Capitolo 13

Dinamica rotazionale

13.1 Momento angolare di un punto materiale

1. Si definisce **momento angolare** (o «momento della quantità di moto») di un punto materiale P rispetto a un polo O la grandezza

[A] $\vec{L} = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v}$

dove m e $\vec{v}$ rappresentano la massa e la velocità di P, e il prodotto $m\vec{v}$ la sua quantità di moto.

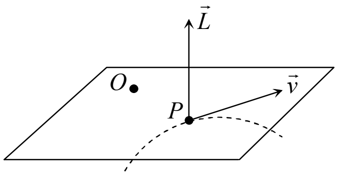

Fig. 1 – *Il momento angolare $\vec{L}$ di P rispetto a O è ortogonale al piano contenente O e la velocità $\vec{v}$ di P.*

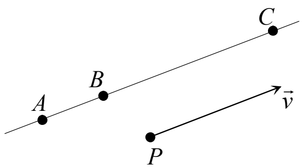

Fig. 2 – *Rispetto ai punti A, B e C il momento angolare di P è lo stesso.*

Il vettore $\vec{L}$, perpendicolare al piano contenente il polo O e il vettore $\vec{v}$ (fig. 1), forma dunque col vettore posizione $\overrightarrow{OP}$ e con la velocità $\vec{v}$ una terna destra e ha modulo $|\vec{L}| = mvd$, dove d rappresenta la distanza del polo O dalla retta sulla quale, all'istante considerato, P si sta spostando. Ne deriva che il momento angolare di un punto avente velocità $\vec{v}$ è lo stesso rispetto a tutti i punti di una retta parallela a $\vec{v}$ (fig. 2).

2. Più in generale, è immediato riconoscere[1] che il momento angolare $\vec{L}_A$ rispetto a un polo A e il momento angolare $\vec{L}_B$ rispetto a un polo B sono legati dalla relazione

[B] $\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \times m\vec{v}$.

Se $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\vec{v}$, in tale relazione il prodotto vettoriale si annulla, e quindi, come già trovato, il momento angolare rispetto ad A e il momento angolare rispetto a B sono identici.

---

[1] Vedi domanda 2, pag. 354.

3. Nota: la denominazione di «momento angolare» è in qualche misura equivoca, perché può suggerire l'idea di doversi necessariamente riferire a traiettorie curvilinee o a movimenti rotatori[2]. Si noti che in realtà tale restrizione di significato *non esiste in alcun modo*: il concetto di momento angolare può essere riferito anche a punti che si muovono di moto rettilineo e, come vedremo, a corpi che si muovono di moto traslatorio (e cioè senza rotazioni). In tali casi tuttavia il concetto di momento angolare e le relative proprietà non aggiungono nulla a quanto è più direttamente deducibile dalle leggi di Newton: è solo nell'ambito della cosiddetta dinamica rotazionale che le leggi relative al momento angolare mostrano tutta la loro utilità.

4. Nei riferimenti inerziali vale il **teorema del momento angolare**

[C] $$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

dove $\vec{\tau}$ è il momento della forza (risultante) agente sul punto P ed $\vec{L}$ è il momento angolare di P. Vale a dire: in ogni istante, *il momento della forza applicata a P mostra in quale direzione e con quale rapidità viene incrementato il momento angolare di P*.

Tale relazione – che non rappresenta una nuova legge della meccanica ma semplicemente, come vedremo subito, una conseguenza della seconda legge di Newton – vale sotto la doppia condizione che il momento della forza e il momento angolare *siano riferiti entrambi a uno stesso polo*, e che tale punto *abbia velocità zero oppure velocità parallela a quella di P*.

5. Dimostrazione della [C]. Il punto P, di massa m, velocità $\vec{v}$ e quantità di moto $m\vec{v}$, ha, rispetto al polo O (fig.3), momento angolare

$\vec{L} = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v} = (\vec{r}_P - \vec{r}_O) \times m\vec{v}.$ Allora

[D] $$\mathrm{d}\vec{L} / \mathrm{d}t = (\vec{v}_P - \vec{v}_O) \times m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \times m\vec{a}.$$

Essendo $m\vec{a}$ la forza complessivamente agente su P (Newton) e $\overrightarrow{OP} \times m\vec{a}$ il momento $\vec{\tau}$ di tale forza rispetto a O, dalla [D] otteniamo

