

13.4 La seconda equazione cardinale della dinamica

1. A partire della seconda legge di Newton, si dimostra che per un *qualsivoglia* sistema materiale – non solo per un punto o per un corpo rigido – vale, nei riferimenti inerziali, il **teorema del momento angolare**:

$$[A] \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

dove $\vec{\tau}$ indica la somma dei momenti, rispetto a un opportuno polo O , delle forze applicate, ed \vec{L} è il momento angolare del sistema rispetto allo stesso polo.

- Se la velocità del CM è zero, nella [A] il polo può essere un punto qualsiasi.
- In caso contrario può essere o un punto avente velocità zero oppure un punto avente velocità parallela a quella del centro di massa del sistema (per esempio, il CM stesso).

Se dunque si assume come polo un punto fisso oppure il CM, la [A] può essere sempre applicata.

2. Per un generico punto P_i del sistema è infatti $\vec{\tau}_i = d\vec{L}_i/dt + \vec{v}_O \times m\vec{v}_i$ (relazione [E] di pag.351). Se scriviamo tale relazione per tutti i punti del sistema con riferimento a uno stesso polo O e sommiamo, otteniamo per il sistema nel suo insieme:

$$[B] \quad \sum \tau_i = d(\sum \vec{L}_i)/dt + \vec{v}_O \times \sum m\vec{v}_i$$

vale a dire

$$[C] \quad \vec{\tau} = d\vec{L}/dt + \vec{v}_O \times M\vec{v}_{CM}.$$

Tale relazione si riduce alla [A] quando il prodotto vettoriale a secondo membro si annulla, quando cioè il polo O oppure il centro di massa hanno velocità zero, e anche quando la velocità del polo e quella del CM sono parallele.

3. Notoriamente, nei riferimenti non inerziali le leggi della meccanica possano in generale essere applicate solo a condizione di tenere anche conto delle forze apparenti: si osservi tuttavia che, quando il polo è il CM, applicando la [A] in un riferimento inerziale si scrive esattamente ciò che si scriverebbe nel riferimento del CM, indipendentemente dal fatto che questo sia o non sia inerziale. Quando infatti il riferimento del CM non è inerziale il suo moto è comunque, rispetto ai riferimenti inerziali, un moto di traslazione, e dunque le forze di Coriolis, proporzionali alla velocità di rotazione, non compaiono; nel computo poi del momento $\vec{\tau}$ le forze di trascinarsi possono essere ignorate essendo sempre zero, rispetto al CM, il loro momento complessivo^[18]. Quanto al momento angolare, si è già chiarito (pag.360) che l'osservatore inerziale che lo valuta assumendo come polo il CM ottiene il

¹⁸ Detta C la posizione del CM, e tenuto conto che per tutti i punti del sistema mobile l'accelerazione di trascinarsi coincide in questo caso (moto di traslazione) con l'accelerazione del CM, risulta

$$\sum_i (\vec{CP}_i \times m_i \vec{a}_{i(tr)}) = (\sum_i m_i \vec{CP}_i) \times \vec{a}_{CM} = M_{tot} \vec{CC} \times \vec{a}_{CM} = 0.$$

momento angolare interno, e cioè il risultato che si ottiene nel riferimento del CM assumendo come polo un punto qualsiasi. Dunque, *purché si assuma come polo il CM il teorema del momento angolare è sempre applicabile anche nel riferimento del CM tenendo in ogni caso conto delle sole forze reali.*

4. In pratica, nella [A] $\vec{\tau}$ è la somma dei momenti *delle sole forze esterne* perché, se vale la terza legge di Newton, a ogni forza interna ne corrisponde un'altra avente direzione opposta, modulo uguale e stessa retta d'azione: ed è chiaro (fig. 17) che rispetto a un qualsiasi polo i momenti delle due forze in questione hanno somma zero. *Le forze interne non hanno alcuna possibilità di produrre variazioni nel momento angolare di un sistema.*

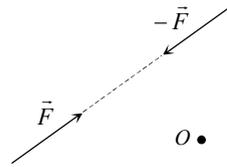


Fig. 17 – Rispetto a un qualsiasi polo O , le due forze hanno complessivamente momento zero.

5. La $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ costituisce la **seconda equazione cardinale della dinamica**, o *legge fondamentale del moto di rotazione*^[19]. Si noti a tale proposito che, quantunque il teorema del momento angolare si riveli utile soprattutto nello studio delle rotazioni, tale legge *non presuppone di per sé in alcun modo* che il sistema considerato si debba necessariamente muovere di moto rotatorio, e nemmeno che si debba muovere di moto rigido.

6. Consideriamo ad esempio il seguente problema, già a suo tempo risolto sulla base delle leggi di Newton (esercizio 18 di pag. 214): il blocco A di fig. 18 scivola senza attrito sul piano orizzontale d'appoggio, il filo che collega i due blocchi scivola a sua volta senza attrito nella gola della carrucola (la quale pertanto si mantiene immobile): determinare l'accelerazione dei blocchi. È chiaro che, anche se ognuno dei due blocchi si muove di moto traslatorio, la configurazione del sistema complessivo varia da istante a istante: *non si tratta quindi di un sistema rigido*. Per determinare l'accelerazione dei blocchi, possiamo applicare il teorema del momento angolare all'intero sistema mobile (blocchi + filo), scegliendo ad esempio come polo il centro geometrico O della carrucola, che si trova nel piano contenente il filo e il centro di massa dei due blocchi. In tal modo, tenuto conto che rispetto a O il momento delle forze esterne si riduce al peso del blocco B moltiplicato per il raggio R della carrucola^[20], e che, muoven-

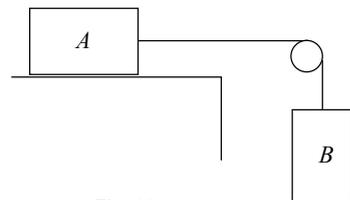


Fig. 18

¹⁹ La prima equazione cardinale della dinamica era la $\vec{R} = d\vec{p}/dt$ (pag. 239).

²⁰ Le altre forze esterne sono quelle provenienti dalla carrucola (perpendicolari al filo per l'assenza di attrito, e quindi passanti per O), il peso del blocco A e la forza esercitata su A dal piano d'appoggio: quest'ultima deve agire sulla retta d'azione del peso, passando quindi per il CM di A come il peso e la forza del filo, perché A si muove di moto traslatorio (il che richiede che – essendo costantemente zero

dosi i blocchi di moto traslatorio, i rispettivi momenti angolari possono essere calcolati concentrando le masse nei centri di massa (che si muovono con velocità v su traiettorie rettilinee distanti R dal centro della carrucola), otteniamo:

$$m_B g R = d(m_A v R + m_B v R)/dt, \text{ da cui, come già trovato per altra via,} \\ dv/dt = m_B g / (m_A + m_B).$$

7. Dal teorema del momento angolare deriva in particolare la **legge di conservazione del momento angolare**: se un sistema è isolato (il che in questo caso significa: *se non è soggetto a forze esterne*), nei riferimenti inerziali il suo momento angolare rispetto al centro di massa (oppure rispetto a un punto fisso, o a un punto avente velocità parallela a quella del CM) ha valore e direzione costanti: *si conserva*. Si conserva dunque anche il momento angolare interno (uguale, per qualsiasi osservatore inerziale, al momento angolare rispetto al CM).

La legge di conservazione del momento angolare è la terza legge di conservazione da noi incontrata, dopo quelle relative a quantità di moto ed energia. Si noti che, seppur deducibili dalle leggi di Newton, tali leggi di conservazione risultano in realtà *sempre* verificate, anche nelle situazioni in cui i concetti della fisica classica non hanno più validità e devono essere sostituiti con quelli della fisica quantistica e relativistica. Evidentemente, le leggi di conservazione della quantità di moto, dell'energia e del momento angolare esprimono proprietà più generali e più fondamentali di quelle espresse dalle leggi di Newton.

8. Il momento angolare di un sistema si conserva ovviamente *anche in presenza di forze esterne* purché, rispetto al polo prescelto, il momento complessivo delle forze esterne abbia valore zero. Per un corpo soggetto solo al proprio peso, ad esempio, il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa (che qui coincide in pratica col baricentro) è zero, per cui il momento angolare relativo al CM (uguale per tutti gli osservatori inerziali, coincidente col momento angolare interno) è, in valore e direzione, costante: è quanto si verifica per un tuffatore dall'istante dello stacco dal trampolino all'istante dell'ingresso in acqua, essendo trascurabili in rapporto al peso, durante il volo, le forze esercitate dall'aria. Rispetto invece a un generico polo fisso il momento angolare del tuffatore (o di un qualsiasi sistema soggetto solo al peso) non è costante, essendo diverso da zero rispetto a tale punto il momento delle forze gravitazionali^[21].

9. Si osservi che quando, nel riferimento del CM, il moto del sistema è un moto rigido (necessariamente di rotazione attorno a un asse passante dal CM), la conservazione del momento angolare interno *non implica* che la direzione dell'asse di rotazione si debba mantenere costante: ciò si verifica solo nel caso particolare in cui

il momento angolare di A rispetto al suo centro di massa – rispetto a tale punto il momento complessivo delle forze applicate sia zero). Pertanto, il peso e la reazione del piano d'appoggio hanno, rispetto a O , momento complessivamente nullo.

²¹ Del resto, il momento angolare rispetto a un tale polo è la somma del momento angolare interno, in questo caso costante, e del momento angolare – evidentemente variabile – dovuto a un moto di traslazione con la velocità del CM.

l'asse di rotazione è diretto come il momento angolare interno, e cioè quando l'asse di rotazione è un asse centrale d'inerzia (pag.363). Se, ad esempio, lasciamo cadere un oggetto a simmetria assiale (un disco omogeneo, un cilindro omogeneo) cercando nel contempo di imprimergli un moto di rotazione attorno all'asse geometrico, è facile osservare che, durante la caduta, l'asse geometrico ruota attorno a una direzione fissa, che chiaramente è quella del momento angolare inizialmente impresso. Nel lancio del disco (atletica), lo *sfarfallio* dell'attrezzo durante il volo ha precisamente questa spiegazione.

10. Supponiamo che, in un riferimento inerziale, un corpo ruoti attorno a un asse centrale d'inerzia, in modo che il suo momento angolare rispetto al CM (uguale per tutti gli osservatori inerziali e coincidente col momento angolare interno) sia diretto come l'asse z di rotazione: in assenza di impulsi di forza esterni, la conservazione del momento angolare interno si traduce qui nel fatto che resta costante nel tempo la direzione di \vec{L} . Per modificare tale direzione occorre modificare la direzione di \vec{L} , occorre dunque che, in intervalli di tempo infinitesimi, \vec{L} subisca incrementi infinitesimi $d\vec{L}$ (fig. 19) perpendicolari a \vec{L} : per la $\vec{\tau} dt = d\vec{L}$ (teorema del momento angolare) ciò si verifica solo quando esistono, rispetto al CM, momenti di forza esterni $\vec{\tau}$ diretti, come $d\vec{L}$, perpendicolarmente all'asse di rotazione. Ed è chiaro che, per uno stesso **impulso angolare** $\vec{\tau} dt$, la rotazione $d\varphi = (dL)/L$ subita dal vettore \vec{L} è tanto più piccola (si osservi la fig.19) quanto maggiore è il modulo di \vec{L} , e cioè quanto più grande è la velocità di rotazione. Di qui l'effetto di stabilizzazione che una rapida rotazione attorno a un asse centrale d'inerzia può produrre sulla direzione dell'asse di rotazione.

