'insieme della [A] e della [B] determina in modo univoco sia } \bar{a}', \text{ sia } \bar{a}, \text{ sia}$$

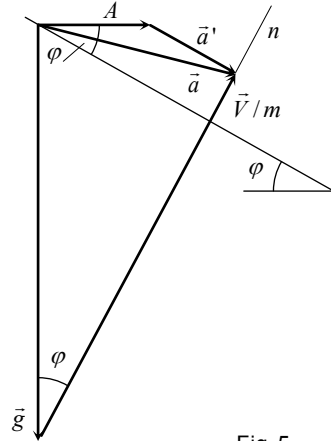


Fig. 5

$\bar{V}/m$  (e quindi la reazione del vincolo). L'accelerazione relativa è  $a' = g \sin \varphi - A \cos \varphi$ , l'accelerazione assoluta ha componente orizzontale  $a_x = A + a' \cos \varphi$  e componente verticale  $a_y = a' \sin \varphi$ . Tutti i valori trovati sono costanti nel tempo. Il moto relativo, in cui la velocità è parallela all'accelerazione, è quindi rettilineo uniformemente vario (la velocità varia linearmente nel tempo); il moto assoluto è uniformemente accelerato (vettore  $\bar{a}$  costante) con traiettoria parabolica e asse della parabola parallelo ad  $\bar{a}$  (se però, nel momento in cui il cuneo comincia ad accelerare, la velocità assoluta di  $K$  è zero o è parallela ad  $\bar{a}$ , il moto assoluto di  $K$  è rettilineo e uniformemente vario). Essendo costante in valore e direzione la forza  $-\bar{V}$  del blocchetto sul cuneo, il moto di quest'ultimo (uniformemente vario per ipotesi) richiede che anche la forza orizzontale esterna ad esso applicata sia costante.

Casi particolari. Se, a partire dalla situazione rappresentata in fig. 5, l'accelerazione  $\vec{A}$  del cuneo aumenta,  $a'$  diminuisce gradualmente fino ad annullarsi (moto relativo uniforme) per  $A = g \operatorname{tg} \varphi$ , mentre la reazione  $\vec{V}$  diventa via via più grande. Se  $\vec{A}$  continua a crescere, a un certo punto  $\vec{a}'$  cambia direzione (l'espressione  $g \operatorname{sen} \varphi - A \cos \varphi$  di  $a'$  diventa negativa) e diventa a sua volta (come  $\vec{V}/m$ ) sempre più grande. Se  $\vec{A}$  si annulla,  $\vec{a}$  ha valore  $g \operatorname{sen} \varphi$  e coincide con  $\vec{a}'$  (il cuneo si muove di moto traslatorio, rettilineo e uniforme rispetto al riferimento fisso, quindi nei due riferimenti l'accelerazione è la stessa). Se  $\vec{A}$  cambia direzione e diventa sempre più grande,  $\vec{a}'$  è diretta nel senso della discesa e diventa a sua volta sempre più grande, mentre la direzione di  $\vec{a}$  si approssima alla verticale e la reazione  $\vec{V}$  diventa sempre più piccola. Per  $A = g/\operatorname{tg} \varphi$  la reazione  $\vec{V}$  si annulla e  $\vec{a}$  coincide con l'accelerazione di gravità. Se  $\vec{A}$  cresce ulteriormente  $\vec{V}$  dovrebbe assumere il carattere di una forza di richiamo verso il piano inclinato: ma se il blocchetto è semplicemente appoggiato ciò che in realtà si verifica è il suo distacco dal cuneo, e quindi la sua caduta con accelerazione  $\vec{g}$ .

- 8 Dato che, per l'assenza di attrito tra cuneo e piano d'appoggio, nessuna forza esterna agisce sul sistema in direzione orizzontale, il centro di massa del sistema non subisce spostamenti orizzontali: il cuneo si sposta perciò verso sinistra con velocità  $\vec{V}$  e il blocchetto verso destra con velocità  $\vec{v}_x$  tale che

[A]  $MV = mv_x$ . Se  $\vec{v}$  è la velocità del blocchetto e  $h$  il suo spostamento verticale, per il teorema dell'energia cinetica risulta

[B]  $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgh$ . Il lavoro complessivo delle forze interne è zero: la

forza del blocchetto sul cuneo, perpendicolare al piano inclinato per l'assenza di attrito, compie il lavoro positivo che produce l'energia cinetica acquisita dal cuneo (lo spostamento del cuneo nella direzione della normale al piano inclinato è equivero alla forza); la forza del cuneo sul blocchetto compie un lavoro uguale e contrario (sottraendo al blocchetto parte dell'energia cinetica prodotta dal lavoro del peso) perché, mantenendosi il blocchetto a contatto del cuneo, il suo spostamento nella direzione della perpendicolare al piano inclinato è identico a quello del cuneo.