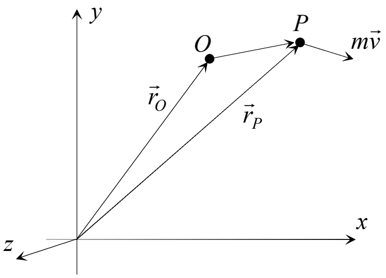

Fig. 3

[E] $$\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L} / \mathrm{d}t + \vec{v}_O \times m\vec{v}$$

che è la relazione più generale tra momento della forza risultate e momento angolare, e coincide con la [C] quando il prodotto vettoriale a secondo membro è zero (polo fisso oppure in moto parallelamente al moto di P).

6. Primo esempio. Se un punto P è libero da forze (ovvero, se la somma delle forze applicate a P si mantiene uguale a zero), nella [C] è costantemente $\tau = 0$, e quindi

[2] Da questo punto di vista, la denominazione di «momento della quantità di moto», abitualmente usata nella letteratura scientifica italiana fino a qualche anno fa ma ormai alquanto desueta, appare senz'altro preferibile.

il momento angolare di P rispetto a un *qualsiasi* punto fisso O è costante in direzione e valore. Chiaramente, ciò richiede che P si muova di moto rettilineo e uniforme: ritroviamo così il principio d'inerzia.

7. Secondo esempio. Se sul punto P agisce solo una **forza centrale**, una forza cioè la cui retta d'azione passa sempre da un determinato punto fisso O, il momento della forza rispetto a O è sempre zero, e dunque per la [C] è sempre zero anche l'incremento $\mathrm{d}\vec{L}$ del momento angolare rispetto a O, il che significa che rispetto a O il momento angolare si mantiene costante in valore e direzione. Ne consegue: primo, che P si muove in un piano contenente O (in effetti, se è costante la direzione di $\vec{L}$ è sempre lo stesso il piano contenente il polo O, il punto P e la sua velocità); secondo, che la *velocità areale* di P è costante[3].

È quanto accade, con buona approssimazione, per un pianeta nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole (seconda legge di Keplero), visto che la forza agente sul pianeta si identifica in pratica con l'attrazione gravitazionale proveniente dal Sole, ed è quindi sempre diretta verso il Sole.

8. Terzo esempio. Un punto P si muove di moto circolare uniforme attorno a O (fig.4). Se, per effetto di una forza diretta verso O, il raggio della circonferenza diminuisce da r' a r'', il momento angolare di P rispetto a O resta immutato perché il momento della forza rispetto a O è zero: pertanto, essendo mvr il valore del momento angolare (massa di P per velocità di P per raggio della circonferenza), la velocità di P varierà in modo inversamente proporzionale a r.

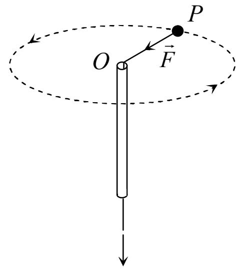

Fig.4 – *La forza di richiamo verso O viene esercitata su P tirando il filo verso il basso.*

9. Definizione: si chiama **momento angolare** di un punto P **rispetto a un asse** z (simbolo $\vec{L}_z$) il componente z del momento angolare di P rispetto a un qualsiasi punto di z (fig.5): se A e B sono due punti di z, la relazione $\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB}\times m\vec{v}$ ci dice in effetti che i due momenti angolari (quello rispetto ad A e quello rispetto a B) differiscono solo per un termine perpendicolare al vettore $\overrightarrow{AB}$, e cioè a z, per cui i rispettivi componenti z coincidono. In particolare, $\vec{L}_z$ coincide col componente z del momento angolare di P rispetto al punto C, piede della perpendicolare condotta da P a z.