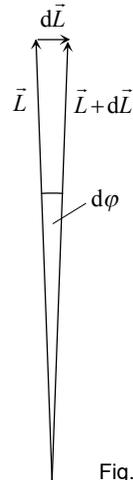


Fig. 19

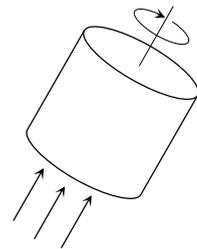


Fig. 20

11. Esempio: mentre un satellite artificiale viaggia verso la propria orbita di destinazione, è essenziale che le inevitabili perturbazioni (dovute all'attrito con l'atmosfera, o a urti contro particelle vaganti) non producano variazioni di assetto tali da modificare la direzione di spinta dei razzi (e quindi la direzione prevista per la traiettoria del satellite). Ciò si ottiene (fig.20) mettendo in rotazione il satellite attorno all'asse centrale d'inerzia parallelo alla direzione di spinta^[22]. Lo stesso effetto di stabilizzazione è sfruttato nel caso dei proiettili (messi in rotazione dalla rigatura praticata sulla superficie interna della canna) e dei siluri (nei quali un dispositivo denominato *giroscopio* viene messo in rotazione all'atto del lancio).

²² La velocità di rotazione può corrispondere a un giro ogni tre - quattro secondi.

12. Supponiamo ora che rispetto a un polo O risulti $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Se z è un generico asse passante da O , il componente z del momento $\vec{\tau}$ delle forze rispetto a O (o rispetto a un qualsiasi altro punto di z), rappresenta, per definizione, il momento $\vec{\tau}_z$ delle forze rispetto a z , e il componente z del momento angolare \vec{L} rispetto a O (oppure a un qualsiasi altro punto di z) è il momento angolare \vec{L}_z del sistema rispetto a z . Se z ha direzione fissa, e solo in tale eventualità, la relazione $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ tra momento delle forze rispetto a O e momento angolare rispetto a O può essere anche riferita ai rispettivi componenti z :

$$[B] \quad \vec{\tau}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt}.$$

Vale a dire: il momento rispetto a z delle forze applicate al sistema misura la rapidità di variazione del momento angolare del sistema rispetto a z (**teorema del momento angolare assiale**).

13. A riprova dell'affermazione secondo cui la [B] può riferirsi solo ad assi a direzione costante, si consideri un sistema del tutto libero da forze esterne ($\tau = 0$). Rispetto a un punto O che possa fungere da polo nella $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, il momento angolare \vec{L} del sistema è allora chiaramente costante, ma se z è un asse che passa da O con direzione variabile, il componente z di \vec{L} è a sua volta variabile, e quindi non ha più valore la [B]. Si veda anche, alla pagina seguente, il commento a lato della fig. 21.

14. Si supponga ora che le velocità dei diversi punti di un corpo corrispondano a un dato istante a quelle di un moto di rotazione attorno a un asse z fisso, oppure anche attorno a un asse «di istantanea rotazione» che si sposta di moto traslatorio (mantenendo quindi una direzione costante) con velocità parallela a quella del CM (con velocità comunque diretta se la velocità del CM è zero): si tratta nel secondo caso di un moto di rototraslazione in cui la velocità di ogni punto è in ogni istante perpendicolare al piano contenente il punto considerato e l'asse z , con valore ωd proporzionale alla distanza d del punto da z (così che i punti che vengono a trovarsi su z hanno, a differenza di z , velocità zero). In tali circostanze, nella $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ il polo può essere un qualsiasi punto di z (essendo la sua velocità zero oppure parallela a quella del CM), e il momento angolare del sistema rispetto all'asse di istantanea rotazione è $\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}$ (pag. 362). Dato che, per ipotesi, la direzione di z rimane costante nel tempo, tenuto conto di quanto visto al precedente punto 12 potremo scrivere

$$[C] \quad \vec{\tau}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \frac{d(J_z \vec{\omega})}{dt}$$

Se poi il momento d'inerzia rispetto a z rimane costante (più in generale, se è nulla la sua derivata temporale), dalla [C] si trae

$$[D] \quad \vec{\tau}_z = J_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J_z \vec{\alpha}.$$

15. Si consideri ad esempio (fig. 21) il moto di puro rotolamento di un cono omogeneo su una superficie piana. Per il momento angolare rispetto all'asse z di istantanea rotazione (la retta di contatto) possiamo senz'altro scrivere

$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}$. Viceversa, la $\vec{\tau}_z = d\vec{L}_z/dt = J_z \vec{\alpha}$ non può essere usata perché z non ha direzione fissa: in effetti, il momento delle forze rispetto a z è nullo ma, a causa delle variazioni di direzione di $\vec{\omega}$, non è nulla $\vec{\alpha}$ ^[23].

Rispetto al CM vale, come sempre, la $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Il momento \vec{L} (che applichiamo convenzionalmente nel vertice del cono, oppure nel CM) è nel piano verticale per z , con un orientamento che dipende dal senso di rotazione (cfr. esercizio 46); l'incremento $d\vec{L}$ è invece diretto, come $\vec{\tau}$, perpendicolarmente alla pagina verso la pagina, quale che sia il senso di rotazione. La reazione verticale \vec{V} , che in caso di quiete è allineata col peso \vec{P} , nel moto di rotolamento è spostata verso sinistra tanto quanto serve perché il momento $\vec{\tau}$ rispetto al CM (prodotto dalla \vec{V} assieme alla forza centripeta d'attrito \vec{A}) sia uguale in direzione e valore a $d\vec{L}/dt$. Chiaramente, esiste un limite per lo spostamento di \vec{V} ed esiste quindi un limite al valore della forza centripeta \vec{A} , e cioè della velocità $\vec{\omega}$ di rotolamento del cono.

16. Oltre che rispetto a un asse di istantanea rotazione a direzione fissa, la [C] e la [D] possono essere sempre scritte anche con riferimento a un asse z' parallelo all'asse di rotazione e passante per il centro di massa. In tal modo non si fa altro che applicare – come siamo autorizzati a fare, cfr. punto 3 pag.368 – il teorema del momento angolare nel riferimento del CM con polo posizionato nel CM (e quindi senza dover tenere conto di eventuali forze di trascinamento). Si noti che, quando non è inerziale, il riferimento del CM si muove comunque rispetto ai riferimenti inerziali di moto traslatorio, e dunque velocità angolari e accelerazioni angolari hanno, nel riferimento del CM, gli stessi valori che hanno nei diversi riferimenti inerziali^[24].

17. Nel caso, ad esempio, di un cilindro omogeneo di peso P e raggio R che rotola senza strisciare (fig. 22) lungo una superficie piana avente inclinazione φ , se riferiamo la [D], scritta in termini di moduli, all'asse di istantanea rotazione (la retta di contatto) otteniamo

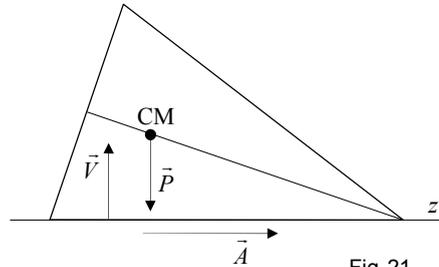


Fig. 21

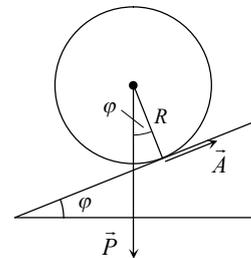


Fig. 22

²³ È verificata la relazione tra moduli $\tau_z = dL_z/dt = J_z d\omega/dt$, dove però $d\omega/dt$ (che vale zero) non rappresenta il modulo di $\vec{\alpha}$.

²⁴ Il quale avrà nei diversi riferimenti una diversa velocità e in uno stesso istante, rispetto al corpo in movimento, una diversa posizione.

[E] $\alpha = \tau_z / J_z = PR \sin\varphi / (3MR^2/2).$

Se invece riferiamo la [D] all'asse del cilindro, indicando con A il modulo della forza d'attrito dobbiamo scrivere

[F] $\alpha = AR / (MR^2/2).$ ^[25]

In caso di completa assenza di attrito la [F] ci dice che è $\alpha = 0$ (velocità di rotazione costante, per esempio sempre nulla se il cilindro parte dalla quiete), la [E] invece darebbe per α lo stesso valore ottenuto prima per il moto di puro rotolamento: ma in questo caso la retta di contatto non è asse di istantanea rotazione, pertanto la $\tau_z = J_z \alpha$ non è riferibile a tale retta.

18. Consideriamo ora una situazione intermedia, un moto di rotolamento *con* strisciamento. Si supponga per esempio che, *in totale assenza di attrito*, un cilindro di raggio R venga prima messo in rotazione attorno al proprio asse e poi, dall'istante zero, lasciato scivolare lungo un piano avente inclinazione φ . La velocità di ogni punto del cilindro sarà la somma vettoriale di due velocità: una, associata al moto di rotazione, proporzionale alla distanza dall'asse del cilindro e costante nel tempo in valore; e una seconda, associata al moto di traslazione con la velocità del CM, uguale a $(g \sin\varphi)t$ per tutti i punti del cilindro. Complessivamente, la velocità di ogni punto sarà in ogni istante uguale a quella dovuta a un moto di rotazione con la velocità angolare ω iniziale attorno a un ben preciso asse mobile di istantanea rotazione. La fig. 23 mostra due successive situazioni. Nella prima sono rappresentate una generica velocità v_C dell'asse del cilindro (punto C) e la contemporanea velocità $v_C - \omega R$ di un punto B che si trova a contatto del piano d'appoggio: l'asse di istantanea rotazione passa in tale istante dal punto A della figura. Nella seconda situazione le velocità di rotazione sono rimaste uguali a prima (zero per C , ωR per B) mentre le velocità di traslazione (e quindi anche le velocità complessive) hanno subito per i due punti uno stesso incremento $\Delta v = g(\sin\varphi)\Delta t$. L'asse di istantanea rotazione z passa adesso da A' : chiaramente la sua velocità non è parallela a quella del CM, e pertanto la $\vec{r}_z = d\vec{L}_z / dt$ non sarebbe ad esso applicabile.

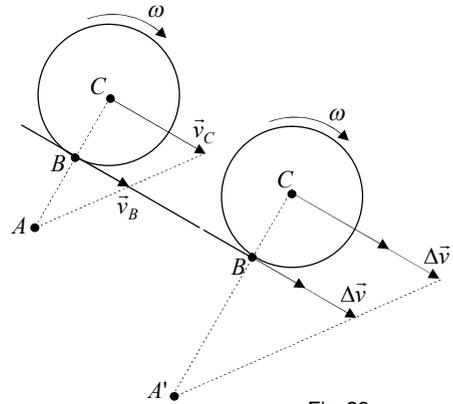


Fig. 23

19. Si consideri infine il caso di un cilindro *non* omogeneo che rotola senza strisciare: il cilindro sia costituito, come la fig. 24 suggerisce, da due semicilindri di materiale e peso specifico diversi, ad esempio acciaio e moplén. Chiaramente, il CM del sistema non si troverà più sull'asse del cilindro, ma su un asse parallelo passante più o meno per la posizione indicata nel disegno. La [D] può in tal caso essere senz'altro applicata all'asse per il CM parallelo all'asse di istantanea rotazione (la retta di contatto), perché rispetto a tale asse il momento d'inerzia del sistema si mantiene costante nel tempo e quindi la [D] consegue dalla [C]. Potrebbe invece essere applicata alla retta di contatto, rispetto alla quale il momento

²⁵ Dal confronto delle due diverse espressioni di α si ottiene che la forza d'attrito è $A = (P \sin\varphi)/3$.

d'inerzia varia nel tempo, solo nel momento in cui il piano di separazione dei due semicilindri è parallelo al piano d'appoggio: in tal caso infatti, essendo massima (fig. 25) o minima (fig. 26) la distanza dall'asse parallelo passante per il CM (rispetto al quale l'asse del momento d'inerzia è costante), il momento d'inerzia rispetto alla retta di contatto è a sua volta massimo o minimo (teorema degli assi paralleli di Steiner, pag.260) ed è quindi nulla la sua derivata temporale.

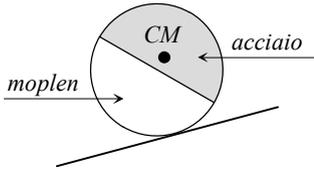


Fig. 24

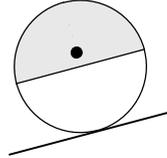


Fig. 25

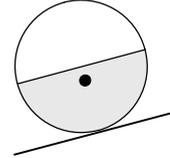


Fig. 26

20. La tabella seguente riassume quanto sopra si è detto circa i limiti di validità delle principali formule della dinamica rotazionale dei sistemi.

