Capitolo 15

Oscillazioni

15.1 L'oscillatore armonico

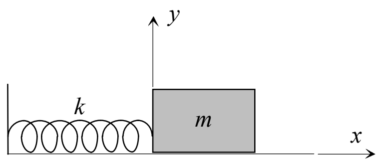

Fig. 1

Abbiamo in precedenza (pag. 228) già considerato il caso dell'oscillatore armonico, il caso cioè di un corpo che oscilla sotto l'azione di una forza elastica, in assenza di attrito e di qualsiasi altra forza capace di condizionarne la legge del moto. Con riferimento alla fig. 1, nella quale il blocco di massa *m*, attaccato a una molla priva di massa e di attriti interni, si trova nella posizione in cui la forza proveniente dalla molla è zero, la forza elastica sarà espressa (scalarmente) da $-kx$. La seconda legge di Newton, «forza uguale a massa per accelerazione», si può allora applicare al blocco scrivendo:

$$\text{[A]} \qquad -kx = m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Se, a partire dalla situazione di equilibrio, il blocco viene spostato di *A* e poi (istante zero) lasciato andare, oscillerà di moto armonico attorno alla posizione iniziale di equilibrio con ampiezza *A* e con una frequenza dipendente dalla sua massa e dalla costante elastica della molla, ma *non* dalla particolare ampiezza di oscillazione:

$$\text{[B]} \qquad x = A\cos(\omega t)$$

in cui è $\omega = \sqrt{k/m}$ (e quindi $f = \sqrt{k/m}\,/2\pi$) [1]. L'energia meccanica complessiva (cinetica più potenziale) dell'oscillatore armonico si mantiene, durante l'oscillazione, a un valore costante (se il riferimento dell'energia potenziale è nella posizione di equilibrio, il valore costante dell'energia totale coincide col valore massimo dell'energia cinetica, quello che spetta al blocco nel momento in cui passa dalla posizione di equilibrio).

---

[1] Con una diversa scelta dell'istante zero, all'argomento ωt del coseno si deve aggiungere un'opportuna costante di fase φ_0, cosicché per $t = 0$ la distanza x risulti diversa da A (e la velocità non risulti uguale a zero), cfr. punto 3, pag.116.

15.2 L'oscillatore smorzato

1. Quella dell'oscillatore armonico 'libero' è ovviamente una situazione solo immaginaria: nella realtà, il moto di un corpo che oscilla risulta sempre contrastato da forze di attrito, e, se non intervengono forze capaci di restituire al corpo l'energia cinetica perduta per effetto degli attriti (si pensi per esempio alla molla di un orologio a pendolo), tende più o meno rapidamente ad arrestarsi: si parla allora di **moto armonico smorzato**.

2.Un caso di particolare interesse – anche per le applicazioni tecniche – è quello di una resistenza d'attrito proporzionale alla velocità del corpo: situazione che si verifica con buona approssimazione per un corpo che oscilla all'interno di un fluido, gas o liquido che sia, *mantenendosi a bassi valori di velocità*. La forza d'attrito si potrà in tal caso esprimere (scalarmente) come $-bv$, dove b (**costante di smorzamento**) è un coefficiente di proporzionalità il cui valore dipende dalla viscosità del liquido e dalla geometria (forma e dimensioni) del corpo oscillante. Nel caso, per esempio, di una sfera di raggio R, è $b = 6\pi\eta R$ (legge di Stokes). Se ci riferiamo alla situazione della fig. 1, la seconda legge di Newton si può scrivere, per il blocco che oscilla in presenza di attrito, come segue:

[A] $$-kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Si trova che, per costante di smorzamento b di valore sufficientemente piccolo in rapporto al prodotto tra rigidezza k e massa m ($b \le 4km$), la soluzione di tale equazione differenziale nell'incognita $x = x(t)$ è

[B] $$x = A\mathrm{e}^{-(b/2m)t}\cos\omega' t\,,$$

dove

[C] $$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\quad.$$

Si è ancora supposto che per $t = 0$ il corpo oscillante si trovi (come implicito anche in fig. 2) con velocità zero a distanza A dal centro dell'oscillazione.

3. A norma della [B], l'effetto dello smorzamento è duplice. Prima di tutto, l'ampiezza di oscillazione diminuisce esponenzialmente nel tempo (fig. 2) in modo tanto più rapido quanto più grande è il fattore di smorzamento b in rapporto alla massa oscillante m.