La velocità  $\vec{v}$  del blocchetto (fig. 6) può esprimersi sia come  $\vec{v}_x + \vec{v}_y$ , sia anche come somma del velocità  $\vec{v}'$  relativa con la velocità  $\vec{V}$  di trascinamento:

[C]  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}' + \vec{V}$ . Essendo  $\vec{v}'$  parallela al piano inclinato, risulta

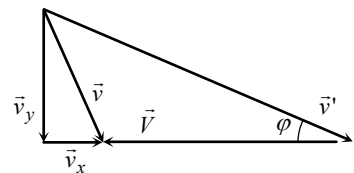


Fig. 6

[D]  $\frac{v_y}{v_x + V} = \operatorname{tg}\varphi$ . Tenuto conto della [A], della [C] e della [D], la [B] diventa

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \frac{MV}{m} \right)^2 + \frac{m}{2} [(v_x + V)\operatorname{tg}\varphi]^2 = mgh, \text{ da}$$

$$\text{cui } V = \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\varphi}{(m+M)(M+m\sin^2\varphi)}}.$$

- 9 Nel riferimento fisso il lavoro è indeterminato: essendo uguale all'incremento dell'energia cinetica della pallina, dipende dalla velocità iniziale e da quella finale della pallina (cioè del carrello), quindi è diverso a seconda dell'istante in cui l'operazione ha inizio e a seconda della sua durata.

Nel riferimento del carrello la pallina ha energia cinetica iniziale e finale uguale a zero, perciò il lavoro  $W$  da compiere è uguale e contrario alla somma del lavoro  $W_g$  compiuto dal peso e del lavoro  $W_{tr}$  compiuto dalla forza apparente di trascinamento, che è diretta in senso opposto all'accelerazione del carrello (fig. 7), con modulo  $ma$  (la reazione del vincolo non lavora, perché se durante lo spostamento della pallina il filo resta teso la pallina si sposta perpendicolarmente a tale forza, e se il filo non resta teso la forza del filo è zero):

$$W = -(W_g + W_{tr}) = -[mg(L - L\cos\theta) - maL\sin\theta]. \text{ Tenuto conto che } \operatorname{tg}\theta = a/g \text{ (pag. 363, risp. 22), si ottiene } W = mgL(1 - \cos\theta) / \cos\theta.^{[9]}$$

- 10 La superficie libera del liquido si dispone perpendicolarmente al filo del pendolo (direzione del peso apparente, somma del peso e della forza apparente di trascinamento), quindi forma col piano orizzontale un angolo  $\theta$  definito da  $\operatorname{tg}\theta = a/g$ . Il valore massimo di  $\theta$  è definito (fig. 8) da  $\operatorname{tg}\theta_{\max} = (H - h)/R$ .

L'inclinazione della superficie libera viene spiegata dall'osservatore inerziale nei termini seguenti. Si consideri un riferimento cartesiano  $xy$  solidale col carrello, con l'origine  $O$  nel punto più basso della superficie libera (fig. 9), l'asse  $y$  diretto verticalmente verso l'alto, l'asse  $x$  diretto in senso opposto all'accelerazione del sistema. Si consideri inoltre una porzione di liquido avente la forma di un cilindro orizzontale disposto parallelamente alla direzione di marcia, con basi di area infinitesima  $dS$ , una situata in  $O$ , l'altra a distanza  $x$ . Per il fatto che le due basi sono infinitamente piccole la pressione su di esse potrà essere considerata uniforme. Non

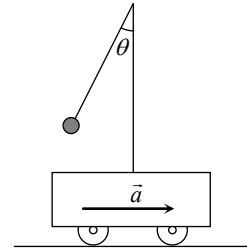


Fig. 7

<sup>9</sup> Lo stesso risultato si ottiene annullando la somma del lavoro  $W$  da compiere e del lavoro  $W'_g$  del peso apparente, e osservando che nel riferimento accelerato il peso apparente  $\vec{P}'$  è diretto come il filo del pendolo e ha valore  $P' = P/\cos\theta$ , e che quando la pallina viene portata sotto il punto di sospensione il suo spostamento nella direzione di  $\vec{P}'$  è controverso a  $\vec{P}'$  e vale  $L - L\cos\theta$ .