RELAZIONE	CONDIZIONI DI APPLICABILITÀ
$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE Il polo (rispetto al quale sono valutati sia $\vec{\tau}$ che \vec{L}) può essere: a) se la velocità del centro di massa è zero, un punto qualsiasi; b) se $v_{CM} \neq 0$, il CM, un punto avente velocità zero, un punto avente velocità parallela a quella del CM.
$\vec{\tau}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt}$	TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE ASSIALE Vale se z è un asse fisso, oppure se si muove di moto traslatorio: in qualsiasi direzione se il CM ha velocità zero, parallelamente alla velocità del CM in caso contrario.
$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}$	Vale quando z è un asse di rotazione (fisso oppure di istantanea rotazione): i punti del sistema eventualmente posti su z hanno quindi velocità zero. Esempio: nel caso di un cono o di un cilindro che rotolano senza strisciare, z è la retta di contatto con la superficie d'appoggio.
$\vec{\tau}_z = \frac{d(J_z \vec{\omega})}{dt}$	Vale rispetto ad assi di rotazione z fissi oppure di istantanea rotazione con direzione costante e velocità parallela a quella del CM (es. retta di contatto tra cilindro che rotola senza strisciare e superficie d'appoggio). La relazione può essere anche riferita – sotto le stesse condizioni – a un asse parallelo a z e passante dal CM.
$\vec{\tau}_z = J_z \vec{\alpha}$	Come sopra quando è $dJ_z/dt = 0$ (J_z costante, oppure anche massimo o minimo).

13.5 Applicazioni

1. IL PENDOLO FISICO. È un corpo rigido K (fig. 27) che oscilla attorno a un asse orizzontale per effetto del peso. Se K viene spostato angularmente di un angolo φ – positivo o negativo a seconda del senso di rotazione, sulla base di opportune convenzioni – dalla posizione di equilibrio, il momento della forza peso rispetto all'asse z di rotazione ha modulo $\tau = mgL|\sin\varphi|$, dove L è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione. Se poi φ è piccolo, $\sin\varphi$ è circa uguale a φ , e quindi, con un errore che tende a zero con φ , possiamo scrivere

$$\tau = mgL|\varphi|.$$

In termini vettoriali: per piccoli valori dello spostamento angolare, la relazione tra lo spostamento angolare $\vec{\varphi}$ (diretto parallelamente a z verso un osservatore che considera antioraria la rotazione) e il momento $\vec{\tau}$ della forza peso (che tende sempre a produrre uno spostamento angolare controverso a $\vec{\varphi}$) è $\vec{\tau} = -mgL\vec{\varphi}$. Avendo $\vec{\tau}$ e $\vec{\varphi}$ direzioni opposte, se l'asse z di rotazione è orientato la relazione tra le componenti z dei due vettori è $\tau = -mgL\varphi$. Ma è anche $\tau = J\alpha$, cioè $\tau = J(d^2\varphi/dt^2)$. Se non ci sono attriti, possiamo in definitiva scrivere

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgL}{J}\varphi = 0$. Questa è un'equazione differenziale del tutto analoga a quella che governa il moto di un punto che oscilla sotto l'azione di una forza elastica ($\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, cfr. pag. 238), e quindi anche la soluzione è analoga:

$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega t + C)$, dove $\omega = \sqrt{mgL/J}$, e dove C è una costante il cui valore dipende dalla scelta dell'istante zero (se, ad esempio, si sceglie l'istante zero in modo che in tale istante sia $\varphi = \varphi_{\max}$, sarà $C = 0$). Il periodo del moto è quindi $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{J/mgL}$. Se, come caso particolare, supponiamo che la massa sia tutta raccolta in un piccolo volume attorno al baricentro, il momento d'inerzia è $J = mL^2$ e quindi il periodo diventa $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, che è il ben noto periodo delle piccole oscillazioni del cosiddetto pendolo semplice.

2. IL PENDOLO DI TORSIONE. È un corpo rigido K sospeso a un filo di massa trascurabile. Se, a partire dalla posizione di equilibrio, K viene fatto ruotare attorno alla retta verticale su cui si trova il filo, il filo esercita su K una coppia che tende a riportare K nella posizione originaria: quando lo spostamento angolare φ di K è piccolo, il momento della coppia proveniente dal filo è $\tau = -k\varphi$, dove k rappresenta la **costante elastica torsionale** del filo (anche qui, il segno meno indica che se lo

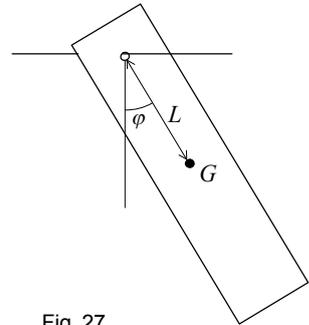


Fig. 27

spostamento angolare ha senso orario, la rotazione che la coppia tende a produrre ha senso antiorario). Quando viene abbandonato a sé stesso, K entra in rotazione per effetto della coppia proveniente dal filo, prima recuperando la posizione originaria, poi oltrepassandola per inerzia, poi nuovamente recuperandola per effetto della coppia elastica di richiamo, e così via – in assenza di dispersioni energetiche – all'infinito. Non essendoci altri momenti di forza rispetto all'asse di rotazione (che passa necessariamente dal baricentro, essendo la posizione originaria una posizione di equilibrio), per il momento della coppia elastica possiamo anche scrivere $\tau = J\alpha = J(d^2\varphi/dt^2)$. È quindi $J(d^2\varphi/dt^2) = -k\varphi$, e in definitiva

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{J}\varphi = 0, \text{ equazione differenziale (anche questa analoga a quella del moto}$$

armonico) la cui soluzione è $\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega t + C)$, con $\omega = \sqrt{k/J}$.

3. IL TUFFO E LA PIROETTA. Un tuffo dal trampolino (o dalla piattaforma) consiste a volte in una serie di capriole, in avanti o all'indietro. Raccogliendo o distendendo il proprio corpo l'atleta può modificare, durante il volo, il proprio momento d'inerzia rispetto all'asse orizzontale z passante dal suo centro di massa e perpendicolare al piano contenente la traiettoria del CM. Ma, dato che la presenza di aria è qui pressoché ininfluente, l'unica forza agente è in pratica il peso, che rispetto a tale asse ha momento zero: essendo $\tau_{(z)} = 0$ deve essere (cfr. la [C] di pag. 372) $J_z\omega = \text{costante}$. Perciò al variare del momento d'inerzia rispetto a z varia in senso inverso la velocità con cui il corpo ruota attorno a z .

La stessa cosa si verifica nel pattinaggio artistico. Quando l'atleta esegue una piroetta ruotando su sé stesso attorno a un asse verticale z , il suo momento d'inerzia rispetto a z può essere variato in più o in meno distendendo lateralmente le braccia o al contrario raccogliendole davanti al petto. Dato che, se si prescinde dall'attrito (che tende in ogni caso a rallentare il moto di rotazione), le altre forze (il peso e il componente verticale della reazione del piano d'appoggio) hanno, rispetto a z , momento zero, una variazione del momento d'inerzia produce automaticamente una variazione in senso inverso della velocità di rotazione: braccia distese, rotazione lenta; braccia raccolte, rotazione veloce.

Si noti che, mentre il momento angolare rispetto a z resta approssimativamente costante, *si verificano invece variazioni dell'energia cinetica* (espressa in questo caso da $J_z\omega^2/2 = L_z^2/2J$): quando infatti le braccia vengono richiamate, viene compiuto lavoro motore da parte di forze muscolari interne agenti in senso centripeto; quando, viceversa, le braccia vengono distese, il lavoro delle forze interne è negativo e l'energia cinetica del sistema rotante diminuisce.

È interessante notare che durante il volo il tuffatore ha la possibilità di entrare in rotazione non solo in avanti o all'indietro, ma anche verso destra o verso sinistra. Una rotazione di avvitalamento da destra a sinistra, ad esempio, può essere innescata dall'atleta (fig. 28) inclinando la testa verso la spalla destra e portando contemporaneamente la mano sinistra dietro la nuca e la mano destra davanti al petto; non ap-

pena il corpo viene riportato in posizione simmetrica, la rotazione di avvitalamento cessa. Durante tali operazioni, la somma (vettoriale) del momento angolare dovuto alla rotazione frontale e del momento angolare – ortogonale al precedente – dovuto alla rotazione di avvitalamento si mantiene costantemente uguale al momento angolare iniziale: essendo infatti zero il momento del peso rispetto al CM, il momento angolare interno non può subire variazioni finché l'unica forza agente è il peso.

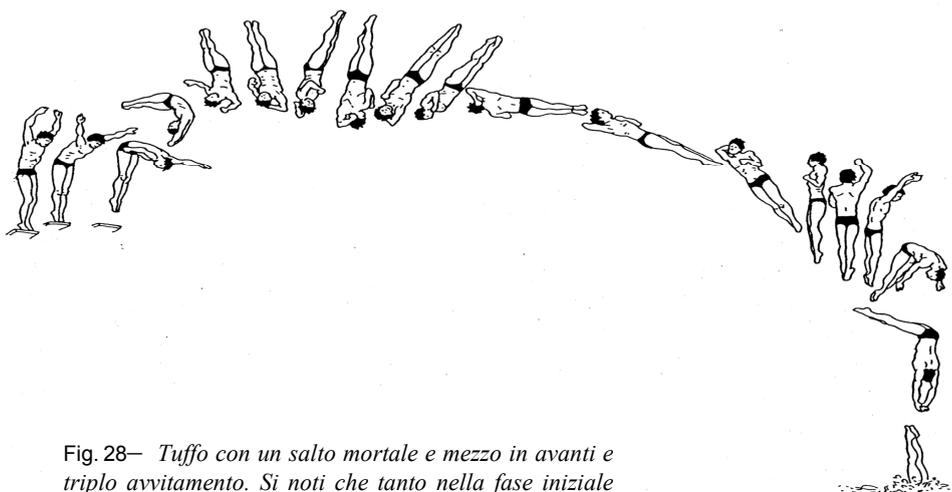


Fig. 28— *Tuffo con un salto mortale e mezzo in avanti e triplo avvitalamento. Si noti che tanto nella fase iniziale quanto nella fase finale il corpo ruota in avanti senza alcun moto di avvitalamento [da Le Scienze, n.141, maggio 1980, per gentile concessione].*

Si noti che il tuffatore potrebbe innescare movimenti di rotazione sia frontale (capriole) che laterale (avvitalamenti) *anche a partire da una condizione iniziale di pura traslazione*, e quindi di momento angolare interno uguale a zero: in tal caso, dall'istante in cui la configurazione del corpo viene nuovamente mantenuta costante il moto ridiventa traslatorio, con un orientamento in generale diverso da quello iniziale (*qualsiasi* posizione finale è in linea di principio possibile, in dipendenza dai movimenti effettuati: per esempio, una posizione orizzontale perpendicolare al piano verticale che contiene la traiettoria del baricentro). Considerazioni analoghe valgono evidentemente per i salti effettuati sul tappeto elastico.

4. IL GATTO E L'ASTRONAUTA. Tutti sanno che il gatto è sempre in grado di ricadere sulle quattro zampe, anche quando viene lasciato cadere «di schiena» e da fermo, quindi in totale assenza di qualsiasi stato di moto iniziale (il che tra l'altro conferma quanto appena sopra affermato relativamente ai tuffi con momento angolare iniziale nullo). La domanda che ci si potrebbe porre è questa: come è possibile che il gatto riesca a capovolgersi ruotando su sé stesso se, nel riferimento del centro di massa, il momento angolare è inizialmente zero, e non può che restare uguale a zero fino a che l'unica forza agente è il peso? Evidentemente, *per un sistema defor-*

mabile è sempre possibile, anche in assenza di momenti esterni, che opportuni movimenti di una parte del sistema rispetto alle altre producano in definitiva uno spostamento angolare dell'intero sistema, pur restando costantemente uguale a zero il momento angolare interno.