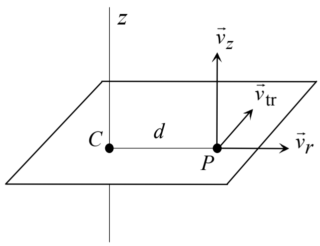

Fig. 5 – *Solo il componente trasverso della velocità ha effetto sul momento angolare di P rispetto a z.*

3 La velocità areale di P attorno a O è infatti $\vec{v}^* = (\overrightarrow{OP}\times\vec{v})/2 = \vec{L}/2m$.

10. Si vede allora sùbito che il modulo del momento angolare di P rispetto a z è dato dal prodotto della massa m di P per la distanza d di P da z e per il valore della «velocità trasversa» (v_{tr}) di P, cioè per la velocità di P nella direzione della perpendicolare al piano che contiene P e z:

[F] $\quad L_z = m v_{tr} d.$

Gli altri due componenti della velocità di P (il componente assiale $\vec{v}_z$, parallelo a z, e il componente radiale $\vec{v}_r$) non hanno alcun effetto sul componente z del momento angolare di P rispetto a C: il vettore $\overrightarrow{CP} \times m\vec{v}_r$ ha modulo zero, il vettore $\overrightarrow{CP} \times \vec{v}_z$ ha direzione trasversale e ha quindi componente z nullo (si noti che il momento angolare di P rispetto a C è parallelo a z solo quando parallelamente a z la velocità di P è zero, come per esempio accade quando P ruota attorno a z).

11. Se z è un asse fisso, la velocità trasversa di P rispetto a z è sempre esprimibile (indipendentemente dal fatto che P stia ruotando attorno a z, quindi ad esempio anche se la traiettoria di P è rettilinea) come ωd, dove ω ($= v_{tr}/d$) è la velocità con cui, all'istante che si considera, il piano che contiene P e z sta ruotando attorno a z[4]. Se quindi z è un asse fisso, per un punto materiale P si può scrivere sempre

[G] $\quad L_z = m d \omega d = m d^2 \omega = J_z \omega$

dove $J_z = md^2$ è il momento d'inerzia di P rispetto a z. Vale chiaramente anche la notazione vettoriale $\vec{L}_z = md^2\vec{\omega} = J_z\vec{\omega}$, dato che sia il momento angolare assiale $\vec{L}_z$ che la velocità angolare $\vec{\omega}$ sono diretti parallelamente a z verso un osservatore che considera antiorario il senso di rotazione del piano contenente P e z.

12. D'altra parte, quando z è un asse fisso tutti i suoi punti hanno velocità zero e quindi rispetto a tutti i suoi punti risulta $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$. Passando allora da tali vettori (che dipendono dal polo prescelto) ai corrispondenti componenti z (che viceversa non dipendono dal polo) otteniamo

[H] $\quad \vec{\tau}_z = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(J_z\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$, e in termini scalari

[I] $\quad \tau_z = \dfrac{\mathrm{d}(md^2\omega)}{\mathrm{d}t}.$

Vale a dire: il momento rispetto a z della forza applicata a P è uguale alla derivata temporale del momento angolare di P rispetto a z.

13. Supponiamo ad esempio che una pallina venga lanciata in una qualsiasi direzione non verticale lungo la superficie interna di un cilindro ad asse verticale (asse z):

---

[4] Se z non è fisso, ω dipende non solo da come si muove P, ma anche da come si muove z. Ad esempio, se z si muovesse parallelamente a P con la velocità di P, il piano contenente P e z non ruoterebbe affatto, per cui sarebbe $\omega = 0$.

se non c'è attrito, sia il peso della pallina che la reazione della superficie d'appoggio – le uniche forze applicate alla pallina – hanno, rispetto a z, momento zero. Per la [I] quindi, durante il moto della pallina il prodotto $md^2\omega$ si mantiene costante: ed essendo costante la distanza d della pallina da z, è necessariamente costante anche la sua velocità angolare attorno a z (è costante l'intervallo di tempo tra due consecutivi passaggi su una stessa generatrice del cilindro). Se il cilindro venisse sostituito da un imbuto, la costanza di L_z implicherebbe una velocità angolare inversamente proporzionale al quadrato della distanza d (se d diventa la metà, diventa un quarto il tempo necessario perché il piano contenente la pallina e l'asse z faccia un giro completo: la velocità lineare della pallina raddoppia, la lunghezza da percorrere dimezza).

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Se, rispetto a un determinato polo O, il momento angolare di un punto materiale P è costante in direzione e valore, il moto di P è sicuramente rettilineo e uniforme (*vero/falso*).

2 Si dimostri che, per un punto materiale P di massa m e velocità $\vec{v}$, il momento angolare rispetto al polo A e il momento angolare rispetto al polo B sono legati dalla relazione $\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \times m\vec{v}$.