In secondo luogo, la pulsazione ω' del moto è inferiore (in genere però di molto poco, in un diagramma come quello della fig. 2 la differenza non risulta visibile) alla pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$ delle oscillazioni «libere» (cioè a smorzamento zero).

4. Naturalmente, la relazione [C] ha senso solo se il radicando è ≥ 0, se cioè $b \le$ $\le 2\sqrt{km}$. Per coefficienti di smorzamento più grandi la [B] e la [C] non sono più

valide. Se b raggiunge il valore critico $2\sqrt{km}$ il blocco si porta nella posizione di equilibrio senza oscillare, senza cioè oltrepassare la posizione di equilibrio: la distanza x diminuisce esponenzialmente nel tempo senza mai cambiare segno. A maggior ragione non si verificano oscillazioni se b supera il valore critico.

5. Gli ammortizzatori di un'automobile forniscono un esempio familiare di oscillazione smorzata. Il miglior *comfort* dei passeggeri si ottiene in regime di smorzamento critico, o leggermente sottocritico. Man mano che gli ammortizzatori invecchiano e perdono di efficienza il valore di b diventa sempre più piccolo, e le oscillazioni causate dalle irregolarità stradali persistono più a lungo.

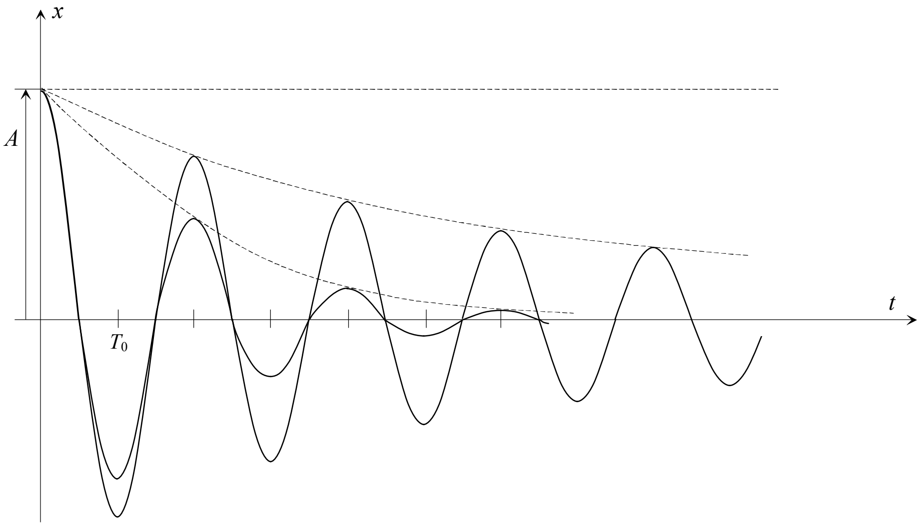

Fig. 2 – *Le tre linee tratteggiate hanno tutte equazione* $x = A\,e^{-(b/2m)\,t}$. *Il rapporto b/m ha valore minimo (zero) per quella superiore e valore massimo per quella inferiore. Il periodo* T_0 *indicato nel grafico è quello di un'oscillazione non smorzata.*

15.3 L'oscillatore forzato

1. Quando si vuole che un'oscillazione persista nel tempo nonostante gli inevitabili effetti di smorzamento, occorre applicare al corpo che oscilla una forza che, compiendo lavoro, fornisca al corpo un'energia cinetica pari a quella man mano perduta per effetto del lavoro resistente delle resistenze d'attrito: si parla in tal caso di **oscillazione forzata**. Un esempio famigliare è quello dell'altalena – la classica altalena a pendolo – che continua ad oscillare solo se alla massa oscillante viene somministrata una opportuna successione di impulsi di frequenza pari alla

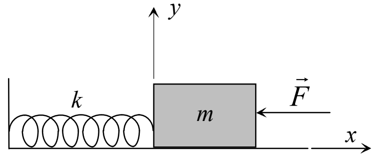

Fig. 3

frequenza di oscillazione dell'altalena. Ma in altri casi la frequenza della forza impressa può differire dalla frequenza delle oscillazioni libere del sistema: se, come mostrato in fig. 3, applichiamo al blocco una forza $\vec{F}$ che varia periodicamente nel tempo con una data frequenza, il sistema oscillerà con la frequenza di $\vec{F}$, non con la frequenza *propria* del sistema (la frequenza, determinata dai valori di m e di k, con cui il blocco oscillerebbe attorno alla posizione di equilibrio in assenza di $\vec{F}$).