Nella stessa condizione del gatto o del tuffatore si trova l'astronauta «in orbita», quando cioè la navicella procede a motori spenti sotto l'azione della sola gravità: se infatti l'astronauta non spinge o tira qualche altro oggetto, l'unica forza ad esso applicata è la forza di gravità. In tal caso, anche se il momento angolare del suo corpo non può variare, l'astronauta è in grado di orientarsi rispetto alla navicella (o alla Terra), con movimenti opportuni, in qualsiasi nuova direzione ^[26].

5. LA PIATTAFORMA GIREVOLE. Supponiamo di essere in piedi, come in fig. 29, su una piattaforma che può girare senza attrito su sé stessa attorno a un asse z verticale. Supponiamo inoltre che le uniche forze esterne applicate al sistema mobile (la piattaforma + il nostro corpo) siano, oltre a quelle provenienti dagli opportuni vincoli, le forze gravitazionali: per l'assenza di attriti, il momento delle forze esterne rispetto a z è zero, cioè sul sistema non agiscono forze esterne capaci di produrre o contrastare movimenti di rotazione attorno a z . Se allora, partendo dalla quiete (meglio ancora se con le braccia tese in direzione orizzontale ai due lati del corpo), facciamo ruotare attorno a z la parte superiore del corpo verso la nostra sinistra, possiamo constatare che dal bacino in giù il nostro corpo è automaticamente costretto a ruotare (assieme alla piattaforma) verso destra. In queste condizioni infatti il momento angolare del sistema rispetto a z non può subire variazioni e resta pertanto uguale a zero, il valore iniziale: il che evidentemente richiede che, se una parte del sistema ruota verso sinistra, un'altra parte ruoti verso destra.

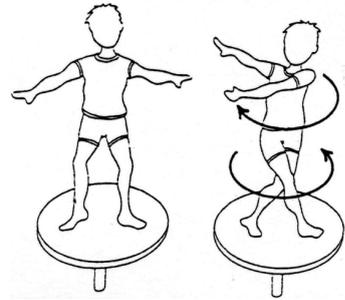


Fig. 29

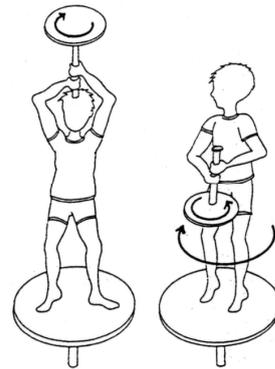


Fig. 30

Supponiamo ora invece di sorreggere con le mani, sempre posizionati sulla nostra piattaforma girevole, un'asta verticale sulla quale è imperniata una ruota in rapida rotazione (fig. 30). Se capovolgiamo l'asta, l'intero sistema mobile entra in rotazione nel senso originario di rotazione della ruota: col capovolgimento dell'asta infatti

²⁶ Secondo Kane e Scher, ad esempio, per far ruotare il proprio corpo di circa 70° verso sinistra l'astronauta potrebbe seguire il procedimento seguente: primo, spostare la gamba destra in avanti e la sinistra all'indietro; secondo, far ruotare la gamba destra in senso orario all'indietro e la gamba sinistra in senso antiorario in avanti; terzo, ricongiungere le gambe.

è stato invertita la direzione del momento angolare della ruota rispetto a z , e solo se il sistema entra in rotazione nel senso originario della ruota il momento angolare complessivo rispetto a z può mantenere (come richiesto dal fatto che il momento delle forze esterne rispetto a z è nullo) la direzione originaria.

Ma descriviamo la cosa in termini quantitativi. Inizialmente la ruota è in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}_1$ attorno al proprio asse geometrico: il suo CM è immobile, il momento angolare rispetto a qualsiasi polo vale $J_1\omega_1$ (J_1 è il momento d'inerzia della ruota rispetto al suo asse geometrico) ed è diretto come $\vec{\omega}_1$, e cioè parallelamente a z : il momento angolare dell'intero sistema rispetto a z è quindi $\vec{L}_z = J_1\vec{\omega}_1$ (fig. 31). Dopo il ribaltamento della ruota, rispetto al suo CM il momento angolare è $-J_1\vec{\omega}_1$, ma il momento angolare complessivo della ruota rispetto a z include ora il momento angolare associato al

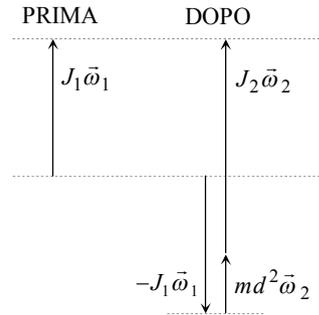


Fig. 31

moto del CM: tale momento angolare ha la stessa direzione di $\vec{\omega}_1$ e ha valore $md^2\omega_2$ (m è la massa della ruota, d è la distanza del CM della ruota da z , ω_2 è la velocità angolare con cui l'intero sistema ruota attorno a z). In più c'è ora il momento angolare dell'altra parte del sistema mobile (il nostro corpo + la piattaforma): se indichiamo con J_2 il relativo momento d'inerzia rispetto a z , il corrispondente momento angolare sarà $J_2\omega_2$, con la direzione di $\vec{\omega}_1$. Scrivendo che, rispetto a z , il momento angolare finale è uguale a quello iniziale, otteniamo $md^2\omega_2 + J_2\omega_2 - J_1\omega_1 = J_1\omega_1$. In definitiva, la velocità con cui, per effetto del ribaltamento della ruota, il nostro corpo entra in rotazione è $\omega_2 = 2J_1\omega_1 / (md^2 + J_2)$.

Se immaginiamo che, all'inizio, la sbarra sia disposta orizzontalmente anziché verticalmente, e venga in seguito disposta verticalmente, troviamo un risultato analogo, salvo che, a parità di ogni altra circostanza, la velocità ω_2 acquisita dal nostro corpo è la metà di prima. Questa volta infatti il momento angolare del sistema rispetto a z è inizialmente zero, e quindi è zero anche alla fine:

$J_1\vec{\omega}_1 + md^2\vec{\omega}_2 + J_2\vec{\omega}_2 = 0$ (tale relazione assegna ad $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ direzioni opposte, in accordo col fatto che la ruota e il resto del sistema ruotano in senso opposto^[27]).

²⁷ Ci si potrebbe chiedere che fine ha fatto il momento angolare orizzontale che la sbarra possedeva all'inizio: la risposta è che tale momento angolare è stato annullato dalla sovrapposizione di un momento angolare uguale e contrario, prodotto dal componente orizzontale del momento che noi abbiamo dovuto esercitare sulla sbarra per mantenerla, durante il cambio di direzione, in uno stesso piano verticale solidale con la piattaforma (cfr. domanda 32 a pag. 390).

6. LA RUOTA ECCENTRICA E LA RUOTA SBILANCIATA. Supponiamo che un disco omogeneo (o un qualsivoglia altro oggetto a simmetria assiale) sia fissato (come in fig. 32, in cui il disco è visto di profilo) a un'asta verticale di massa trascurabile, parallela all'asse geometrico del disco, distante d da esso, vincolata in modo da poter solo ruotare su sé stessa; e supponiamo che in effetti il tutto stia ruotando con velocità angolare costante $\vec{\omega}$.

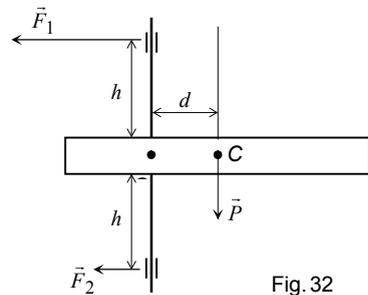


Fig. 32

Dato che il CM del disco si muove di moto circolare uniforme in un piano orizzontale, i supporti ai quali l'asta è vincolata devono collettivamente esercitare sul sistema rotante, oltre che una forza verticale pari al peso del sistema, una forza orizzontale avente la direzione che porta dal CM verso l'asse di rotazione, di valore pari al prodotto della massa M in rotazione per l'accelerazione centripeta del CM:

$$[A] \quad F_1 + F_2 = M\omega^2 d.$$

Si osservi poi che, rispetto al punto O posto sull'asse z di rotazione all'altezza del CM, il momento angolare è costante nel tempo in direzione (infatti è sempre parallelo a $\vec{\omega}$) e valore ($J_z\omega$). Se allora riferiamo la $\vec{r} = d\vec{L}/dt$ al polo O , deduciamo che rispetto ad A il momento complessivo delle forze esterne deve essere zero. Nel caso della figura, possiamo supporre che il componente verticale della reazione vincolare passi da O : dovrà pertanto essere

$$[B] \quad F_1 h - F_2 h - Pd = 0.$$

La soluzione del sistema così ottenuto è $F_1 = \frac{1}{2}(M\omega^2 d + Pd/h)$, $F_2 = \frac{1}{2}(M\omega^2 d - Pd/h)$. Nel caso fosse $d = 0$, le due forze sarebbero nulle, e quindi, reciprocamente, nessuna forza orizzontale verrebbe esercitata dall'asta sui supporti. Quando invece, per un qualsiasi motivo, il CM risulta eccentrico rispetto all'asse di rotazione, i supporti ricevono dal sistema rotante una sollecitazione supplementare (con conseguenti vibrazioni, rumorosità e più rapido deterioramento). Si parla in tal caso di una situazione di *quilibrio statico*: tale squilibrio può essere immediatamente rivelato – a ruota ferma, quindi con metodi statici – quando l'asse di rotazione è orizzontale: esiste in tal caso per la ruota eccentrica (soggetta soltanto al proprio peso e alle reazioni vincolari) un'unica posizione di equilibrio stabile: quella per cui il CM è sotto l'asse di rotazione.

Supponiamo ora invece (fig. 33) che l'asse di rotazione passi dal CM ma che, avendo una direzione diversa da quella dell'asse geometrico del disco, non sia più asse centrale d'inerzia. In

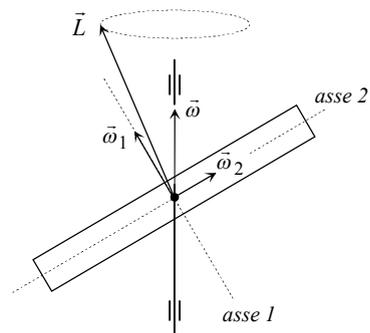


Fig. 33

tal caso, il momento angolare del sistema (uguale per qualsiasi polo perché per ipotesi la velocità del CM è zero) ha direzione *diversa* da quella dell'asse di rotazione. Ciò si riconosce immediatamente se si scompone, come in figura, la velocità angolare $\vec{\omega}$ in due componenti ortogonali ($\vec{\omega}_1$, parallela all'asse geometrico del disco, e $\vec{\omega}_2$) e se si considera che il momento angolare è la somma del momento angolare \vec{L}_1 dovuto a $\vec{\omega}_1$ e del momento angolare \vec{L}_2 dovuto a $\vec{\omega}_2$ [28]. Dato che entrambe le rotazioni hanno luogo attorno ad assi di simmetria, risulta $\vec{L}_1 = J_1 \vec{\omega}_1$ e $\vec{L}_2 = J_2 \vec{\omega}_2$. Se i momenti d'inerzia attorno all'asse 1 e attorno all'asse 2 fossero uguali, il momento angolare complessivo $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2$ sarebbe parallelo a $\vec{\omega}$. Ma è $J_1 > J_2$, dato che la massa del disco è in media più lontana dall'asse 1: perciò la direzione di \vec{L} è diversa da quella di $\vec{\omega}$ (il vettore \vec{L} forma con l'asse 1 un angolo *inferiore* a quello formato dal vettore $\vec{\omega}$).