3 Un punto K di massa m si muove di moto circolare uniforme con velocità v attorno al punto O. Se, per effetto di una forza $\vec{F}$ sempre diretta verso O, il raggio della circonferenza viene dimezzato, come varia il periodo del moto? quale lavoro ha compiuto $\vec{F}$?

4 Un meteorite di massa m passa a un dato istante da un punto P, avente rispetto al centro O della Terra posizione $\vec{r}_P$, con velocità $\vec{v}_P$ ortogonale a $\vec{r}_P$. Si determini per quale valore di $\vec{v}_P$ il punto P rappresenta il perigeo di una traiettoria ellittica avente l'apogeo a distanza $3r_P$ da O. Si assuma che, agli effetti del problema proposto, si possa trascurare la forza esercitata sul satellite dal Sole.

5 Si determini la velocità areale di un satellite della Terra in funzione della sua distanza dal centro della Terra al perielio e all'afelio. Si assuma che, agli effetti del problema proposto, si possa trascurare la forza esercitata sul satellite dal Sole.

6 Supponiamo che a un dato istante la forza con la quale il Sole attira un pianeta cessi di agire. Che accadrebbe da tale istante della velocità areale del pianeta rispetto al Sole? Si assuma che sul pianeta non agisca più alcuna forza.

7 Il punto materiale K viene lanciato con velocità orizzontale $\vec{v}_0$ lungo la parete interna di un contenitore emisferico di centro O e raggio R (fig. 6), in assenza

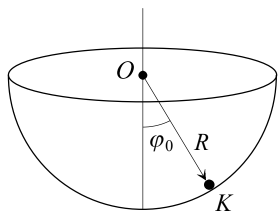

Fig. 6

di ogni attrito. Sapendo che inizialmente il vettore $\overrightarrow{OK}$ forma con la verticale un angolo φ_0,
(*a*) si trovi per quale valore della velocità iniziale *K* si manterrebbe indefinitamente alla stessa altezza;
(*b*) si determini quale valore minimo è necessario per la velocità iniziale se si vuole che *K* possa raggiungere il livello di *O*.

SOLUZIONI

1 Falso: quello che si può affermare è che la traiettoria di *P* è posta in un piano fisso β contenente *O*, e che lungo la traiettoria è costante il prodotto della distanza di *P* da *O* per il componente trasverso della velocità (componente della velocità nella direzione della retta posta su β e perpendicolare al segmento *OP*). Il moto di *P* potrebbe ad esempio essere circolare uniforme, con centro in *O*. Si pensi anche al moto dei pianeti, il cui momento angolare rispetto al Sole è costante.

2 $\vec{L}_A = \overrightarrow{AP}\times m\vec{v} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}]\times m\vec{v} = \overrightarrow{AB}\times m\vec{v} + \overrightarrow{BP}\times m\vec{v} = \overrightarrow{AB}\times m\vec{v} + \vec{L}_B$

3 Essendo la forza sempre diretta verso *O*, si mantiene costante il momento angolare rispetto a *O*, che per traiettorie circolari con centro in *O* ha valore mvr. Dato che r viene dimezzato, raddoppia la velocità v (il che comporta, essendo dimezzata la lunghezza della circonferenza, che il periodo è 4 volte minore). Il lavoro compiuto dalla forza corrisponde all'aumento dell'energia cinetica del punto rotante da $mv^2/2$ a $m(2v)^2/2$, ed è quindi dato da $3mv^2/2$.

4 Se sul satellite agisce solo la forza gravitazionale che lo attrae verso il centro *O* della Terra, il suo momento angolare rispetto a *O* è costante: in particolare, considerando il perigeo e l'apogeo (dove la velocità è ortogonale al vettore che definisce la posizione rispetto a *O*) deve essere $m v_P r_P = m v_A r_A = m v_A 3 r_P$, e quindi $v_A = v_P/3$ (fig. 7). Scriviamo allora che l'energia cinetica al perigeo è uguale all'energia cinetica all'apogeo più il lavoro delle forze gravitazionali tra l'apogeo e il perigeo:

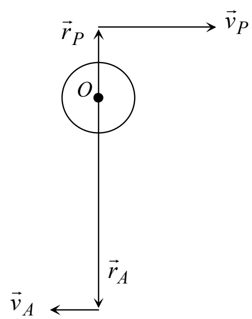

Fig. 7

$$\frac{mv_P^2}{2} = \frac{m(v_P/3)^2}{2} + GmM_\mathrm{T}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{3r_P}\right).$$

Di qui si ottiene $v_P = \sqrt{3GM/2r_P}$.