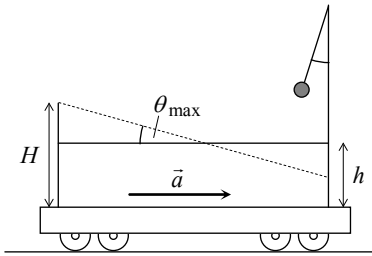


Fig. 8

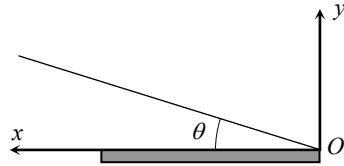


Fig. 9

essendoci moto relativo tra le varie parti del liquido, le forze tangenziali dovute alla viscosità del liquido non agiscono: sulla superficie del cilindro agiscono quindi solo forze perpendicolari alla superficie stessa, e ne deriva che le uniche forze agenti sul cilindro nella direzione di marcia sono quelle applicate alle due basi per effetto della pressione. Se la pressione atmosferica è  $p_0$ , sulla base posta nell'origine  $O$  la forza è  $p_0 dS$  con direzione verso sinistra, sull'altra base, posta a profondità  $y$ , la forza è  $(p_0 + \rho gy)dS$  con direzione verso destra<sup>[10]</sup>: la forza risultante è quindi  $F = \rho gy dS$  verso destra. Essendo tale forza responsabile dell'accelerazione del liquido contenuto nel cilindro (liquido la cui massa è  $m = \rho x dS$ ) risulterà  $F = \rho gy dS = ma = \rho x dS a$ , da cui  $y = ax/g$ . Tale relazione è ottenibile per qualsiasi  $x$  compreso tra 0 e  $2R$ , il che significa che  $y = ax/g$  è l'equazione della superficie libera, la quale quindi è un piano avente inclinazione  $\theta = \text{arctg}(a/g)$  sul piano orizzontale<sup>[11]</sup>.

- 11 La bilancia misura il valore della forza che su di essa viene esercitata da parte del corpo sottoposto a pesatura, e quindi (terza legge di Newton) anche il valore della forza  $\vec{V}$  che la bilancia esercita sul corpo in questione. In tutti i riferimenti inerziali si vedono le stesse accelerazioni e le stesse forze: possiamo quindi porci, per comodità, nel particolare riferimento inerziale  $K$  in cui l'asse terrestre è (praticamente) immobile, dove si vedono sottoposti a pesatura un corpo  $A$  immobile al Polo Nord e un corpo  $B$  che invece percorre una circonferenza (la linea dell'equatore) con velocità  $\omega R + v$  ( $\omega$  è la velocità di rotazione della Terra). L'immobilità di  $A$  richiede che sia zero la somma delle forze ad esso applicate:  $\vec{V} + \vec{P} = 0$ , il che significa che l'indicazione della bilancia mostra il valore effettivo del peso. Per il corpo  $B$ , viceversa, la forza risultante  $\vec{V} + \vec{P}$  deve essere diretta verso il centro della Terra e deve avere valore  $m(\omega R + v)^2/R = (\omega^2 R + 2\omega v + v^2/R)$ .

<sup>10</sup> La pressione è stata espressa con la legge di Stevino nonostante la situazione di non equilibrio della massa liquida. Come sappiamo, ciò è lecito in quanto la legge di Stevino (secondo la quale la pressione a profondità  $h$  è  $p = p_0 + \rho gh$ ) proviene da considerazioni di equilibrio alla traslazione verticale, condizione che qui è verificata (la velocità verticale di ogni punto del liquido è costantemente uguale a zero).

<sup>11</sup> Più precisamente, l'equazione trovata è quella dell'intersezione della superficie libera col piano verticale  $xy$ .

Ciò richiede che la forza  $\vec{V}$  (fig. 10) sia inferiore in modulo al peso  $m\vec{g}$ , e precisamente che il modulo di  $V$  sia

$$[1] \quad V = mg - m(\omega^2 R + 2\omega v + v^2/R).$$

È questa pertanto l'indicazione della bilancia. Per chiarezza di rappresentazione, in fig. 10 le proporzioni sono state fortemente alterate: in realtà, il valore della forza  $V$  differisce da quello del peso  $mg$  per meno dell'1%.