Chiaramente, se il disco ruota con velocità angolare costante anche il vettore \vec{L} ruota assieme al disco mantenendo un valore costante (in fig. 26 è indicata la traiettoria che viene percorsa dalla punta del vettore \vec{L} quando il primo estremo viene posizionato nel CM): l'incremento $d\vec{L}$ che figura nella relazione $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ è quindi in ogni istante ortogonale a \vec{L} , ed è in ogni istante ortogonale al piano contenente l'asse geometrico del disco e l'asse di rotazione. Lo stesso allora si dovrà dire per il momento $\vec{\tau}$ esercitato sul sistema rotante dalle forze esterne: momento che risulta uguale per qualsiasi polo, perché il CM è immobile e quindi la somma delle forze esterne è zero. Essendo in particolare zero, rispetto al CM, il momento del peso, il momento complessivo $\vec{\tau}$ delle forze rispetto al CM proviene dai supporti del sistema rotante, il quale quindi esercita sui supporti un momento uguale e contrario (con conseguenti anomale sollecitazioni dei cuscinetti). Una situazione di questo genere si presenta ad esempio nel caso delle ruote delle automobili quando, per una qualsiasi ragione, l'asse di rotazione non coincide più con un asse centrale d'inerzia: a tale situazione di *squilibrio dinamico* (non rilevabile in condizioni statiche perché, passando l'asse di rotazione per il baricentro, rispetto all'azione delle forze gravitazionali qualsiasi posizione della ruota è una posizione di equilibrio), viene posto rimedio con l'operazione di *bilanciamento*.

7. LA TROTTOLA. Facciamo riferimento a un movimento semplificato, in cui il punto d'appoggio della trottola mantiene una posizione fissa e in cui l'asse della trottola si sposta sulla superficie di un cono ad asse verticale (moto di *precessione*, velocità angolare $\vec{\omega}_2$ in fig. 29): è un movimento del tutto ideale, perché in realtà, per effetto dell'impulso inizialmente conferito alla trottola (oltre che del non perfetta

²⁸ La velocità di un generico punto del sistema è infatti $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, dove \vec{v}_1 è la velocità che compete a un moto di rotazione attorno all'asse 1, e \vec{v}_2 è la velocità che compete a un moto di rotazione attorno all'asse 2.

orizzontalità della superficie d'appoggio), il punto d'appoggio non è fisso, e per di più durante il moto di precessione l'asse geometrico della trottola oscilla su e giù in modo più o meno percettibile (moto di *nutazione*). La domanda cruciale è comunque questa: come si spiega il fatto che, pur cadendo la verticale per il baricentro *fuori* dall'area di appoggio, la trottola, finché almeno ruota su sé stessa abbastanza velocemente (velocità $\vec{\omega}_1$ di fig. 34 abbastanza grande), non cade?

Si consideri la figura. Dato che, nel caso ideale da noi considerato, il punto O d'appoggio è immobile, rispetto ad esso è verificata la $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Il momento angolare rispetto a O è dato dal momento angolare interno più il momento angolare che il CM avrebbe rispetto a O se nel CM fosse localizzata tutta la massa della trottola. Il primo dei due termini è dovuto al moto della trottola nel riferimento del CM (rotazione con velocità angolare $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ attorno a un asse passante dal CM), il secondo, espresso da $\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$ (dove \vec{r}_{CM} definisce la posizione del CM rispetto a O), ha modulo proporzionale alla velocità del CM, quindi al valore di $\vec{\omega}_2$. Se, come in genere accade, il modulo di $\vec{\omega}_2$ è molto inferiore a quello di $\vec{\omega}_1$, il moto del CM influisce ben poco sul momento angolare, la direzione del quale viene in pratica a coincidere con quella di $\vec{\omega}_1$, mentre il modulo diventa semplicemente $J_1\omega_1$ (J_1 è il momento d'inerzia rispetto all'asse geometrico). In ogni caso, \vec{L} è parallelo al piano verticale contenente l'asse della trottola. Essendo il momento $\vec{\tau}$ del peso perpendicolare a tale piano, e quindi a \vec{L} , per la $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ l'incremento $d\vec{L}$ è a sua volta perpendicolare a \vec{L} , il che significa che il modulo del vettore \vec{L} si mantiene costante: se poniamo in O il suo primo estremo, il secondo estremo descrive una circonferenza (fig. 35). Se la trottola girasse su se stessa nell'altro senso, anche il senso del moto di precessione risulterebbe invertito.

Si trova subito che, nel moto semplice qui considerato, la velocità angolare del moto di precessione non dipende dall'inclinazione della trottola, ma solo dalla velocità angolare con cui la trottola gira su sé stessa: se poi, come normalmente accade, la velocità di ro-

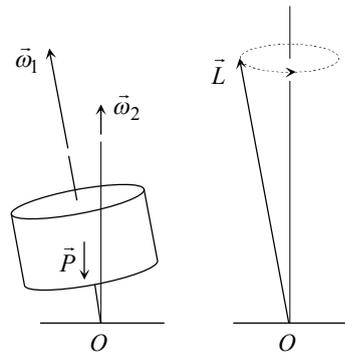


Fig. 34

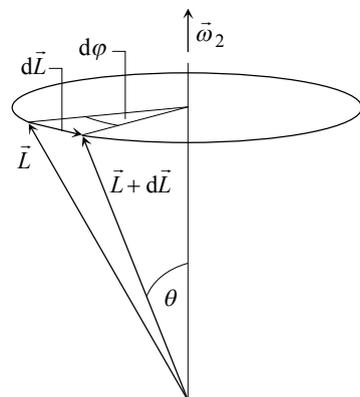


Fig. 35

tazione è grande in rapporto a quella di precessione, le due velocità possono ritenersi inversamente proporzionali (più la rotazione è rapida, più la precessione è lenta). L'angolo descritto dall'asse della trottola nel tempo dt è infatti $d\varphi = \omega_2 dt$, e può anche essere espresso (fig. 35) come $d\varphi = \frac{dL}{L \sin\theta}$. D'altra parte, per il teore-

ma del momento angolare è $dL/dt = \tau$, cioè $dL = \tau dt$. Pertanto, se r è la distanza del CM dal punto d'appoggio, da tali relazioni si ottiene

$$\omega_2 = d\varphi/dt = \tau/L \sin\theta = mgr \sin\theta / L \sin\theta = mgr/L$$

(si osservi che è $\vec{\tau} = \vec{\omega}_2 \times \vec{L}$).

Quando, come accade in genere, il momento angolare della trottola è in pratica imputabile al solo moto di rotazione su sé stessa, è $L = J_1 \omega_1$. In tal caso risulta

$$\omega_2 = \frac{mgr}{J_1 \omega_1}.$$

8. IL GIROSCOPIO. È costituito da un disco omogeneo (o da un qualsiasi altro solido di rotazione omogeneo) che ruota rapidamente attorno al proprio asse di simmetria. Esamineremo due casi notevoli.

Primo caso. Il disco è imperniato (fig. 36) su un'asta rigida in modo da poter ruotare attorno al proprio asse geometrico z ; l'asta è fissata a un dispositivo a snodi che le permette di assumere qualsiasi prefissata direzione: con riferimento alla disposizione mostrata in figura, è chiaro che il disco può ruotare non solo attorno a z , ma, assieme all'anello col quale l'asse z è rigidamente connesso, anche attorno all'asse y (sul quale l'anello è imperniato in A e A'), e, assieme all'anello e alla for-

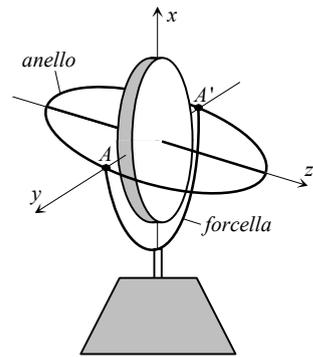


Fig. 36

cella di sostegno, attorno all'asse verticale x . Per tale ragione, se facessimo ruotare il basamento del dispositivo attorno a un asse parallelo a x o parallelo a y , in assenza di attriti nei perni non riusciremmo a trasmettere all'asse z (e quindi al disco) alcuno spostamento angolare. Se poi il disco è preliminarmente posto in rapida rotazione, compare l'effetto di **stabilità giroscopica**: essendo per il disco asse centrale d'inerzia, l'asse z ha la direzione del momento angolare interno del disco, e conserva quindi una direzione fissa fino a che, rispetto al CM, il momento delle forze applicate al disco è zero. Se si agisce direttamente sull'anello o sulla forcella è naturalmente possibile far ruotare z sia rispetto a y che rispetto a x , incontrando peraltro una resistenza ben superiore a quella che si manifesta quando il disco non ruota (questa proprietà è nota come «permanenza degli assi giroscopici»); viceversa, qualunque movimento possa essere imposto al basamento del giroscopio, nessuno spostamento angolare può da esso venire trasmesso a z , che mantiene pertanto una

direzione costante^[29]. Si noti che l'asse z , disposto orizzontalmente in fig. 31, potrebbe più in generale avere qualsiasi altra inclinazione: le conclusioni non sarebbero diverse.

Secondo caso: l'asse z del giroscopio è vincolato a uno snodo A (fig. 37) ed è per il resto del tutto libero. Un movimento possibile per il giroscopio è quello semplice visto più sopra per il caso della trottola, governato dalla relazione $\vec{\tau} = \vec{\omega}_2 \times \vec{L}$, dove $\vec{\tau}$ è il momento del peso rispetto allo snodo: in tal caso, indipendentemente dall'angolo θ formato con la verticale, z precede ruotando attorno alla verticale per A con velocità angolare costante

$$\omega_2 = \frac{\tau}{L \sin\theta}, \text{ in cui } L \approx J_1 \omega_1.$$

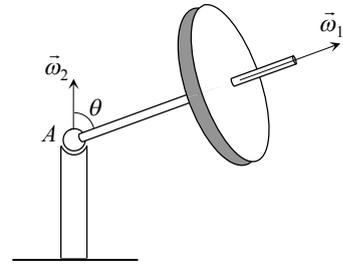


Fig. 37

Ma poniamoci ora in una situazione diversa: supponiamo di sostenere inizialmente con la mano l'estremo libero del giroscopio in modo tale che, mentre il disco gira rapidamente, l'asse z , diretto orizzontalmente, risulti immobile. In queste condizioni, la sola forza che dobbiamo esercitare su z è una forza verticale atta a neutralizzare, assieme alla reazione dello snodo, il peso del giroscopio, esattamente come se il disco fosse fermo. Quando però togliamo la mano abbandonando a sé stesso il giroscopio, succede qualcosa di totalmente inatteso: anziché cadere verticalmente, come farebbe se il disco fosse fermo, il giroscopio entra in rotazione attorno alla verticale per A . In più, compie un debole moto di nutazione: dapprima comincia ad abbassarsi, ma subito risale all'altezza iniziale, e continua poi ad oscillare su e giù, attorno a un'altezza media leggermente inferiore a quella iniziale (questo movimento di saliscendi è chiaramente osservabile solo quando il disco ruota su se stesso con velocità angolare relativamente bassa, e viene comunque rapidamente smorzato dagli attriti nello snodo).

Chiaramente, il moto di precessione è dovuto al fatto che, dall'istante in cui il momento del peso $\vec{\tau}$ rispetto allo snodo non è più compensato dal momento della forza esercitata dalla nostra mano, il momento angolare rispetto allo snodo deve subire, in ogni tempuscolo dt , un incremento $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ diretto come $\vec{\tau}$, e cioè orizzontalmente. Il fatto poi che l'asse del giroscopio tenda ad assestarsi su una posizione un po' inclinata verso il basso è quanto occorre affinché si mantenga nullo, come all'inizio, il componente verticale di \vec{L} (non ci può essere variazione nel componente verticale di \vec{L} , perché non c'è componente verticale nel momento $\vec{\tau}$ delle forze esterne): per effetto dell'inclinazione, il momento angolare di spin, do-

²⁹ Se il dispositivo è posto su un oggetto K in movimento, opportuni sensori possono registrare gli spostamenti angolari dell'oggetto rispetto al giroscopio e attivare la correzione automatica della direzione di marcia di K .

vuto alla rotazione del disco attorno all'asse su cui è imperniato, ha un componente verticale diretto verso il basso che può compensare il momento angolare verticale, diretto verso l'alto, dovuto sia al moto del CM nel piano orizzontale, sia anche al fatto che, nel riferimento del CM, il disco ruota attorno a un asse verticale passante dal CM. Per annullare fin dall'inizio il moto di nutazione, occorrerebbe dare inizialmente al giroscopio una piccola spinta orizzontale, tale da portare il suo momento angolare verticale da zero al valore che compete al moto di precessione.