5 Se la distanza dal centro *O* della Terra è r_P al perielio e r_A all'afelio, per la conservazione del momento angolare rispetto a *O* le rispettive velocità saranno v_P e $v_A = v_P r_P / r_A$. Quando il satellite (che indichiamo con *C*) si trova all'afelio, la sua velocità areale è $v^* = \mathrm{d}S/\mathrm{d}t$, dove d*S* è l'area della superficie spazzata dal segmento *OC* nel tempuscolo d*t*. Essendo $\mathrm{d}S = ½\, r_A v_A \mathrm{d}t$, risulta $v^* = ½\, r_A v_A$. Se scriviamo

che l'energia cinetica al perielio è uguale all'energia cinetica all'afelio più il lavoro delle forze gravitazionali tra l'afelio e il perielio, e teniamo conto che

$v_P = v_A\, r_A / r_P$, otteniamo in definitiva $v_A = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{r_P + r_A}\dfrac{r_P}{r_A}}$, e quindi

$v^* = \frac{1}{2} r_A v_A = \sqrt{\dfrac{GM_T\, r_A r_P}{2\,(r_A + r_P)}}$. In particolare, per $r_A = r_P = R$ (orbita circolare) ritroviamo per v^* il valore $\sqrt{GMR/4}$ già calcolato al capitolo *Gravitazione*.

6 Manterrebbe lo stesso valore costante che aveva in precedenza, dato che rispetto al Sole il momento delle forze (applicate al pianeta) resterebbe uguale a zero. Il pianeta si muoverebbe di moto rettilineo uniforme: risulterebbero pertanto uguali (fig. 8) le aree dei triangoli spazzati dal segmento Sole-Pianeta in tempi uguali.

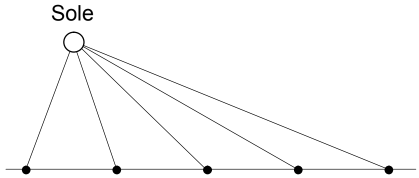

Fig. 8 – *I triangoli hanno tutti uguale base e uguale altezza.*

7 (*a*) Se K si mantiene alla stessa altezza il moto è circolare, e dato che, per l'assenza di spostamenti verticali, il peso non compie lavoro, il moto è uniforme. Il fatto che il componente verticale della velocità si mantenga uguale a zero indica che è zero il componente verticale della forza: $mg = V\cos\varphi_0$.

Il componente orizzontale di $\vec{V}$ fornisce invece l'accelerazione centripeta: $V\,\mathrm{sen}\varphi_0 = mv_0^2/(R\,\mathrm{sen}\varphi_0)$.

Facendo sistema delle due relazioni si ottiene $v_0 = \sqrt{gR\ \mathrm{sen}\varphi_0\ \mathrm{tg}\varphi_0}$.

(*b*) Dobbiamo imporre che al livello di O la velocità $\vec{v}$ di K sia priva di componente verticale, e abbia un componente orizzontale che soddisfa alla conservazione del momento angolare rispetto alla verticale z per O (il momento angolare rispetto a z è costante perché rispetto a z le due forze agenti su K, il peso e la reazione del vincolo – sempre perpendicolare alla superficie d'appoggio per l'assenza di attrito – hanno momento zero). Sarà pertanto $v_0\,(R\,\mathrm{sen}\,\varphi_0) = vR$, dunque al livello superiore la velocità è $v = v_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0$. Le due velocità incognite v_0 e v sono poi legate anche dal teorema dell'energia cinetica:

$\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv_0^2}{2} - mgR\cos\varphi_0$. Ponendo $v_0\,\mathrm{sen}\varphi_0$ al posto di v si ottiene

$v_0 = \sqrt{2gR/\cos\varphi_0}$ (velocità ovviamente superiore a quella determinata per il caso precedente). Per φ_0 tendente a 90° si ottiene che v_0 tende a zero nel primo caso, a $\sqrt{2gR}$ nel secondo (lo stesso risultato, si noti, che si otterrebbe per un lancio lungo un piano inclinato). Per φ_0 tendente a 0° si ottiene in ogni caso che v_0 tende a infinito.