*Dal punto di vista dell'osservatore terrestre*, il corpo  $B$  è soggetto, oltre che al peso e alla forza  $\vec{V}$  della bilancia, alle forze apparenti di trascinamento e di Coriolis, entrambe controverse al peso come  $\vec{V}$ , la prima di valore  $m\omega^2 R$ , la seconda di valore  $2m\omega v$ . Rispetto alla Terra il corpo  $B$  procede lungo l'equatore con velocità  $v$ , è quindi soggetto a una forza risultante di valore  $mv^2/R$  diretta nel senso del peso. Ciò significa che  $P = V + m\omega^2 R + 2m\omega v + mv^2/R$ , e quindi che la forza indicata dalla bilancia è  $V = mg - m\omega^2 R - 2m\omega v - mv^2/R$ , come già trovato (si veda la [1]) nel riferimento inerziale  $K$ . Quanto al corpo  $A$ , situato al Polo Nord e immobile nel riferimento Terra, sono zero sia la forza di trascinamento (perché, trovandosi  $A$  sull'asse terrestre, è zero l'accelerazione di trascinamento) che la forza di Coriolis (perché è zero la velocità del corpo rispetto al Terra): pertanto il peso è uguale in modulo e opposto in direzione alla forza della bilancia, il che spiega l'indicazione della bilancia.

*Nel riferimento del treno* il corpo  $B$  è immobile, quindi deve essere zero la somma delle forze ad esso applicate: la forza di Coriolis è zero perché rispetto al treno la velocità di  $B$  è zero, la forza di trascinamento è  $m(\omega R + v)^2/R$ , con direzione centrifuga come la forza  $\vec{V}$  della bilancia. Deve quindi essere  $P = V + m(\omega R + v)^2/R$ , relazione che fornisce per  $\vec{V}$  il valore espresso dalla [1].

Per quanto riguarda il corpo  $A$ , la forza di Coriolis è zero perché, dato che il treno ruota attorno all'asse terrestre, ogni punto posto, come  $A$ , sull'asse terrestre ha rispetto al treno velocità zero. La forza di trascinamento è a sua volta zero perché, dal punto di vista di  $K$ , se il corpo  $A$  fosse rigidamente collegato al treno resterebbe immobile, come tutto l'asse terrestre (accelerazione di trascinamento uguale a zero). Dunque anche rispetto al treno sul corpo  $A$ , che risulta immobile, agiscono solo il peso e la forza della bilancia, il che giustifica l'indicazione della bilancia.

- 12 Punto di vista dell'osservatore inerziale. Si consideri (fig. 11) una porzione cilindrica di liquido ad asse orizzontale e basi di area infinitesima  $dS$ , la prima sull'asse di rotazione (asse  $y$  di un riferimento cartesiano solidale col contenitore rotante, avente l'origine sulla base) all'altezza della superficie libera del liquido, la seconda a distanza  $x$ .

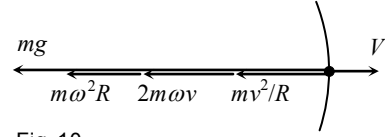


Fig. 10

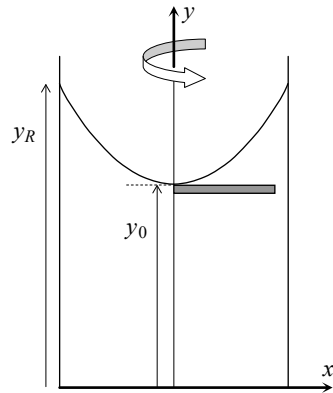


Fig. 11

Essendo il liquido privo di movimenti interni e quindi di viscosità, sulla superficie di tale cilindro agiscono solo forze ortogonali. Perciò, il fatto che il centro di massa del cilindro ruoti attorno a  $y$ , a distanza  $x/2$  da  $y$ , richiede che la pressione sulla seconda base, uguale per la legge di Stevino<sup>[12]</sup> a  $p_0 + \rho g(y - y_0)$ , sia superiore alla pressione  $p_0$  sulla prima base: precisamente, la differenza  $\rho g(y - y_0)$  moltiplicata per l'area  $dA$  deve essere uguale alla massa del cilindro ( $\rho x dA$ ) moltiplicata per l'accelerazione  $\omega^2 x/2$  del centro di massa. Se ne ricava  $y = y_0 + \omega^2 x^2/2g$ . Essendo riferibile a qualsiasi  $x$  (tra zero e il raggio  $R$  del recipiente) e a qualsiasi direzione radiale, tale relazione rappresenta l'equazione della superficie libera del liquido rotante: si tratta quindi di un paraboloide.