Il fatto che al moto di precessione si accompagni un abbassamento del giroscopio, a meno che non venga impartita un'opportuna spinta orizzontale, è giustificato del resto anche da considerazioni energetiche: l'energia cinetica supplementare dovuta al moto di precessione viene nel primo caso pagata con la perdita di energia potenziale gravitazionale, nel secondo caso col lavoro di spinta da noi stessi compiuto.

Si osservi da ultimo che la $\vec{\tau} = \vec{\omega}_2 \times \vec{L}$ è verificata *solo nel caso di precessione «regolare»*, vale a dire in assenza di nutazione. Mentre infatti la nutazione è in atto, il momento angolare complessivo rispetto al punto d'appoggio comprende, per effetto dell'abbassarsi o dell'alzarsi del giroscopio, un componente ortogonale al piano β che contiene l'asse della trottola e l'asse di precessione, alternativamente diretto nel senso del moto di precessione e in senso inverso, cosicché il momento angolare risultante \vec{L} (rappresentato col primo estremo nello snodo A) risulta alternativamente spostato in avanti o all'indietro rispetto a tale piano: gli spostamenti angolari della trottola attorno all'asse di precessione non soddisfano quindi più alla relazione $d\varphi = \frac{dL}{L \sin\theta}$ (cfr. fig.35, pag.382), alla quale la $\vec{\tau} = \vec{\omega}_2 \times \vec{L}$ si ricolle-

gava. Naturalmente, anche in presenza di nutazione l'incremento $d\vec{L}$ del momento angolare è costantemente ortogonale, come il momento $\vec{\tau}$ del peso, al piano β : perciò, quando il momento angolare forma con β un angolo diverso da zero, l'incremento $d\vec{L}$ non risulta ortogonale ad \vec{L} . Ciò significa che, in presenza di nutazione, \vec{L} cambia non solo in direzione ma anche in modulo.

9. LA BICICLETTA. La spiegazione della stabilità di una bicicletta non è affatto semplice: gli studiosi che, via via nel tempo, si sono occupati della questione hanno in effetti proposto al riguardo teorie tutt'altro che univoche.

Una ruota appoggiata sul terreno, in quiete in posizione verticale, cade entro pochi secondi se non viene sorretta. Se invece rotola rapidamente sul terreno, la stabilità è molto superiore: prima di tutto, per effetto del momento angolare associato al moto di rotazione la ruota tende a mantenersi in un piano verticale malgrado i sobbalzi prodotti dalle irregolarità del terreno; se poi la ruota, che supponiamo proceda verso Nord, si inclina verso destra (quindi verso Est), rispetto al suo centro di massa la reazione del piano d'appoggio esercita un momento $\vec{\tau}$ diretto in avanti: anche il momento angolare, inizialmente diretto verso Ovest, subisce allora un incremento $d\vec{L}$ diretto verso Nord, il che significa che \vec{L} entra in rotazione – per chi osser-

va la scena dall'alto – in senso orario: in altre parole, la ruota comincia a sterzare verso destra, che è precisamente quanto serve a contrastare la caduta. La traiettoria si incurva infatti dal lato dell'inclinazione, e conseguentemente compare, nella reazione del terreno, un componente orizzontale che, mentre impedisce alla ruota di scivolare in avanti – come accadrebbe in assenza di attrito – tende a compensare l'effetto di rotazione verso il basso (attorno al centro di massa) prodotto dal componente verticale.

Quando una bicicletta viene lanciata *senza* conducente, la sua sorprendente stabilità è senz'altro dovuta in gran parte all'effetto giroscopico che si produce sulle ruote, e in particolare sulla ruota anteriore (tant'è vero che se, a fianco della ruota anteriore, viene installata una ruota che, senza toccare il terreno, gira in senso contrario, e cioè all'indietro, la bicicletta cade a terra dopo pochi metri^[30]). Tuttavia, se una bicicletta viene lanciata dopo essere stata zavorrata in modo da simulare il peso del conducente, la stabilità tende a scomparire. Di gran lunga prevalenti risultano allora, nella normale guida di una bicicletta, i complicati effetti dovuti alla particolare geometria dello sterzo (i parametri essenziali sono l'inclinazione del piantone dello sterzo sulla verticale e la posizione del suo asse rispetto al perno della ruota anteriore). Ad esempio, se la bicicletta si inclina lateralmente la ruota anteriore sterza subito dal lato dell'inclinazione – indipendentemente da effetti giroscopici, quindi anche da fermo – per puro effetto gravitazionale: con le geometrie infatti che l'esperienza suggerisce, tale sterzata determina l'abbassamento del baricentro dell'intero sistema.

10. L'ALTALENA. Anche la dinamica di un'altalena pone qualche non banale problema. Qui ci interessa soprattutto il seguente: come si spiega il fatto che è possibile aumentare l'ampiezza di oscillazione anche in assenza di spinte dall'esterno? È noto che, per ottenere più rapidamente tale risultato, conviene posizionarsi con i piedi sull'assicella: in tal caso, il segreto – come ogni bambino apprende istintivamente dopo pochi tentativi – consiste sostanzialmente nell'accovacciarsi in corrispondenza delle posizioni estreme A e B , e nell'alzarsi invece dritti in piedi a ogni passaggio dalla posizione centrale O . In tal modo in O , o comunque in prossimità di tale posizione, il momento d'inerzia rispetto alla sbarra diminuisce e quindi la velocità angolare aumenta (esattamente come quando, nel caso della piroetta sul ghiaccio, le braccia distese vengono raccolte): rispetto infatti alla sbarra che sostiene l'altalena, in O il momento del peso è zero (e in prossimità a O è piccolo), ed è perciò stazionario, o quasi stazionario, il momento angolare $L = J\omega$ del nostro corpo. Chiaramente, il fatto che in corrispondenza ad O si produca un aumento dell'energia cinetica ($J\omega^2/2 = L^2/2\omega$) determina poi la necessità di un più grande lavoro resistente del peso (e quindi di un più grande spostamento verso l'alto del ba-

³⁰ Questi risultati sperimentali, ottenuti da David E. H. Jones, sono presentati e discussi in *Physics Today*, aprile 1970.

ricentro) nella successiva fase di risalita ^[31].

Si noti peraltro che, indipendentemente dall'aumento dell'energia cinetica nella posizione centrale, il fatto stesso che in tale posizione il baricentro subisca un innalzamento Δh (si veda in fig. 38 la traiettoria del baricentro) è già sufficiente a produrre un aumento Δh nella quota h_B raggiunta a fine corsa: dato infatti che in A e in B l'energia cinetica è zero, se trascuriamo la variazione dell'energia cinetica in O è necessario che il lavoro del peso in discesa e in salita sia (a parte il segno) lo stesso, e quindi che sia uguale – in discesa e in salita – la variazione di livello del baricentro. Ciò richiede che sia $h_B = h_A + \Delta h$.

Quando, giunti in B , assumiamo la posizione accovacciata, il baricentro si abbassa di $\Delta h \cos \varphi_B$ (dove φ_B è l'angolo tra la corda e la verticale): conseguentemente, nella successiva fase di discesa il lavoro del peso – e la conseguente produzione di energia cinetica – è un po' minore. Questo però ci permetterà di alzarci nuovamente in O . Ed è chiaro che il vantaggio supera lo svantaggio, perché l'innalzamento Δh che l'operazione produce nei due punti estremi è più grande del successivo abbassamento $\Delta h \cos \varphi$.

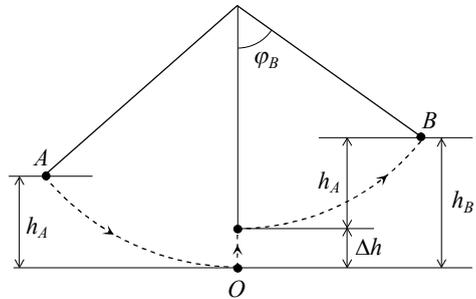


Fig. 38 – La linea tratteggiata mostra la traiettoria del baricentro.

³¹ L'aumento dell'energia cinetica proviene dal lavoro muscolare da noi compiuto mentre ci alziamo in piedi. Ci si potrebbe chiedere come mai non produciamo analogamente energia cinetica quando, dalla posizione accovacciata, ci alziamo in piedi sul pavimento della nostra stanza. Il fatto è che lo sforzo da noi compiuto sull'altalena in movimento è molto più grande, dovendo i nostri muscoli produrre anche la necessaria forza centripeta. Nel riferimento non inerziale dell'altalena, il lavoro che dobbiamo compiere per alzarci in piedi corrisponde alla somma di due lavori resistenti: quello del peso e quello della forza centrifuga. Questo secondo lavoro produce l'aumento di energia cinetica che si registra nel riferimento fisso.

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

- 14 Sarebbe corretto scrivere il teorema del momento angolare nella forma scalare $\tau = dL/dt$?
- 15 Quando un corpo trasla, il teorema del momento angolare può essere ad esso applicato assumendo come polo uno qualsiasi dei suoi punti (*vero/falso*).
- 16 Quando la velocità del centro di massa è zero, il momento angolare di un sistema è uguale rispetto a qualsiasi polo, ma il momento complessivo delle forze è in generale diverso a seconda del polo prescelto^[32]. Come mai allora, quando è $v_{CM} = 0$, la $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ può essere applicata scegliendo come polo un punto qualsiasi?
- 17 Le tabelle seguenti danno, in termini di componenti cartesiane ortogonali, le posizioni e le velocità di due particelle A e B all'istante 1 e all'istante 2. Si chiarisca se sulla base di questi dati è possibile escludere che il sistema delle due particelle sia isolato.

t (s)	x_A (cm)	y_A (cm)	z_A (cm)	v_{Ax} (cm/s)	v_{Ay} (cm/s)	v_{Az} (cm/s)
1	0	0	0	0	10	0
2	1	1	0	0	-10	0

t (s)	x_B (cm)	y_B (cm)	z_B (cm)	v_{Bx} (cm/s)	v_{By} (cm/s)	v_{Bz} (cm/s)
1	5	0	0	0	-40	0
2	1	-4	0	0	40	0

- 18 Le tabelle seguenti danno, in termini di componenti cartesiane ortogonali, le posizioni e le velocità di due particelle A e B all'istante 1 e all'istante 2. Si chiarisca se sulla base di questi dati è possibile escludere che il sistema delle due particelle sia isolato, e se è lecito ipotizzare che le forze interne siano conservative.

t (s)	x_A (cm)	y_A (cm)	z_A (cm)	v_{Ax} (cm/s)	v_{Ay} (cm/s)	v_{Az} (cm/s)
1	0	0	0	0	10	0
2	1	1	0	10	-20	0

t (s)	x_B (cm)	y_B (cm)	z_B (cm)	v_{Bx} (cm/s)	v_{By} (cm/s)	v_{Bz} (cm/s)
1	5	0	0	0	-40	0
2	1	-4	0	-40	80	0

³² Pro memoria: il momento di un sistema di forze è uguale per qualsiasi polo solo quando la somma delle forze è zero, nel qual caso è necessariamente zero anche l'accelerazione (non la velocità) del centro di massa.

- 19 Relativamente alla situazione rappresentata in fig. 39, dove è inteso che siano zero gli attriti e le masse dei fili e della carrucola, il problema del calcolo dell'accelerazione dei blocchi è già stato risolto al capitolo 8 (domanda 25, pag. 215) applicando le leggi di Newton. Si risolva qui lo stesso problema applicando invece il teorema del momento angolare.

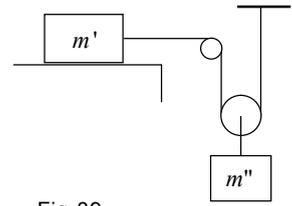


Fig. 39

- 20 Che cosa cambierebbe nella risposta alla domanda precedente se il filo che tira il blocco m' non venisse fissato esattamente all'altezza del CM del blocco, ma più in alto o più in basso?

- 21 Un blocco tirato da una forza orizzontale \vec{T} (fig. 40) trasla scivolando lungo un piano orizzontale. Supposto che non ci siano attriti, si discuta l'equilibrio del blocco alla rotazione.