2. L'ampiezza di oscillazione dipenderà in tal caso, oltre che dall'entità dello smorzamento, dalla differenza tra la frequenza della forza impressa e la frequenza propria del sistema. Il caso più semplice da studiare è quello, del tutto particolare, di una forza che dipende dal tempo in modo sinusoidale. Dopo una breve fase iniziale di assestamento, la situazione si stabilizza (situazione stazionaria, o «di regime»): l'ampiezza di oscillazione risulta massima – ma chiaramente tanto minore quanto più forte, a parità di costante elastica e di massa oscillante, è lo smorzamento – quando le due frequenze, quella della forza impressa e quella naturale del sistema oscillante, coincidono, o sono comunque molto vicine: è la cosiddetta condizione

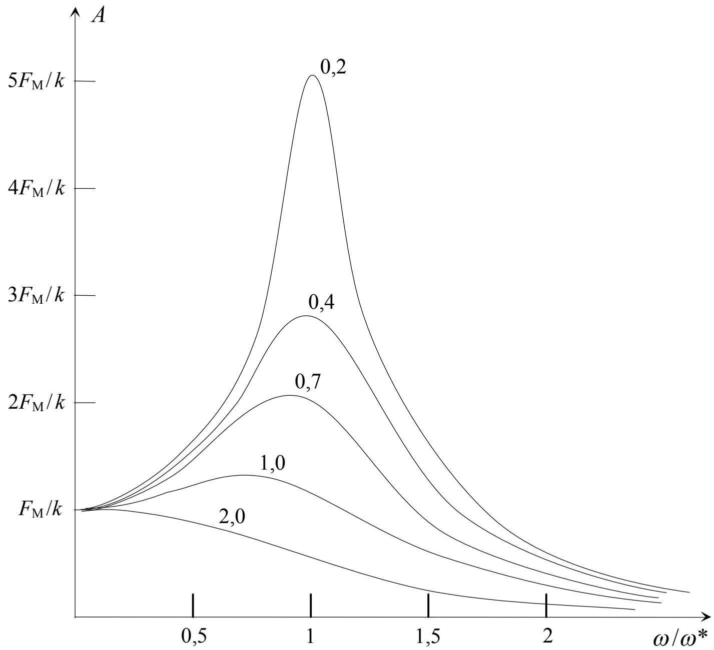

Fig. 4 – *Come varia, in funzione del rapporto tra la pulsazione ω della forza impressa e la pulsazione $\omega^* = \sqrt{k/m}$ delle oscillazioni libere, l'ampiezza delle oscillazioni forzate di un oscillatore smorzato. Ogni curva è contrassegnata col valore della grandezza adimensionale $b/\sqrt{km}$ che misura l'entità dello smorzamento [da Sears - Zemanski - Young].*

di **risonanza**. Man mano che la frequenza della forza impressa si allontana dal valore di risonanza, l'ampiezza di vibrazione diminuisce come mostra la fig. 4, dove ogni curva si riferisce a un particolare valore costante della grandezza adimensionale $b/\sqrt{km}$ (che definisce l'entità dell'effetto di smorzamento). Si noti che, in ogni caso, quando la frequenza impressa tende a infinito l'ampiezza di oscillazione tende a zero, e quando la frequenza impressa diventa zero (forza $\vec{F}$ costante in valore e direzione), il sistema, a regime, non oscilla più; e a questo punto l'ampiezza di oscillazione mostrata in fig. 4 è semplicemente la deformazione statica ($\Delta l = F/k$) prodotta da $\vec{F}$ (questa situazione si realizza per esempio negli strumenti di misura in cui un ago si sposta su una scala graduata). Si noti anche che al crescere del valore del parametro $b/\sqrt{km}$ il massimo delle curve, via via meno accentuato (fino a scomparire del tutto), si sposta verso frequenze di eccitazione minori.

3. È ben noto che gli effetti di risonanza possono a volta comportare problemi di stabilità anche molto seri. L'esempio classico è quello di un reparto di militari, che procedendo a passo cadenzato di marcia su un ponte potrebbe innescare vibrazioni di frequenza prossima a una delle frequenze proprie della struttura, vibrazioni quindi di un'ampiezza potenzialmente pericolosa per l'integrità del ponte. Per contro, in altre situazioni gli effetti di risonanza sono determinanti in senso positivo: l'esempio più semplice è ancora quello dell'altalena, dove la persona che oscilla può, notoriamente, aumentare l'ampiezza di oscillazione imprimendo una serie di impulsi aventi la stessa frequenza dell'altalena (cfr. punto 10 pag. 386). In un ricevitore radio o televisivo, gli elettroni di un circuito elettrico 'accordato' su una data frequenza oscillano con grande ampiezza solo sotto l'azione delle onde elettromagnetiche di quella frequenza: il che serve a selezionare una determinata stazione emittente escludendo le altre.