Nel riferimento rotante si arriva allo stesso risultato se si tiene conto che la superficie libera del liquido deve essere ortogonale in ogni punto alla direzione del peso apparente, e quindi alla direzione dell'accelerazione di gravità apparente  $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$  (fig. 12), dove  $\vec{a}$  è l'accelerazione di trascinamento, diretta in senso centripeto con valore  $\omega^2 x$  (l'accelerazione di Coriolis è zero perché il liquido ha velocità relativa zero). Essendo la superficie libera ortogonale in ogni punto al vettore  $\vec{g}'$ , in ogni punto della superficie la pendenza  $dy/dx = \text{tg} \varphi$  sarà uguale a  $\omega^2 x/g$ . Per integrazione si ottiene perciò  $y = y_0 + \omega^2 x^2/2g$ . Si vede che la forma geometrica della superficie dipende solo da  $\omega$  (non dal raggio del cilindro o dalla densità del liquido).

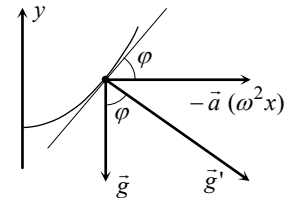


Fig. 12

Si sa dalla geometria che il volume del paraboloide è la metà del volume del cilindro circoscritto. Ne deriva (fig. 13) che il volume del liquido posto ad altezza superiore a  $y_0$  (volume evidentemente uguale sia nel caso di liquido in rotazione che nel caso di liquido in quiete) è la metà del volume del cilindro che ha la base inferiore ad altezza  $y_0$  e la base superiore ad altezza  $y_R$ : il che richiede che, detta  $h$  l'altezza raggiunta dal liquido quando è immobile, sia  $y_R - y_0 = 2(h - y_0)$ , che significa

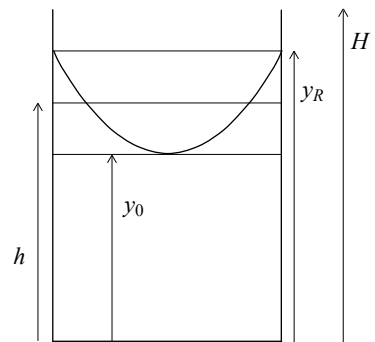


Fig. 13

$h = (y_0 + y_R)/2$  (per un liquido in rotazione, il punto più basso e i punti più alti della superficie libera sono quindi equidistanti dalla quota originaria  $h$ ). Dunque  $y_R = 2h - y_0$ , ma essendo anche (si veda l'equazione della superficie libera)  $y_R = y_0 + \omega^2 R^2/2g$ ,

<sup>12</sup> Qui applicabile perché il liquido è in quiete rispetto alla direzione verticale.

si ottiene  $y_R = h + \omega^2 R^2 / 4g$  (e  $y_0 = h - \omega^2 R^2 / 4g$ ). In definitiva

$$\omega = \sqrt{\frac{4g(y_R - h)}{R^2}}, \text{ e il massimo valore di } \omega \text{ si ottiene dando a } y_R \text{ il massimo va-}$$

lore possibile, l'altezza  $H$  del recipiente:  $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4g(H - h)}{R^2}}$ .

Si osservi che, essendo  $y_0 = h - \omega^2 R^2 / 4g$ , nel caso  $\omega > \sqrt{\frac{4gh}{R^2}}$  l'altezza  $y_0$  risulterebbe negativa: il vertice del paraboloide si troverebbe cioè *al di sotto* del fondo del recipiente, che risulterebbe parzialmente scoperto nella zona centrale (fig. 14). Se il recipiente ruotasse attorno a un asse verticale diverso dall'asse geometrico, il paraboloide si sposterebbe lateralmente (fig. 15) in modo da avere in ogni caso il proprio vertice sull'asse di rotazione.

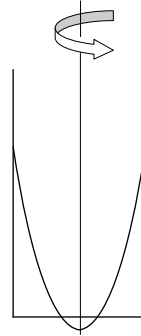


Fig. 14

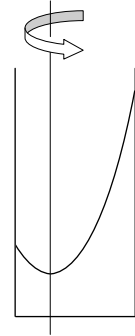


Fig. 15