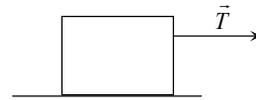


Fig. 40

- 22 L'equilibrio alla rotazione del blocco della fig. 35 poteva anche essere discusso (*vero/falso*) imponendo l'uguaglianza a zero del momento complessivo delle forze rispetto al lato più avanzato – rispetto alla direzione di marcia – del rettangolo di base.

- 23 Si applichi il teorema del momento angolare per calcolare l'accelerazione dei blocchi del sistema mostrato in fig. 41. Si assuma che non ci siano attriti e che sia trascurabile la massa dei fili e delle carrucole. Il problema era già stato risolto al capitolo 8 (domanda 26, pag. 215) in applicazione delle leggi di Newton.

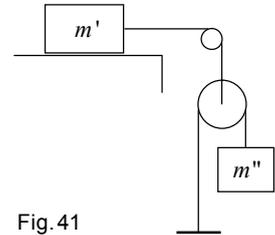


Fig. 41

- 24 Un blocco omogeneo a forma di parallelepipedo retto viene trasportato da un autocarro: due lati del rettangolo di base del blocco sono paralleli alla direzione di marcia. Posto che l'attrito statico sia in ogni caso abbastanza grande da impedire al blocco di scivolare, si determini la massima velocità con cui l'autocarro può percorrere una curva di raggio R senza che il blocco si ribalti.
- 25 Il funambolo che cammina su una corda tesa sorregge sempre con le mani una lunga asta orizzontale, disposta perpendicolarmente alla corda. A quale scopo?

- 26 Due cilindri di materiale omogeneo, A e B , hanno uguale massa e uguale altezza (fig. 42): anche il materiale è lo stesso. Il cilindro A è pieno, e ha raggio R . Il cilindro B è cavo, e ha raggio interno R (cosicché A potrebbe riempire esattamente la cavità di B). Si confrontino i tempi necessari perché, sotto l'azione di una stessa coppia di forze, i due cilindri raggiungano la stessa velocità di rotazione attorno al proprio asse.

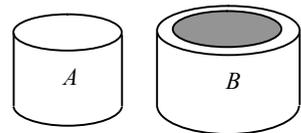


Fig. 42

- 27 Il cilindro omogeneo 1 (fig. 43), che può girare senza attrito attorno al proprio asse geometrico, è inizialmente immobile. Un cilindro omogeneo coassiale 2, che ruota senza attrito per inerzia con velocità angolare ω , cade a un certo momento sul disco 1 e, per effetto dell'attrito tra le due superfici a contatto, lo trascina in rotazione. Si trovi la velocità angolare finale del sistema.

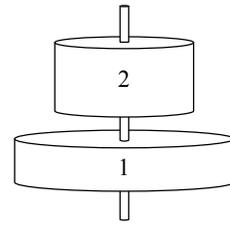


Fig. 43

- 28 Al capitolo 9 (esercizio 33, pag. 268) si è trovato, in base al teorema dell'energia cinetica, che l'accelerazione di un cilindro omogeneo che rotola senza strisciare lungo un piano avente inclinazione φ sull'orizzontale è $a = (2/3)g \sin \varphi$.

Si trovi ora questo stesso risultato applicando il teorema del momento angolare.

- 29 Con riferimento alla domanda precedente, si supponga ora che tra cilindro e piano inclinato non ci sia alcun attrito. Applicando la $\tau = J\alpha$ all'asse del cilindro, rispetto al quale (fig. 44) sia il peso che la reazione del vincolo hanno momento zero, si ottiene $\alpha = 0$, il che corrisponde a un moto di discesa con velocità angolare sempre uguale (se il cilindro è inizialmente immobile, con velocità angolare sempre nulla). Se però applichiamo la $\tau = J\alpha$ alla retta di contatto, si ottiene $\alpha \neq 0$ perché rispetto a tale retta il peso ha momento diverso da zero. Per quale ragione dobbiamo accettare il primo risultato ($\alpha = 0$) e non invece il secondo ($\alpha \neq 0$)?

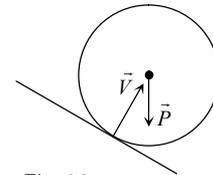


Fig. 44

- 30 Una sbarra omogenea piegata a forma di L viene lanciata lungo un piano orizzontale in modo che scivoli ruotando su sé stessa: si osserva che il moto di rotazione si arresta nel preciso istante in cui la velocità del CM si annulla. Come si spiega tale circostanza?
- 31 Lancio del giavellotto: è noto che, durante il volo, il giavellotto si inclina sempre di più verso il basso, così da mantenersi sempre parallelo alla traiettoria del CM. Che cosa si può desumere da questo fatto relativamente alla posizione del CM rispetto all'attrezzo?
- 32 Supponiamo di tenere in mano, diritta davanti a noi in posizione orizzontale, una bacchetta sulla quale è imperniato un disco in rapida rotazione: la bacchetta sia diretta verso Est, il disco ruoti, dal nostro punto di vista, in senso orario. Se, a un certo momento, cerchiamo di far ruotare bruscamente la bacchetta verso l'alto, la bacchetta scarta lateralmente. In quale direzione?
- 33 Con riferimento alla domanda precedente: chi sposta il centro di massa del disco lateralmente, visto che noi alziamo la bacchetta verso l'alto?
- 34 Il blocco A (fig. 45) scivola senza attrito su un piano orizzontale, tirato da un filo che scorre nella gola di una puleggia e sostiene all'altra estremità il blocco B . Fatta l'ipotesi che l'attrito

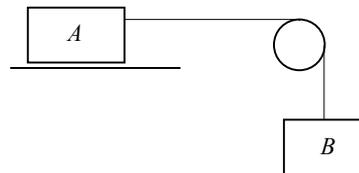


Fig. 45

impedisca al filo di scivolare sulla puleggia, la quale quindi è costretta a ruotare, si calcoli con quale forza il blocco B tira il filo verso il basso. Si assuma che la carrucola sia schematizzabile come disco omogeneo, e che il suo moto di rotazione non sia contrastato da alcun attrito.

- 35 Un motociclista percorre con moto uniforme una curva di raggio R in un piano orizzontale. Si trovi una relazione tra velocità e inclinazione della moto.
- 36 Un disco omogeneo, il cui asse geometrico ha direzione orizzontale, è vincolato in modo da poter oscillare senza attrito ruotando attorno a una delle sue generatrici. Supponendo che agiscano solo il peso e la reazione del vincolo, che il cilindro abbia inizialmente velocità zero e che l'asse del cilindro si trovi inizialmente alla stessa altezza dell'asse di rotazione, si determini, in funzione della distanza angolare φ dalla posizione iniziale, valore e direzione della reazione del vincolo.

- 37 La fig.46 rappresenta un cilindro omogeneo di raggio R sul quale è avvolto in senso orario un nastro. Il cilindro è posto su un piano orizzontale, e il nastro viene tirato da una forza orizzontale \vec{F} come in figura. Considerando sia il caso di completa assenza di attrito che il caso di attrito abbastanza grande da determinare un moto di puro rotolamento, si individui la posizione dell'asse di rotazione e si determini l'accelerazione dell'asse del cilindro.

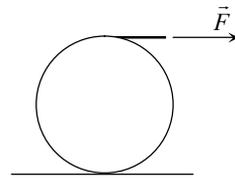


Fig.46

- 38 Il cilindro descritto al quesito precedente viene capovolto, cosicché la forza che tira il nastro agisce questa volta a distanza zero dal piano d'appoggio. Si individui la posizione dell'asse di rotazione, e si calcoli in quanto tempo, a partire dall'istante in cui \vec{F} comincia ad agire, la lunghezza del pezzo di nastro che sporge dal disco passa, in assenza di attrito, dal valore iniziale L_0 al successivo valore L .

- 39 Una piattaforma circolare A , schematizzabile come disco omogeneo di massa M e raggio R , è vincolata in modo da poter ruotare senza alcun attrito attorno al proprio asse geometrico. Sulla piattaforma, a distanza d dall'asse di rotazione (fig.47), è fissata un'asta rigida verticale su cui è imperniata una tavola circolare B a sua volta schematizzabile come disco omogeneo, di massa m e raggio r . A un tratto, per effetto di un motore posto sulla piattaforma, la tavola B entra in rotazione attorno al proprio asse geometrico. Come si comporta la piattaforma? Si ritengano trascurabili la massa dell'asta verticale e quella del motore.



Fig.47

- 40 A che altezza bisogna colpire una palla da biliardo, con la stecca in posizione orizzontale, per ottenere immediatamente un moto di rotolamento senza strisciamento?
- 41 Un filo di massa trascurabile è avvolto (fig.48) su un disco omogeneo di massa M e raggio R . Si trovino l'acce-

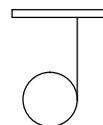


Fig.48

lerazione del disco e la forza che il vincolo esercita all'estremità superiore del filo quando il disco viene lasciato cadere a partire dalla posizione mostrata in figura.

- 42 Sulle due carrucole – una fissa, l'altra libera – rappresentate in fig.49, entrambe schematizzabili come dischi omogenei di massa M e raggio R , è avvolta una corda di massa trascurabile. Determinare quale forza sostiene la carrucola superiore.

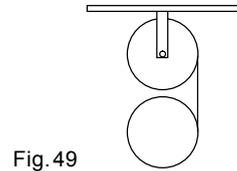


Fig.49

- 43 All'istante t' un blocco di massa m viene applicato all'estremo di un filo di massa trascurabile avvolto su una puleggia avente momento d'inerzia J rispetto al proprio asse geometrico (fig.50), cosicché la puleggia entra in rotazione: all'istante t'' il filo si è completamente srotolato. Sapendo che il moto della puleggia è contrastato sull'asse di rotazione da una coppia d'attrito di momento costante τ_a , si determini:

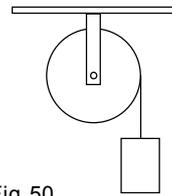


Fig.50

- (a) la velocità angolare della puleggia all'istante t'' ,
 (b) quanti giri fa la puleggia dopo tale istante prima di fermarsi nuovamente,
 (c) quanto tempo impiega la puleggia a fermarsi.

- 44 Due sferette di uguale massa m sono collegate tramite una sbarra rigida di massa trascurabile e lunghezza $2d$ (fig.51), la quale ruota con velocità angolare costante ω attorno a un asse fisso passante per il suo centro. Sapendo che l'angolo θ tra la sbarra e l'asse di rotazione si mantiene costante, si chiarisca

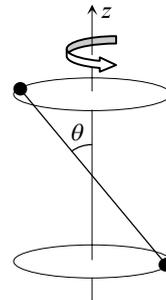


Fig.51

- (a) se (ed eventualmente in che modo) il risultante delle forze applicate al sistema mobile e il risultante dei momenti di tali forze variano nel tempo,
 (b) che cosa accadrebbe se a un dato istante tutte le forze esterne al sistema cessassero di agire.
- 45 Un carrello e una sfera vengono lasciati scendere lungo un piano inclinato: chi dei due impiegherà meno tempo ad arrivare in fondo? Si supponga che la sfera e le ruote del carrello rotolino senza strisciare. Si schematizzino le ruote del carrello sia come dischi omogenei di massa m e raggio R sia, in alternativa, come anelli di raggio R in cui la massa m si trova tutta a distanza R dal centro.
- 46 Con riferimento alla situazione discussa al n.15 di pag.372 (rotolamento senza strisciamento di un cono omogeneo), si mostri che il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa è posto in un piano verticale.