4. Fenomeni di risonanza si possono facilmente produrre in ambito acustico. Abbassando e sùbito rilasciando un tasto del pianoforte, facciamo vibrare e poi subito fermiamo la corda relativa, producendo un suono di breve durata: in realtà anche *tutte* le altre corde, se liberate dal dispositivo di smorzamento (basta tenere abbassato il tasto corrispondente), sono state messe in vibrazione con la stessa frequenza.

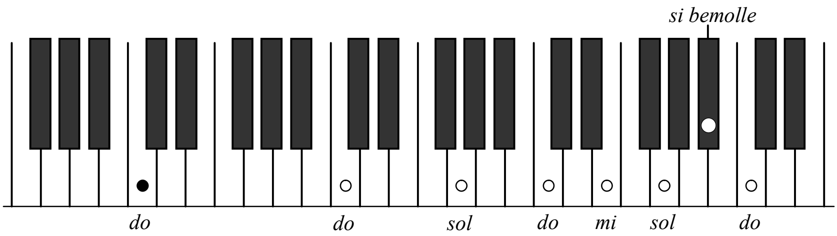

Fig. 5 – *Suonando il tasto contrassegnato col cerchietto nero, le corde di tutti i tasti contrassegnati col cerchietto bianco possono entrare in risonanza.*

L'ampiezza di vibrazione è però grande (abbastanza grande da produrre un suono ben distinto) solo per le corde la cui frequenza propria di vibrazione coincide con la frequenza di una delle componenti armoniche del suono emesso dalla corda che abbiamo messo in vibrazione premendo il tasto. Se, per esempio (fig. 5), il tasto corrisponde a un *do* di frequenza f, possiamo far risuonare, e nitidamente percepire (se il pianoforte è ben accordato), il *do* dell'«ottava» superiore (che ha frequenza $2f$), il *sol* di tale ottava (frequenza $3f$), il *do* dell'ottava successiva (frequenza $4f$), il *mi* di tale ottava (frequenza $5f$), il *sol* di tale ottava (frequenza $6f$), il *si bemolle* di tale ottava (frequenza $7f$), il *do* dell'ottava successiva (frequenza $8f$).

ESERCIZI APPLICATIVI E DI CONTROLLO

1 Si vuole far oscillare liberamente, in assenza di attrito, una massa m = 50 g con frequenza 3 Hz tramite una molla ideale. Quale valore deve avere la costante elastica k della molla?

2 Qual è, nel Sistema Internazionale, l'unità di misura per la costante b di proporzionalità tra forza di attrito e velocità?

3 Nel diagramma orario di un'oscillazione armonica smorzata (fig. 2), tra due zeri consecutivi della distanza x la curva è un arco di sinusoide (*vero* / *falso*).

4 In caso di oscillazione smorzata, è costante il rapporto tra le ampiezze di due oscillazioni successive (*vero* / *falso*).

5 Una massa di 400 g oscilla sotto l'azione di una forza elastica di costante k = 300 N/m e di una forza di attrito proporzionale alla velocità.
(*a*) Posto che la costante di proporzionalità b abbia valore 5 kg/s, si determini la frequenza di oscillazione.
(*b*) Si trovi quale valore assume la costante b in caso di smorzamento critico.

6 Per aumentare l'ampiezza di oscillazione di un'altalena occorre imprimere una successione di impulsi in sincronismo col movimento dell'altalena. Perché gli impulsi non possono avere una frequenza diversa? Non dovrebbe, un sistema oscillante, assumere la frequenza della forza impressa?

7 Con riferimento alla situazione mostrata in fig. 3, pag. 419, su supponga che sia m = 500 g e k = 200 N/m, e che la costante b di smorzamento valga 2 kg/s. Quale frequenza bisognerebbe allora dare a una forza eccitatrice sinusoidale per ottenere che il sistema entri in risonanza con un massimo di ampiezza proprio a tale frequenza? Ci si basi sulle quattro curve del grafico di fig. 4 (pag.420).