SOLUZIONI

- 14 Solo quando la direzione del momento angolare è costante. La forma scalare $\tau = dL/dt$ stabilisce infatti che, se c'è un momento τ non nullo, *il modulo* del momento angolare è necessariamente in variazione, il che non è vero: il momento angolare potrebbe variare anche solo per la direzione. Si consideri ad esempio il caso di un pendolo conico (sferetta che, sospesa a un filo fissato al punto K , si muove di moto circolare uniforme in un piano orizzontale sotto l'azione del peso e della reazione vincolare del filo): rispetto a K il momento delle forze (che si riduce al momento del peso) mantiene un valore costante; ma anche il momento angolare della sferetta ha un valore L costante, perciò la derivata temporale di tale valore è zero. È chiaro che il teorema del momento angolare non può, in questo caso, essere scritto nella forma scalare $\tau = dL/dt$. Analogia: dal fatto che sia, per definizione, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ non discende affatto che debba anche essere $a = dv/dt$, perché se la velocità cambia in direzione il modulo dell'accelerazione è diverso da zero anche quando il modulo v è costante.
- 15 Vero, perché tutti i punti del corpo hanno velocità parallela a quella del centro di massa, e il teorema del momento angolare (nella forma abituale $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$) vale se il momento delle forze e il momento angolare vengono riferiti allo stesso polo, che può essere un punto qualsiasi se la velocità del centro di massa è zero, altrimenti deve essere o un punto avente velocità zero, oppure il CM, oppure infine un qualsiasi punto avente velocità parallela a quella del CM^[33]. Naturalmente, il momento delle forze e il momento angolare del sistema sono *diversi* a seconda del polo prescelto.
- 16 Se la velocità del CM è zero all'istante che si considera, ma è diversa da zero subito prima e subito dopo, il momento angolare è uguale per qualsiasi polo all'istante che si considera, *ma non prima e non dopo*, perciò è diversa da zero la sua evoluzione nel tempo, e quindi la sua derivata temporale. Se invece la velocità del CM è uguale a zero anche subito prima e subito dopo l'istante considerato, è indipendente dal polo sia il momento angolare che la sua derivata temporale: all'istante considerato risulta però uguale a zero anche l'accelerazione del CM, il che significa che è zero la somma delle forze, per cui anche il momento complessivo delle forze risulta uguale per qualsiasi polo.

³³ La relazione generale tra momento delle forze e momento angolare (rispetto a uno stesso polo O) è $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt + \vec{v}_O \times M \vec{v}_{CM}$, dove M è la massa del sistema considerato.

- 17 Le posizioni e le velocità di A e B nei due istanti considerati sono rappresentate in fig. 52. Se non ci sono forze esterne, devono mantenersi costanti sia la quantità di moto che il momento angolare (rispetto al CM, o rispetto a un qualsiasi punto fisso). Si vede subito che, rispetto al punto di ascissa 1 cm e ordinata 0, il momento angolare è zero all'istante 2, mentre è diverso da zero (e rivolto perpendicolarmente alla pagina dal lettore verso la pagina) all'istante 1. Ciò basta a concludere che certamente il sistema non è isolato.

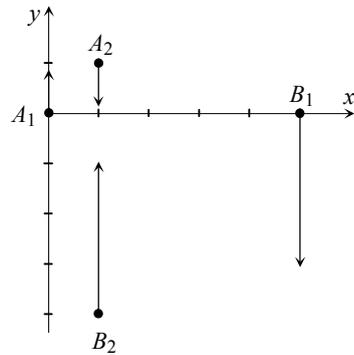


Fig. 52

- 18 Dalla fig. 53 si nota subito che, rispetto al punto K di ascissa 1 cm e ordinata 0, il momento angolare di entrambe le particelle si è conservato in valore e direzione (all'istante 2 i componenti verticali delle velocità sono posti su una retta che passa da K , e quindi non contribuiscono al momento angolare, mentre i componenti orizzontali sono uguali in modulo alle velocità dei due punti all'istante 1). Dal punto di vista dunque del momento angolare, è possibile che il sistema sia isolato. Se poi effettivamente il sistema è isolato, la quantità di moto si conserva sia in direzione x che in direzione y . In direzione x all'istante 1 la quantità di moto è zero, all'istante 2 è zero solo se $m_A = 4m_B$ (il componente x della velocità di A è 4 volte più piccolo del componente x della velocità di B). Nell'eventualità $m_A = 4m_B$, in direzione y la quantità di moto del sistema è zero sia all'istante 1 che all'istante 2, e quindi risulta conservata anch'essa (si noti che nel caso $m_A = 4m_B$ il CM del sistema è localizzato in K). In definitiva, l'ipotesi che il sistema sia isolato non può essere esclusa.

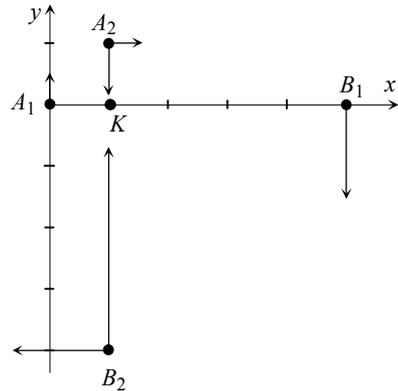


Fig. 53

L'eventualità che il sistema sia isolato esclude però l'eventualità che le forze interne siano conservative. Se infatti le forze interne fossero conservative, il loro lavoro dipenderebbe solo dalla variazione della distanza tra i due punti: e nel caso considerato sarebbe zero, per il fatto che la distanza finale tra i due punti è uguale a quella iniziale. Ma in tal caso l'energia cinetica finale dovrebbe avere lo stesso valore di quella iniziale, cosa che evidentemente non si verifica. Se invece il sistema non è isolato, oltre alle forze interne agiscono anche forze esterne, e allora è possibile che le forze interne siano conservative.

- 19 Sia R_1 (fig. 54) il raggio della carrucola superiore, sia R_2 il raggio della carrucola inferiore. Consideriamo il sistema dei due blocchi: le forze esterne sul blocco m' sono il peso, la reazione del piano d'appoggio e una forza T verso destra, le forze esterne sul blocco m'' sono il peso e una forza $2T$ verso l'alto. Se m'' ha velocità v e accelerazione a , m' ha velocità $2v$ e accelerazione $2a$ (vedi risposta 25, pag. 222). Il fatto poi che il blocco m' sia animato da moto traslatorio

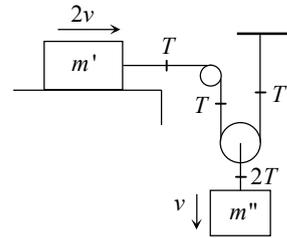


Fig. 54

implica che il momento delle forze rispetto al CM sia zero: dato allora che la forza proveniente dal filo e la forza peso agiscono lungo rette passanti dal CM, lo stesso deve avvenire per la reazione del piano d'appoggio, che pertanto agisce lungo la retta d'azione del peso. Se riferiamo allora il momento angolare del sistema dei blocchi e il momento delle forze al punto centrale della carrucola fissa (la carrucola superiore), e consideriamo le componenti di tali vettori nella direzione della perpendicolare alla pagina (orientata dal lettore alla pagina), possiamo scrivere:

$$[A] \quad \tau = TR_1 + (m''g - 2T)(R_1 + R_2) = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [m'2vR_1 + m''v(R_1 + R_2)].$$

Tenuto conto che è $T = m'2a$, dalla relazione precedente risulta che l'accelerazione del blocco m'' è $a = \frac{m''g}{m'' + 4m'}$.

Avremmo ovviamente anche potuto considerare come «sistema» l'insieme blocchi + filo + carrucole. In tal caso le forze esterne da mettere in conto sarebbero state i pesi dei due blocchi, la reazione del piano su cui appoggia m' , la forza T con cui il filo è tirato verso l'alto dal vincolo a cui è fissato superiormente, la forza che la carrucola fissa riceve dall'asse su cui è imperniata. Rispetto al punto centrale di tale carrucola il momento angolare del sistema resta chiaramente uguale, e quindi deve restare uguale anche il momento delle forze esterne. In effetti, tenuto conto che rispetto al polo prescelto il momento della forza del perno sulla carrucola fissa è zero, il momento delle forze esterne è espresso in questo caso da $m''g(R_1 + R_2) - T(R_1 + 2R_2)$, ed è immediato verificare che il suo valore è identico a quello ottenuto in precedenza.

- 20 Supponiamo che il punto S d'attacco del filo si trovi ad altezza y sul CM (fig. 55). L'equilibrio del blocco alla rotazione attorno al CM richiede allora che il momento orario $Ty = m'ay$ della forza \vec{T} rispetto al CM venga compensato da un uguale momento antiorario della reazione \vec{V} del piano d'appoggio (il che implica che la retta d'azione di \vec{V} subisca un opportuno spostamento verso destra). Pertanto, a primo membro della relazione [A] (risposta precedente)

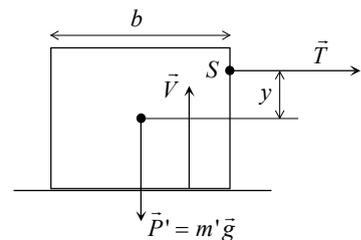


Fig. 55

bisognerà aggiungere sia il momento, rispetto al centro della carrucola fissa, del

peso sia il momento della reazione \vec{V} , e in definitiva il momento $-m'ay$ della relativa coppia (negativo per la convenzione ivi adottata). A secondo membro il momento angolare del blocco m' sarà però dato non più da $m'vR_1$, ma da $m'v(R_1 - y)$. La corrispondente derivata temporale passa pertanto da $m'aR_1$ a $m'a(R_1 - y)$, il che significa che a secondo membro compare *esattamente la stessa variazione* che è comparsa a primo membro: è chiaro dunque che la soluzione del problema non cambia. Si pone tuttavia per il blocco, con $y \neq 0$, un problema di equilibrio alla rotazione (si veda la domanda successiva).

- 21 Si consideri ancora la fig. 50: dato che la distanza x del punto d'applicazione della reazione \vec{V} (diretta verticalmente per l'assenza d'attrito) dalla verticale per il CM non può superare il valore $b/2$, il momento massimo della reazione rispetto al CM è $mg b/2$, e conseguentemente anche il momento Ty di \vec{T} non deve superare tale valore, altrimenti il blocco entra in rotazione: in senso orario se il punto d'attacco sta sopra il CM, in senso antiorario se sta sotto. Porre S all'altezza del CM ($y = 0$) significa insomma garantire al blocco, in assenza di attrito, un moto di traslazione per qualsiasi valore di \vec{T} .
- 22 Falso. Ad esempio, se il filo è fissato all'altezza del CM la reazione del vincolo passa anch'essa dal CM, e quindi, rispetto alla retta z sulla quale è posto il lato più a destra del rettangolo di base, il momento risultante ha valore $Th/2$, diverso da zero: il che non impedisce al blocco di muoversi di moto traslatorio. È solo con riferimento a un *effettivo* asse di rotazione (o a un asse parallelo passante per il CM) che il teorema momento angolare può assumere la forma $\tau_z = d(J_z \omega)/dt$. Nel nostro caso, il fatto che, rispetto alla retta z , il momento $Th/2$ delle forze risulti costante nel tempo corrisponde alla circostanza che, in caso di traslazione, il momento angolare si può calcolare localizzando tutta la massa nel CM, e che nel caso specifico il CM si muove di moto rettilineo uniformemente vario: rispetto a z il momento angolare del blocco, che ha massa m , è quindi $m(v_0 + at)h/2$, e la sua derivata temporale è $mah/2$, costante. Uguagliando tale derivata al momento $Th/2$ delle forze si ottiene che (come si sapeva a priori) è $T = ma$.

- 23 Si consideri la fig. 56: se assumiamo come «sistema» l'insieme blocchi + fili + carrucole, le forze esterne sono la trazione verticale T del terreno sul filo, i pesi $m'g$ ed $m''g$ dei due blocchi, la reazione del piano su cui appoggia m' , la reazione del perno sulla carrucola fissa. Tenuto presente che la velocità e l'accelerazione del blocco sospeso sono il doppio della velocità v e dell'accelerazione a dell'altro blocco (vedi risposta 26 a pag. 222) e assunto come polo il centro della carrucola fissa, per il teorema del momento angolare sarà

$-T(R_2 - R_1) + m''g(R_1 + R_2) = d[m'vR_1 + m'2v(R_1 + R_2)]/dt$. Tenuto conto che è $2T = m'a$, si ottiene in definitiva $a = 2m''g/(4m'' + m')$.

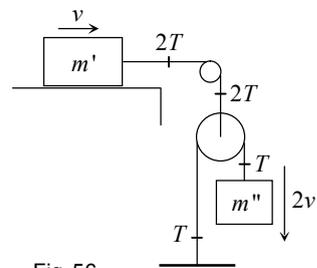


Fig. 56